АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 2

УДК 534.26

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМЫ ПЛАСТИНА — ЖИДКОСТЬ В ПРИСУТСТВИИ УПРУГОВЯЗКОГО СЛОЯ

Белинский Б. И.

Получены аналоги формул Грина и оптической теоремы для погруженной в жидкость двухслойной пластины, состоящей из упруговязкого и несущего слоев, в присутствии на ней каких-либо неоднородностей. Сформулированы допустимые гранично-контактные условия на линиях перехода двухслойной пластины в однослойную.

Сложность численных и аналитических методов, используемых в современных расчетах дифракции на пластинах, диктует необходимость получения формул, упрощающих или контролирующих эти расчеты.

В классической работе [1] сформулирован принцип взаимности при наличии в пространстве упругих тел и оболочек, свойства которых не описываются нормальным локальным импедансом, а также найдены общие соотношения, связывающие звуковое поле, дифрагирующее на упругой поверхности, и звуковое поле, излученное этой поверхностью под действием внешних сил. В монографии [2] описаны многочисленные применения принципа взаимности для расчета звуковых полей, излученных пластинами и оболочками, в частности установлена связь излучения звука пластинами с их звукопрозрачностью. В работе [3] найдены формулы, представляющие собой конкретизацию принципа взаимности [1] для системы пластина — жидкость, а в [4] установлена оптическая теорема для указанной системы.

Целью данной работы является получение некоторых формул типа [1—4] для погруженной в жидкость двухслойной пластины, состоящей из упруговязкого и несущего слоев, а также уточнение постановки задач дифракции на описанной пластине в присутствии каких-либо неоднородностей.

Рассмотрим находящуюся в акустической среде бесконечную несущую пластину ($-\infty<x,\ z<\infty,\ y=0$), по которой распределен (быть может, неоднородно) упруговязкий слой ($y=+0$). Описанная система часто встречается в акустике и волновые процессы в ней неоднократно изучались для конкретных задач [5—7].

Обозначим давление и смещение на тыльной (прилегающей к пластине) стороне слоя $p_0(x,\ z)$ и $\zeta_0(x,\ z)$, а давление в среде $p_\pm(x,\ y,\ z)$ при $y\gtrless 0$. Предположим, что слой обладает свойством локально-реагирующих поверхностей, т. е. колебания в нем распространяются только в поперечном направлении. Тогда связь давлений и колебательных скоростей на лицевой и тыльной поверхностях слоя может быть описана уравнениями четырехполюсника [7]

$$\begin{pmatrix} p_+(x,0,z) \\ -i\omega\zeta_+(x,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x,z) \\ -i\omega\zeta_0(x,z) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь положено $B_{11}=B_{22}=\cos\alpha$, $B_{12}=i\eta\sin\alpha/(\omega\alpha)$, $B_{21}=i\omega\alpha\sin\alpha/\eta$, $\alpha=k_cH_c$, $\eta=\rho_cH_c\omega^2$, причем ρ_c, H_c, k_c — плотность, толщина и комплексное волновое число для волн в слое, ρ_0 — плотность жидкости. Слой считается тонким, так что поверхности пластины и слоя геометрически совпадают при $y=+0$. Зависимость процессов от времени $\exp(-i\omega t)$ всюду опускается. Предполагаются выполненными условия непрерывности нормальной

компоненты вектора смещений на границе пластина — жидкость и уравнение теории тонких пластин

$$\zeta_0 = \frac{1}{\rho_0\omega^2}\frac{\partial p}{\partial y}(x, 0, z), \tag{2}$$

$$(\nabla^4 - k_0^4)\zeta_0 + \frac{1}{D}(p_0 - p_-) = \frac{1}{D} f_y. \tag{3}$$

Здесь $k_0^4 = \rho_п\omega^2 H_п/D$, причем $\rho_п$, $H_п$ — плотность и толщина пластины, D — ее цилиндрическая жесткость, f_y — плотность внешних поверхностных сил, ∇^4 — двумерный бигармонический оператор.

Для описанной системы выведем аналог формулы Грина [1—3]. Ее состояние характеризуется величинами p_+, ζ_+, p_0, ζ_0 и плотностью внешних поверхностных сил f_y (предположим для простоты, что объемные силы отсутствуют). Введем также дуальное состояние p_+', ζ_+', P_0', ζ_0' и соответствующую плотность сил f_y'. Пусть некоторый объем среды Ω примыкает к пластине со слоем по поверхности S, прочую часть поверхности обозначим через Σ. Пусть L — граница области S. Считается для простоты, что нижняя среда отсутствует.

Привлечем вторую формулу Грина для пластины [3] (черта здесь и ниже означает комплексное сопряжение)

$$\frac{\omega}{2}\int_L \Big[f_{эф}(\bar\zeta_0')\zeta_0 + M_{nn}(\bar\zeta_0')\frac{\partial\zeta_0}{\partial n} - f_{эф}(\zeta_0)\bar\zeta_0' -$$

$$- M_{nn}(\zeta_0)\frac{\partial\bar\zeta_0'}{\partial n}\Big] dl = \frac{\omega D}{2}\int_S (\bar\zeta_0'\nabla^4\zeta_0 - \zeta_0\nabla^4\bar\zeta_0')\, dS. \tag{4}$$

Здесь $f_{эф}$ — эффективная перерезывающая сила, M_{nn} — изгибающий момент на контуре L, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали. Контур L считается гладким, так что уголковые силы [3] отсутствуют. Привлечем вторую формулу Грина для акустической среды

$$\frac{1}{2\rho_0\omega}\int_{\Sigma\cup S}\left(p_+\frac{\partial\bar p_+'}{\partial n} - \bar p_+'\frac{\partial p_+}{\partial n}\right) dS = \frac{1}{2\rho_0\omega}\int_\Omega (p_+\Delta\bar p_+' - \bar p_+'\Delta p_+)\, d\Omega. \tag{5}$$

Сложим ее почленно с равенством (4), учтем условие непрерывности (2) и уравнение движения (3). При преобразовании интеграла по поверхности в левой части (5) используем уравнение четырехполюсника (1). В итоге найдем

$$\frac{1}{2\rho_0\omega}\int_\Sigma\left(p_+\frac{\partial\bar p_+'}{\partial n} - \bar p_+'\frac{\partial p_+}{\partial n}\right)d\Sigma + \int_S\Big[i\,\mathrm{Re}\,(\bar B_{22}B_{21})\, p_0\bar p_0' + i\omega^2\,\mathrm{Re}\,(\bar B_{11}B_{12})\,\zeta_0\bar\zeta_0' +$$

$$+ \frac{\omega}{2}p_0\bar\zeta_0'(1 - \bar B_{11}B_{22} - \bar B_{12}B_{21}) - \frac{\omega}{2}\bar p_0'\zeta_0(1 - B_{11}\bar B_{22} - B_{12}\bar B_{21})\Big]\, dS +$$

$$+ \frac{\omega}{2}\int_L\Big[f_{эф}(\bar\zeta_0')\xi_0 + M_{nn}(\bar\zeta_0')\frac{\partial\zeta_0}{\partial n} - f_{эф}(\zeta_0)\bar\zeta_0' - M_{nn}(\zeta_0)\frac{\partial\bar\zeta_0'}{\partial n}\Big]\, dl -$$

$$- \frac{2i}{2\rho_0\omega}\,\mathrm{Im}\,k^2\int_\Omega p_+\bar p_+' d\Omega = \frac{\omega}{2}\int_S (f_y\bar\zeta_0' - \bar f_y'\zeta_0)\, dS. \tag{6}$$

Соотношение (6) естественно назвать формулой Грина для системы пластина — акустическая среда в присутствии упруговязкого слоя.

Пусть теперь пластина подкреплена ребром жесткости ($x=0$, $-\infty<z<\infty$). Гранично-контактные условия, описывающие режим стыковки ребра и пластины, приведены в [3]. Считается, что вокруг ребра в слое вырезана бесконечно тонкая полоска, так что ребро контактирует лишь с

пластиной. Формула Грина типа (6) может быть выведена и для описанной системы. Опуская выкладки, сходные с [3], приведем лишь результат

$$\frac{1}{2\rho_0\omega}\int\limits_{\Sigma}\left(p_+\frac{\partial\bar p_+'}{\partial n}-\bar p_+'\frac{\partial p_+}{\partial n}\right)d\Sigma+\int\limits_{S}\Big[i\,\mathrm{Re}\,(\bar B_{22}B_{21})\,p_0\bar p_0'+$$

$$+i\omega^2\,\mathrm{Re}\,(\bar B_{11}B_{12})\,\zeta_0\bar\zeta_0'+\frac{\omega}{2}p_0\bar\zeta_0'\,(1-\bar B_{11}B_{22}-\bar B_{12}B_{21})-$$

$$-\frac{\omega}{2}\bar p_0'\zeta_0\,(1-B_{11}\bar B_{22}-B_{12}\bar B_{21})\Big]\,dS+\frac{\omega}{2}\int\limits_{L}\Big[f_{\text{эф}}(\bar\zeta_0')\,\zeta_0+$$

$$+M_{nn}(\bar\zeta_0')\,\frac{\partial\zeta_0}{\partial n}-f_{\text{эф}}(\zeta_0)\,\bar\zeta_0'-M_{nn}(\zeta_0)\,\frac{\partial\bar\zeta_0'}{\partial n}\Big]\,dl-$$

$$-\frac{2i}{2\rho_0\omega}\,\mathrm{Im}\,k^2\int\limits_{\Omega}p_+\bar p_+'\,d\Omega+\frac{\omega}{2}\,[EI\,(\zeta_{0zzz}\bar\zeta_0'-\zeta_{0zz}\bar\zeta_{0z}'-\bar\zeta_{0zzz}'\zeta_0+\bar\zeta_{0zz}'\zeta_{0z})-$$

$$-K\,(\zeta_{0xz}\bar\zeta_{0x}'-\bar\zeta_{0xz}'\zeta_{0x})]\,\Big|_{(0,z_1)}^{(0,z_2)}=\frac{\omega}{2}\int\limits_{S}(f_y\bar\zeta_0'-\bar f_y'\zeta_0)\,dS+$$

$$+\frac{\omega}{2}\int\limits_{z_1}^{z_2}(F\bar\zeta_0'+M\bar\zeta_{0x}'-\bar F'\zeta_0-\bar M'\zeta_{0x})\,|_{x=0}\,dz. \qquad (7)$$

Здесь F и M — заданные сторонняя перерезывающая сила и изгибающий момент, действующие на ребро, E — модуль Юнга материала ребра, I — момент инерции сечения ребра относительно оси вращения, расположенной на нижней кромке, K — крутильная жесткость ребра. Считается, что контур L пересекает ребро под прямым углом в точках $(0, z_1)$ и $(0, z_2)$.

Найденные формулы (6), (7) представляют собой конкретизацию принципа взаимности в форме Лямшева. Они могут служить отправной точкой для построения приближений в теории дифракции звуковых волн на пластинах произвольного очертания (типа так называемой модифицированной теории Кирхгофа для плоских экранов [8]).

Если в формуле (7) отождествить основное и дуальное состояния, т. е. положить $p_+'=p_+$, $\zeta'=\zeta$ и т. д., то она преобразуется к виду

$$\pi_{\text{ж}}+\pi_L+\pi_{\text{р}}+\pi_{\text{пог,сл}}+\pi_{\text{пог,ж}}=A_{\text{пов}}+A_{\text{р}}. \qquad (8)$$

Здесь введены парциальные потоки энергии: $\pi_{\text{ж}}$ — через поверхность Σ, π_L — через контур пластины L, $\pi_{\text{р}}$ — через сечения $(0, z_1)$ и $(0, z_2)$ ребра, а также поглощенная энергия в слое $\pi_{\text{пог,сл}}$ и в жидкости $\pi_{\text{пог,ж}}$. При этом $A_{\text{пов}}$ и $A_{\text{р}}$ — работа поверхностных сил над пластиной в области S и работа сил и моментов, приложенных к ребру. Имеем

$$\pi_{\text{ж}}=\frac{1}{2\rho_0\omega}\,\mathrm{Im}\int\limits_{\Sigma}\bar p\,\frac{\partial p}{\partial n}\,d\Sigma,\quad \pi_L=\frac{\omega}{2}\,\mathrm{Im}\int\limits_{L}\Big[f_{\text{эф}}(\zeta_0)\,\bar\zeta_0+M_{nn}(\zeta_0)\,\frac{\partial\bar\zeta_0}{\partial n}\Big]\,dl,$$

$$\pi_p=\frac{\omega}{2}\,\mathrm{Im}\,[EI\,(\bar\zeta_{0zzz}\zeta_0-\bar\zeta_{0zz}\zeta_{0z})-K\bar\zeta_{0xz}\zeta_{0x}]_{(0,z_1)}^{(0,z_2)}, \qquad (9)$$

$$\pi_{\text{пог, ж}}=\frac{1}{2\rho_0\omega}\,\mathrm{Im}\,k^2\int\limits_{\Omega}|\,p_+\,|^2\,d\Omega,$$

$$\pi_{\text{пог, сл}}=\frac{1}{2}\int\limits_{S}\{-\,\mathrm{Re}\,(\bar B_{22}B_{21})\,|\,p_0\,|^2-\omega^2\,\mathrm{Re}\,(\bar B_{11}B_{12})\,|\,\zeta_0\,|^2-$$

$$-\,\omega\,\mathrm{Im}\,[p_0\bar\zeta_0\,(1-\bar B_{11}B_{22}-\bar B_{12}B_{21})]\}\,dS,$$

$$A_{\text{пов}}=\frac{\omega}{2}\,\mathrm{Im}\int\limits_{S}\bar f_y\zeta_0\,dS,\qquad A_{\text{р}}=\frac{\omega}{2}\,\mathrm{Im}\int\limits_{z_1}^{z_2}(\bar F\zeta_0+\bar M\zeta_{0x})\,|_{x=0}\,dz.$$

Соотношение (8) представляет собой закон сохранения энергии в описанной системе и служит одним из контрольных тождеств, полезных при расчете дифракционных процессов.

Пусть слой распределен по несущей пластине частично, например справа от прямой ($x=a$, $-\infty<z<\infty$) он отсутствует. Пусть контур L охватывает часть L_0 этой прямой. Тогда в тождестве (8) слева возникает добавочное слагаемое (σ — коэффициент Пуассона пластины)

$$\frac{\omega D}{2}\,\mathrm{Im}\int\limits_{L_0}\{[\zeta_{0xxx}+(2-\sigma)\,\zeta_{0xzz}]_{x=a-0}^{x=a+0}\,\bar{\zeta}_0-[\zeta_{0xx}+\sigma\zeta_{0zz}]_{x=a-0}^{x=a+0}\,\bar{\zeta}_{0x}\}\,dz. \quad (10)$$

Поскольку линия перехода ($x=a$) не должна быть активным источником излучения, подынтегральное выражение в (10) должно быть равно нулю. Например, достаточно считать

$$\frac{d^s}{dx^s}\zeta_0(a-0,z)=\frac{d^s}{dx^s}\zeta_0(a+0,z) \qquad (s=0,1,2,3), \quad (11)$$

т. е. предположить непрерывность смещений пластины, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил. Как известно, условия такого рода обязательно возникают при постановке дифракционных задач акустики в том случае, если граничные условия различны на разных частях упругой границы [9]. Возможны иные варианты гранично-контактных условий. Пусть, например, рассматривается дифракция на двухслойной пластине с кромкой ($x=a$, $-\infty<z<\infty$). В этом случае гранично-контактные условия имеют вид $\zeta_0=\zeta_{0x}=0$ для жестко заделанной кромки и $\zeta_{0xxx}+(2-\sigma)\zeta_{0xzz}=\zeta_{0xx}+\sigma\zeta_{0zz}=0$ для свободной кромки и, таким образом, формально не отличаются от условий в случае однослойной пластины. Подчеркнем, что перечисленные контактные условия формулируются в терминах смещения на тыльной стороне слоя.

Сделаем здесь одно замечание математического характера. Полностью поставленная задача дифракции должна иметь единственное решение, иначе говоря, в отсутствие сторонних источников поле давлений должно быть нулевым. Обращаясь к закону сохранения энергии (8), (9), положим $f_y=F=M=0$ и будем считать для простоты поглощение в жидкости отсутствующим. Ввиду поглощения энергии в слое необходимо считать, что поля смещений $\zeta_0(x, z)$ и давлений $p_0(x, z)$ убывают на бесконечности. Поле давлений должно иметь асимптотику типа расходящейся волны $p\sim\exp(ikr)\psi(\varphi,\theta)/r$ ($kr\gg1$), где $\psi(\varphi,\theta)$ — диаграмма рассеяния, (φ,θ) — углы сферической системы координат. Пусть в качестве области Ω взято полупространство ($y>0$). Из закона сохранения (8), (9) найдем (Σ_0 — полусфера единичного радиуса) $k/(2\rho_0\omega)\int_{\Sigma_0}|\psi(\varphi,\theta)|^2d\Sigma_0+\pi_{\text{пог,сл}}=0$. Отсюда следует, что для доказательства единственности решения задачи дифракции необходимо установить положительную определенность энергетической формы $\pi_{\text{пог,сл}}$, т. е., по сути, доказать, что четырехполюсник, задаваемый уравнениями (1), является пассивным. Условия пассивности сформулированы в работе [10] и в наших обозначениях имеют вид неравенств

$$\mathrm{Re}(\bar{B}_{11}B_{12})<0,\quad \mathrm{Re}(\bar{B}_{22}B_{21})<0,\quad 4\mathrm{Re}(\bar{B}_{11}B_{12})\,\mathrm{Re}(\bar{B}_{22}B_{21})>|1-\bar{B}_{11}B_{22}-\bar{B}_{12}B_{21}|^2. \quad (12)$$

Используя явные выражения для элементов матрицы B и полагая $u=\mathrm{Re}(k_cH_c)$, $v=\mathrm{Im}(k_cH_c)$ ($u, v>0$), перепишем условия (12) в форме неравенств

$$\rho_cH_c\omega\frac{uv}{u^2+v^2}\left(\frac{\sin 2u}{2u}-\frac{\mathrm{sh}\,2v}{2v}\right)<0,$$

$$\frac{uv}{\rho_cH_c\omega}\left(-\frac{\sin 2u}{2u}-\frac{\mathrm{sh}\,2v}{2v}\right)<0,\qquad \frac{4u^2v^2}{u^2+v^2}\left(\frac{\mathrm{sh}^2 v}{v^2}-\frac{\sin^2 u}{u^2}\right)>0,$$

очевидность которых завершает доказательство единственности решения задачи дифракции в присутствии упруговязкого слоя.

Всюду ниже считается, что зависимость процессов от продольной координаты z отсутствует (плоская задача). Пусть пластина и покрывающий слой однородны и бесконечны ($-\infty<x<\infty$, $y=0$). Приведем формулы для

коэффициентов отражения и прохождения плоской волны через систему пластина – слой. Имеем ($c_0=\cos\varphi_0$, $s_0=\sin\varphi_0$, φ_0 – угол падения волны)

$$p_{\text{г}}(x, y)=\begin{cases}\exp(ik(xc_0-ys_0))+A\exp(ik(xc_0+ys_0)), & y>0,\\ T\exp(ik(xc_0-ys_0)), & y<0,\end{cases}$$

$$A=\left[\theta s_0^2(c_0^4-a)+i\alpha\operatorname{tg}\alpha s_0(c_0^4-a)+b\alpha\operatorname{tg}\alpha-s_0^2\theta^2\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}b\right]\Big/\Delta,$$

$$T=-2is_0\theta b/(\Delta\cos\alpha),$$

$$\Delta=\theta s_0^2(c_0^4-a)-i\alpha\operatorname{tg}\alpha s_0(c_0^4-a)-b\alpha\operatorname{tg}\alpha-s_0^2\theta^2\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}b-2i\theta s_0 b,$$

$$\theta=\rho_c H_c k/\rho_0,\qquad a=k_0^4/k^4,\qquad b=\rho_0\omega^2/k^5D. \tag{13}$$

Для достаточно больших значений параметра $\alpha=k_cH_c$ находим $A=-1$, $T=0$, т. е. слой оказывается абсолютно мягким и полностью изолирует нижнее полупространство.

Подставим поле $p_{\text{г}}$ в энергетическое тождество (8), (9), считая, что внешние силы отсутствуют, потерь в жидкости нет, а в качестве области Ω взято все пространство. Вычисления, аналогичные [4], дают

$$\begin{aligned}s_0\theta(1-|A|^2-|T|^2)=|\cos\alpha|^4\Bigg\{&\left|1+A+i\theta s_0(1-A)\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\right|^2\operatorname{Im}(\alpha\operatorname{tg}\alpha)+\\&+|\alpha\operatorname{tg}\alpha(1+A)-i\theta s_0(1-A)|^2\operatorname{Im}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\right)+\\&+\operatorname{Im}\Bigg[\left(1+A+i\theta s_0(1-A)\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\right)(\bar\alpha\,\overline{\operatorname{tg}\alpha}(1+\bar A)+\\&+i\theta s_0(1-\bar A))\left(\frac{\alpha}{\bar\alpha}|\operatorname{tg}\alpha|^2+1-\left|\frac{1}{\cos\alpha}\right|^2\right)\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{14}$$

Тождество (14) является контрольным при вычислении коэффициентов отражения и прохождения по формулам (13). Его правая часть характеризует поглощение энергии в слое при прохождении через конструкцию плоской волны.

Приведем дисперсионное уравнение для волновых чисел $\varkappa$ изгибных волн в рассматриваемой системе, обезразмеренных на волновое число k в жидкости ($\lambda=\varkappa/k$, $\Gamma=(\lambda^2-1)^{1/2}$):

$$(\lambda^4-a)\left(\Gamma-\frac{\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\theta}\right)-b\left(2+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\Gamma\theta-\frac{\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\Gamma\theta}\right)=0. \tag{15}$$

Численный анализ корней уравнения (15) проведен в работе [6] и дает возможность исследовать вибропоглощающие свойства слоя. Здесь отметим лишь, что уравнение (15) имеет на обоих листах комплексной плоскости 6 пар корней в отличие от 5 пар для классического уравнения в случае пластины без слоя. Увеличение числа корней принципиально связано с отсутствием симметрии модели относительно срединной линии ($y=0$). Если бы слой покрывал пластину сверху и снизу, были бы возможны независимые симметричные и антисимметричные колебания. Приведем соответствующие дисперсионные уравнения: $\Gamma-\alpha\operatorname{tg}\alpha/\theta=0$, $(\lambda^4-a)(\Gamma-\alpha\operatorname{tg}\alpha/\theta)-b(1+\Gamma\theta\operatorname{tg}\alpha/\alpha)=0$. При этом уравнение симметричных колебаний имеет на обоих листах 1 пару корней, а уравнение антисимметричных колебаний – 5 пар. В отсутствие симметрии (односторонний слой) различные типы колебаний сцеплены, вследствие чего уравнение (15) имеет 6 пар корней. Отметим, что если слой не обладает вязкостью, то при волновой толщине, обеспечивающей упругий характер его импеданса ($\operatorname{tg}\alpha>0$), уравнение (15) является дисперсионным для поверхностных волн, распространяющихся вдоль слоя.

Обратимся теперь к выводу оптической теоремы [4] для системы пластина – упруговязкий слой – жидкость. Будем считать, что пластина разделяет две идентичные среды, а препятствие, вызывающее дифракцию падающей плоской волны, ограничено по размерам и не поглощает энергию.

Пусть сторонние источники отсутствуют ($f_y=F=M=0$), $\operatorname{Im} k=0$ и все процессы не зависят от координаты z (плоская задача). Закон сохранения энергии (8), (9) в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{2\rho_0\omega}\operatorname{Im}\int\limits_{\Sigma_r}\bar{p}\frac{\partial p}{\partial r}\,d\Sigma+\pi_{\text{пог, сл}}+\frac{\omega D}{2}\operatorname{Im}(\zeta_0\bar{\zeta}_0'''-\zeta_0'\bar{\zeta}_0'')\Big|_{-r}^{r}=0. \qquad (16)$$

Здесь Σ_r — окружность радиуса r с центром в начале координат, помещенном в какую-либо точку неоднородности.

Поле давлений складывается из геометрической части (13) и дифракционной. Считая $kr\gg1$, заменим дифракционное поле p_s асимптотикой в дальней зоне

$$p=p_{\text{г}}+p_s,\qquad p_s\sim\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\,e^{i(kr-\pi/4)}\psi(\varphi,\varphi_0). \qquad (17)$$

Для давления непосредственно на пластине имеем $p_0=p_{0\text{г}}+p_{0s}$. При наличии потерь в слое естественно считать, что дисперсионное уравнение (15) не имеет вещественных нулей, иначе говоря, поверхностные волны затухают на больших расстояниях от неоднородности, вызывающей дифракцию: $\xi_{0s}\to0$ при $x\to\pm\infty$. Устремим волновой радиус окружности Σ_r к бесконечности, привлечем представления полей (13) и (17), учтем тождество (14) и проведем преобразования, аналогичные [4]. Опуская выкладки, приведем лишь результат

$$\sigma_{\text{рас}}+\sigma_{\text{пог, сл}}=-\frac{4\pi}{k}\operatorname{Re}(\bar{A}\psi(\varphi_0,\varphi_0)+\bar{T}\psi(2\pi-\varphi_0,\varphi_0))-$$

$$-\frac{2\rho_0\omega}{k}\int\limits_{\text{сл}}\{-\operatorname{Re}(B_{21}\bar{B}_{22})\operatorname{Re}(\bar{p}_{0\text{г}}p_{0s})-\omega^2\operatorname{Re}(B_{12}\bar{B}_{11})\operatorname{Re}(\bar{\zeta}_{0\text{г}}\zeta_{0s})-$$

$$-\frac{\omega}{2}\operatorname{Im}[(p_{0\text{г}}\bar{\zeta}_{0s}+p_{0s}\bar{\zeta}_{0\text{г}})(1-\bar{B}_{11}B_{22}-\bar{B}_{12}B_{21})]\}\,dx. \qquad (18)$$

Здесь $\sigma_{\text{рас}}=\pi_{\text{рас}}/w_0$ — эффективный поперечник рассеяния волн в жидкости, $w_0=k/(2\rho_0\omega)$ — энергия, приходящаяся на единицу длины фронта падающей плоской волны, $\sigma_{\text{пог,сл}}=\pi_{\text{пог,сл}}/w_0$ — эффективный поперечник поглощения в слое, вычисленный для дифракционной части поля, $\zeta_{0\text{г}}$ и ζ_{0s} — смещения на пластине, вычисленные для чисто геометрической и дифракционной составляющих полного поля соответственно. При этом $\pi_{\text{рас}}$ вычисляется через диаграмму направленности: $\pi_{\text{рас}}=\pi/(\rho_0\omega)\int\limits_0^{2\pi}|\psi(\varphi,\varphi_0)|^2\,d\varphi$.

Отметим, что оптическая теорема (18) отличается от аналогичного тождества для случая пластины без слоя [4]. Прежде всего отсутствует член, соответствующий каналу рассеяния в виде изгибной волны, поскольку, как отмечалось, смещение ζ_{0s} убывает на бесконечности. Далее, в левой части (18) появляется сечение поглощения, а в правой — некоторое интегральное слагаемое, которое после домножения на w_0 приобретает смысл энергии, утрачиваемой следом плоских волн в двухслойной пластине ($p_{0\text{г}}$, $\zeta_{0\text{г}}$) за счет гасящего действия следа дифракционного поля (p_{0s}, ζ_{0s}). Аналогично внеинтегральный член в правой части приобретает смысл энергии, утрачиваемой отраженной и прошедшей волнами вследствие рассеяния на неоднородности в пластине.

Пусть препятствие, вызывающее дифракцию, является точечным (трещина, ребро жесткости и т. п.). Решение, как известно, может быть найдено методом разложения по плоским волнам [9, 11] в виде $p_{s\pm}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}P_\pm(\lambda)\exp(i\lambda x\mp\gamma(\lambda)y)\,d\lambda$, где $\gamma(\lambda)=(\lambda^2-k^2)^{1/2}$, а $P_\pm(\lambda)$ — искомые плотности, определяемые из граничных и гранично-контактных условий. При этом диаграмма направленности рассеянного поля выражается непосредственно через эти функции: $\psi(\varphi)=\pm k\sin\varphi P_\pm(k\cos\varphi)$ для $0<\varphi<\pi$ и $\pi<\varphi<2\pi$ соответственно.

Обсудим оптическую теорему (18) для этого случая. Обозначим через $P_0(\lambda)$ и $Z_0(\lambda)$ преобразования Фурье полей $p_{0s}(x)$ и $\zeta_{0s}(x)$. Эти функции выражаются через $P_+(\lambda)$; $P_0(\lambda)=P_+(\lambda)U(\lambda)$, $Z_0(\lambda)=P_+(\lambda)V(\lambda)$, где введены обозначения $U(\lambda)=B_{22}-i\gamma(\lambda)B_{12}/(\rho_0\omega)$, $V(\lambda)=-iB_{21}/\omega-B_{11}\gamma(\lambda)/(\rho_0\omega^2)$. В частности, имеют место соотношения $ks_0P_0(kc_0)=U(kc_0)\psi(\varphi_0)$, $ks_0Z_0(kc_0)=V(kc_0)\psi(\varphi_0)$ $(c_0=\cos\varphi_0,\ s_0=\sin\varphi_0)$. Далее, согласно (13), след геометрической части поля в пластине имеет вид $p_{0г}=ks_0C_1\exp(ikxc_0)$, $\zeta_{0г}=ks_0C_2\exp(ikxc_0)$, где $C_1=2\theta(s_0(c_0^4-a)-ib)/(k\Delta\cos\alpha)$, $C_2=-iT/(\rho_0\omega^2)$. С учетом равенства Парсеваля и того обстоятельства, что преобразование Фурье от $\exp(ikxc_0)$ есть $2\pi\delta(\lambda-kc_0)$, удается вычислить все интегралы, входящие в правую часть оптической теоремы (18). В итоге имеем

$$\sigma_{рас}+\sigma_{пог,\,сл}=-\frac{4\pi}{k}\operatorname{Re}(\bar{A}\psi(\varphi_0,\varphi_0)+\bar{T}\psi(2\pi-\varphi_0,\varphi_0))+$$

$$+\frac{4\pi}{k}\Big\{\operatorname{Re}(\bar{B}_{22}B_{21})\operatorname{Re}(\bar{C}_1U(kc_0)\psi(\varphi_0))+\omega^2\operatorname{Re}(\bar{B}_{11}B_{12})\operatorname{Re}(\bar{C}_2V(kc_0)\psi(\varphi_0))+$$

$$+\frac{\omega}{2}\operatorname{Im}[(C_1\overline{V(kc_0)}\,\overline{\psi(\varphi_0)}+C_2U(kc_0)\psi(\varphi_0))(1-\bar{B}_{11}B_{22}-\bar{B}_{12}B_{21})]\Big\}\rho_0\omega.$$

Сходным образом удается выразить сечение поглощения $\sigma_{пог,\,сл}$ через интегралы по вещественной оси от функций $P_0(\lambda)$, $Z_0(\lambda)$. Сечение рассеяния $\sigma_{рас}$, как было отмечено выше, выражается через интеграл от квадрата модуля диаграммы направленности $\psi(\varphi)$ по всем углам.

Таким образом, оптическая теорема для случая точечной неоднородности на пластине либо открывает возможность вычислить сечение поглощения, не прибегая к квадратурам по всей вещественной оси, либо (что более предпочтительно) при независимом вычислении сечения поглощения дает удобное контрольное тождество.

В качестве другого применения принципа взаимности (7) докажем, что диаграмма направленности рассеянного поля, возникающего при падении на рассматриваемую конструкцию с произвольной конечной непоглощающей неоднородностью плоской волны, является симметричной функцией угла падения и угла наблюдения. Для простоты ограничимся плоской задачей и будем считать, что снизу $(y<0)$ среда отсутствует.

Для доказательства симметрии привлечем тождество типа (7), считая, что сторонние источники отсутствуют, а в среде нет затухания. В качестве основного состояния выберем такое, которое порождено падением на пластину с неоднородностью плоской волны $p_г=\exp(ik(xc_1-ys_1))$, где $c_1=\cos\varphi_1$, $s_1=\sin\varphi_1$, $\pi-\varphi_1$ — угол падения, а в качестве дуального — падением волны $p_г'=\exp(ik(xc_1'-ys_1'))$, где $c_1'=\cos\varphi_1'$, $s_1'=\sin\varphi_1'$. При этом во всех формулах (4)—(7) удобно опустить комплексное сопряжение.

В итоге найдем

$$\frac{1}{2\rho_0\omega}\int\limits_{\Sigma}\left(p_+\frac{\partial p_+'}{\partial n}-p_+'\frac{\partial p_+}{\partial n}\right)d\Sigma+\frac{\omega}{2}\int\limits_{-r}^{r}(p_+'\zeta_+-p_+\zeta_+')|_{y=0}\,dx=0.$$

Нетрудно проверить, что форма $p_+'\zeta_+-p_+\zeta_+'$ инвариантна относительно преобразования (1), задаваемого матрицей B:

$$p_+'\zeta_+-p_+\zeta_+'=p_0'\zeta_0-p_0\zeta_0'. \tag{19}$$

При преобразовании последней формы учтем уравнение движения пластины (3) в отсутствие внешних сил. Найдем

$$\frac{1}{2\rho_0\omega}\int\limits_{\Sigma_r}\left(p_+\frac{\partial p_+'}{\partial n}-p_+'\frac{\partial p_+}{\partial n}\right)d\Sigma+$$

$$+\frac{\omega D}{2}\left(\zeta_0'\frac{d^3\zeta_0}{dx^3}-\frac{d\zeta_0'}{dx}\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}-\zeta_0\frac{d^3\zeta_0'}{dx^3}+\frac{d\zeta_0}{dx}\frac{d^2\zeta_0'}{dx^2}\right)\Big|_{-r}^{r}=0. \tag{20}$$

Устремим радиус полуокружности Σ_r к бесконечности. При этом поля p_+, p_+' можно представить в виде (A, A' — коэффициенты отражения плоской

волны для углов падения $\pi-\varphi_1$, $\pi-\varphi_1'$)

$$p_+ = \exp(ik(xc_1 - ys_1)) + A\exp(ik(xc_1 + ys_1)) + \\ + \sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\right)\psi(\varphi, \pi - \varphi_1),$$

$$p_+' = \exp(ik(xc_1' - ys_1')) + A'\exp(ik(xc_1' + ys_1')) + \\ + \sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\right)\psi(\varphi, \pi - \varphi_1').$$

Внесем эти представления в тождество (20) и применим метод стационарной фазы аналогично [4]. Найдем

$$\psi(\pi-\varphi_1, \pi-\varphi_1') = \psi(\pi-\varphi_1', \pi-\varphi_1). \tag{21}$$

Полученное равенство представляет собой один из вариантов принципа взаимности [1], причем ввиду свойства инвариантности (19) оно имеет место и для пластины без слоя с произвольным конечным непоглощающим препятствием.

На важность привлечения общих соображений к решению конкретных задач дифракции на пластинах указывает следующее обстоятельство. В [12] предпринята попытка решения задачи дифракции плоской волны на подкрепленной ребром жесткости пластине, описываемой уравнениями Тимошенко. Однако поправки Тимошенко в гранично-контактные условия не внесены, последние взяты по формальной аналогии с условиями для классических уравнений пластины [11]. Это приводит к нарушению требования непрерывности потока энергии по пластине в точке скрепления с ребром (в рассматриваемой нами задаче условие такого рода фиксируется обращением в нуль выражения (10)). В итоге порядок найденной поправки к решению [11] и порядок внесенной ошибки совпадают, а физически естественное свойство (21) симметрии диаграммы направленности утрачивается. Вследствие этого решение [12] следует признать ошибочным. При правильных гранично-контактных условиях симметрия диаграммы направленности, разумеется, сохраняется.

Автор благодарен Д. П. Коузову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лямшев Л. М.* К вопросу о принципе взаимности в акустике.– Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 6, с. 1231–1234.
2. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики.– Л.: Судостроение, 1972, 348 с.
3. *Белинский Б. П., Коузов Д. П.* О формулах типа формул Грина для изгибно колеблющейся пластины.– Акуст. ж., 1981, т. 27, № 5, с. 710–718.
4. *Белинский Б. П., Коузов Д. П.* Оптическая теорема для системы пластина – жидкость.– Акуст. ж., 1980, т. 26, № 1, с. 13–19.
5. *Клюкин И. И.* Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах.– Л.: Судостроение, 1971.
6. *Барабанов В. В., Ляпунов В. Т.* Волноводные свойства граничащей с жидкостью пластины с мягким вибропоглощающим слоем.– Акуст. ж., 1980, т. 26, № 4, с. 612–615.
7. *Ржевкин С. Н.* Курс лекций по теории звука.– М.: Изд-во МГУ, 1960.
8. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции.– М.: Мир, 1964, 428 с.
9. *Коузов Д. П.* Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин.– Прикл. матем. и механ., 1969, т. 33, вып. 2, с. 240–250.
10. *Коузов Д. П.* Энергетический принцип единственности граничных задач акустики.– Зап. научн. семинара ЛОМИ. Т. 8. Математические вопросы теории распространения волн, 1979, вып. 10, с. 124–133.
11. *Коновалюк И. П., Красильников В. Н.* Влияние ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от тонкой пластины.– В кн.: Дифракция и излучение волн. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965, вып. 4, с. 149–165.
12. *Wooley B. L.* Acoustic scattering from a submerged plate. I. One reinforcing rib.– J. Acoust. Soc. Amer., 1980, v. 67, № 5, p. 1642–1653.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
23.VIII.1982