АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 2

УДК 534.2:532.528

МЕДЛЕННО ВРАЩАЮЩИЙСЯ ИМПУЛЬСНЫЙ ИСТОЧНИК ИЗЛУЧЕНИЯ

Левковский Ю. Л.

Рассмотрено излучение медленно вращающегося монополя, излучающего на части круговой траектории. Получено приближенное аналитическое решение задачи и произведена оценка границ его применения.

Исследование акустического излучения гребных винтов, насосов, вентиляторов и других лопастных механизмов сводится к анализу излучения вращающихся акустических источников [1, 2]. Для лопастных механизмов, работающих в воде, как правило, характерны невысокие скорости движения лопастей (в сравнении со звуковой скоростью) и возникновение на части траектории нестационарной каверны [3].

Использование для анализа излучения такой каверны точного решения задачи о вращающемся монополе доставляет неудобства, связанные с импульсным характером излучения. Вследствие вращения источника импульсы следуют периодически, продолжительность импульсов определяется величиной сектора, в котором существует каверна. Чем этот сектор меньше, тем большее число членов ряда Фурье необходимо сохранить в разложении для описания периодической последовательности импульсов. Каждый член ряда соответствует излучению монохроматической волны с частотой, кратной частоте вращения монополя. Точное решение задачи для каждого такого монополя известно [1], однако суммирование элементарных результатов из-за их большого числа оказывается громоздким и должно производиться численно. Вместе с тем условие малости числа Маха, характеризующего скорость движения источника по круговой траектории, позволяет получить приближенное аналитическое решение задачи.

Потенциал скорости вращающегося источника имеет вид

$$\Phi=-Q(\tau)/4\pi l(\tau). \tag{1}$$

Здесь и ниже $l(\tau)=S(\tau)[1+M(r_0/S(\tau)\sin(\theta_0-\theta')]$; $S(\tau)$ — расстояние от движущегося источника до точки наблюдения с учетом времени запаздывания $\tau=t-S/c_0$; S_0 — расстояние от центра вращения источника, расположенного в начале цилиндрических координат x_0, r_0, θ_0, до точки наблюдения; θ', θ^* — углы запаздывания, равные углам поворота источника за времена запаздывания $\tau'=t-S(\tau)/c_0$, $\tau^*=t-S_0/c_0$ соответственно; $M=\omega r/c_0$ — число Маха; t — время; c_0 — скорость звука; ω — частота вращения источника; r — радиус вращения источника.

Анализ соотношения (1) показывает, что при условии $M\ll 1$ оно формально преобразуется в известное выражение для потенциала источника, покоящегося в начале координат

$$\Phi=-Q(\tau)/4\pi S_0. \tag{2}$$

Наличие вращения учитывается косвенно — зависимостью интенсивности источника от времени запаздывания.

Принимая во внимание связь текущего времени с углом поворота источника $t=\theta/\omega$ и используя зависимость его интенсивности от объема схематизируемой источником каверны $Q=\omega d\Omega/dt$, для индуцированного давления с указанной выше точностью, соответствующей условию $M\ll 1$,

получим:

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\rho \omega^2}{4\pi S_0} \frac{\partial^2 \Omega(\theta')}{\partial \theta^2}. \tag{3}$$

В безразмерной форме последнее соотношение принимает вид

$$K_p = \frac{\pi}{4\bar{S}_0} \frac{\partial^2 \bar{\Omega}(\theta')}{\partial \theta^2}, \tag{4}$$

где $K_p = p/\rho(\omega r/\pi)^2$, $\bar{S}_0 = S_0/r$, $\bar{\Omega} = \Omega/r^3$.

В связи с тем, что индуцированное давление является периодической функцией угла поворота источника, его можно разложить в ряд Фурье. Полагая для общности, что излучают z равноотстоящих на угол $2\pi/z$ одинаковых источников, для коэффициентов разложения получим:

$$\begin{gathered} K_p = \frac{a_0}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} K_{p_m} \sin(mz\theta + \psi_m); \\ K_{p_m} = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}, \quad \psi_m = \operatorname{arc\,tg}(a_m/b_m); \end{gathered} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} a_m &= -\frac{m^2 z}{4\pi \bar{S}_0} \int_0^{2\pi} \bar{\Omega}(\theta') \cos(mz\theta)\, d\theta; \\ b_m &= -\frac{m^2 z}{4\pi \bar{S}_0} \int_0^{2\pi} \bar{\Omega}(\theta') \sin(mz\theta)\, d\theta \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Допустим, что излучение носит импульсный характер, т. е. происходит лишь на части круговой траектории, по которой движется источник: $-\pi/B < \theta < \pi/B$, $B \geqslant 1$, кроме того, для простоты будем считать, что интенсивность источника — четная функция угла его поворота:

$$\bar{\Omega} = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2} + \displaystyle\sum_{q=1}^{\nu} N_q \cos qB\theta & \text{при } 0 < \theta < \pi/B, \\ 0 & \text{при } \pi/B < \theta < \pi. \end{cases} \tag{7}$$

Соответствующий времени запаздывания τ' угол запаздывания θ' выражается следующим образом: $\theta' = \theta^* + M(\bar{r}_0/\bar{S}_0)\cos(\theta_0 - \theta^*)$, $\theta^* = \theta - M\bar{S}_0$, θ^* представляет собой угол запаздывания, соответствующий времени распространения сигнала от центра вращения источника до точки наблюдения. Этот угол характеризует не представляющий интереса постоянный сдвиг начальной фазы сигнала в точке наблюдения. Его можно не принимать во внимание и положить $\theta^* = \theta$:

$$\theta' = \theta + M(\bar{r}_0/\bar{S}_0)\cos(\theta_0 - \theta). \tag{8}$$

С учетом этого результата и необходимости замены в выражении (7) аргумента θ на θ' получим

$$\bar{\Omega}(\theta') = \frac{N_0}{2} + \sum_{q=1}^{\nu} N_q \cos[qB\theta + L\cos(\theta_0 - \theta)], \quad \text{при } \theta < \pi/B, \tag{9}$$

где $L = qBM(\bar{r}_0/\bar{S}_0)$.

Подстановка последнего соотношения в выражение (6) позволяет выполнить интегрирование, как уже отмечалось, в единственном частном случае $B = 1$, являющемся среди рассматриваемых предельным и соответствующем излучению монохроматических волн.

Анализ этого случая тем не менее представляет интерес, позволяя как вскрыть физическую природу эффектов, возникающих при вращении ис-

точника, так и оценить погрешность получаемого ниже приближенного решения.

Подставляя выражение (9) в соотношение (4), прежде всего убеждаемся в том, что при $B=1$ каждое из ν слагаемых индуцированного давления представляет собой простейшее и поэтому хорошо изученное частотно-модулированное гармоническое колебание при гармонической же модулирующей функции [4].

В связи с q-кратностью отношения частоты колебания к частоте модуляции результирующее колебание помимо основной составляющей на частоте $q\omega$ представляет собой бесконечную сумму гармоник с частотами $(q\pm d)\omega$, $d=1, 2, 3, \ldots$ Выражения для амплитуд этих гармоник содержат функции Бесселя порядка $d: J_d(L)$. Важным является то обстоятельство, что аргумент функций Бесселя L пропорционален номеру гармоники q, т. е. увеличивается с ростом частоты излучаемой источником волны.

Появление дополнительных гармонических составляющих является следствием своеобразия эффекта Допплера, возникающего при вращении источника. В отличие от эффекта Допплера при прямолинейном движении малость скорости источника в сравнении со скоростью звука не является достаточным основанием для пренебрежения этим эффектом: если велика частота излучаемой звуковой волны, $q\gg1$, искажение сигнала оказывается большим даже при медленном вращении источника. Физически это объясняется тем, что при поступательном движении источника характерным промежутком времени, в течение которого происходит обусловленный движением сдвиг фазы в точке наблюдения, является период излучаемой волны, а при вращательном движении — в q раз больший период вращения источника. Так как при этом отсутствует зависимость периодичности изменения звукового давления в точке наблюдения от параметров движения источника, то имеет место формальное отличие эффекта Допплера от случая прямолинейного движения, возникают дополнительные гармоники на кратных частотах вместо изменения частоты монохроматической волны. Отметим также, что наибольшей величины эффект Допплера достигает в плоскости вращения источника ($\bar{S}_0=\bar{r}_0$, $L=qBM$), а на оси он равен нулю ($\bar{r}_0=0$, $L=0$), так как в последнем случае расстояние от источника до точки наблюдения при вращении остается неизменным.

Выполняя непосредственное интегрирование соотношений (6), приняв в (9) $B=1$, получим:

$$a_m=-\frac{A^2z\pi}{4\bar{S}_0}\sum_{q=1}^{\nu}N_q\left\{J_{(A-q)}(L)\cos\left[(A-q)\left(\theta_0-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+J_{(A+q)}(L)\cos\left[(A+q)\left(\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}, \tag{10}$$

$$b_m=-\frac{A^2z\pi}{4\bar{S}_0}\sum_{q=1}^{\nu}N_q\left\{J_{(A-q)}(L)\sin\left[(A-q)\left(\theta_0-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+J_{(A+q)}(L)\sin\left[(A+q)\left(\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\},\quad \text{где}\quad A=mz/B.$$

Дальнейшие вычисления можно выполнить, разлагая Бесселевы функции в этих выражениях в степенные ряды. Тот же самый конечный результат можно получить и иным путем — разлагая в степенные ряды тригонометрические функции в выражении (9) и интегрируя соотношения (6) в квадратурах.

Сохранение в обоих случаях конечного числа членов рядов, имеющих порядок не выше $O(L^s)$ означает при этом априорное пренебрежение из-за малости амплитуд гармониками более высокого порядка, чем $(q\pm s)$ [4].

Важным является то обстоятельство, что использование второго способа вычислений, основанного на разложении в ряды подынтегральных выражений (6), несмотря на его полную эквивалентность (при оговоренной точности результатов) первому способу вычислений, не требует вы-

полнения условия $B=1$. Именно это обстоятельство использовано ниже для получения решения при $B>1$.

Согласно существующим оценкам, для лопастных механизмов $M<0{,}05$; $qB<10$ (с увеличением значения параметра B необходимое число членов разложения ν в выражении (7) уменьшается), следовательно, $L\leqslant 0{,}5$. Тогда, ограничиваясь в разложениях в ряды тригонометрических функций sin и cos слагаемыми $O(L^2)$, обеспечим вычисление этих функций с погрешностью не более 5%. При этом, согласно сказанному выше, сохраним дополнительные гармоники порядка $q\pm1$ и $q\pm2$, а гармониками, начиная с порядка $q\pm3$, пренебрегаем. Используя указанные разложения, для объема каверны вместо (9) получим выражение:

$$\overline{\Omega}(\theta')=\frac{N_0}{2}+\sum_{q=1}^{\nu}N_q\Big\{\cos qB\theta-L\sin qB\theta\times\cos(\theta_0-\theta)-$$
$$-\frac{L^2}{4}\cos qB\theta\,[1-\cos(2\theta_0-2\theta)]\Big\}. \qquad (11)$$

Интегрируя с его помощью соотношения (6) в квадратурах, найдем

$$a_m=-\frac{A^2Bz}{4\overline{S}_0}\Big\{N_0\frac{\sin A\pi}{A}+\sum_{q=1}^{\nu}N_q(-1)^q\Big[\Big(1-\frac{L^2}{4}\Big)\times$$
$$\times\frac{2A}{A^2-q^2}\sin A\pi-L\sin\theta_0(\chi_1-\chi_2)-\frac{L^2}{4}\cos 2\theta_0(\psi_1-\psi_2)\Big]\Big\};$$
$$b_m=\frac{A^2Bz}{4\overline{S}_0}\Big\{\sum_{q=1}^{\nu}N_q(-1)^q\Big[L\cos\theta_0(\chi_1+\chi_2)-\frac{L^2}{4}\sin 2\theta_0(\psi_1-\psi_2)\Big]\Big\}; \qquad (12)$$

где

$$\chi_1=\frac{q\sin\left(A+\frac{1}{B}\right)\pi}{\left(A+\frac{1}{B}\right)^2-q^2};\qquad \chi_2=\frac{q\sin\left(A-\frac{1}{B}\right)\pi}{\left(A-\frac{1}{B}\right)^2-q^2};$$

$$\psi_1=\frac{\left(A+\frac{2}{B}\right)\sin\left(A+\frac{2}{B}\right)\pi}{\left(A+\frac{2}{B}\right)^2-q^2};\qquad \psi_2=\frac{\left(A-\frac{2}{B}\right)\sin\left(A-\frac{2}{B}\right)\pi}{\left(A-\frac{2}{B}\right)^2-q^2}.$$

Особый интерес представляет анализ частного случая, $B\gg1$, соответствующего условию малости сектора, в котором излучает источник. Тогда последние соотношения существенно упрощаются. Принимая $\chi_1-\chi_2=0$; $\chi_1+\chi_2=2q\sin A\pi/(A^2-q^2)$; $\psi_1-\psi_2=0$; $\psi_1+\psi_2=2A\sin A\pi/(A^2-q^2)$; и полагая $\nu=1$ ($N_0=\overline{\Omega}^*$, $N_1=\overline{\Omega}^*/2$), выразим:

$$a_m=-\frac{A^2Bz\overline{\Omega}^*\sin A\pi}{4\overline{S}_0A}\Big\{1-\Big[1-\frac{L^2}{4}(1+\cos 2\theta_0)\Big]\frac{A^2}{A^2-1}\Big\};$$

$$b_m=-\frac{A^2Bz\overline{\Omega}^*L\cos\theta_0\sin A\pi}{4\overline{S}_0(A^2-1)};\qquad K_{p_m}=\frac{ABz\overline{\Omega}^*\sin A\pi}{4\overline{S}_0(A^2-1)}; \qquad (13)$$

где $\overline{\Omega}^*=\overline{\Omega}_{(\theta=0)}$ — максимальное значение объема схематизируемой источником каверны.

Как видим, в этом случае амплитуда индуцированного давления не зависит от параметра L, что соответствует допущению о несжимаемости жидкости. Физически это объясняется тем, что в рассматриваемых условиях движение источника на части траектории, соответствующей излучению, можно рассматривать как поступательное. В связи с малостью скорости этого движения, $M\ll1$, как уже отмечалось выше, искажение формы

излучаемого импульса вследствие эффекта Допплера оказывается пренебрежимо малым.

Этот пример иллюстрирует преимущество полученного приближенного решения. Для точного решения задачи, как указывалось, необходимо произвести суперпозицию элементарных решений (10) для каждой из гармонических составляющих разложения периодической последовательности импульсов в ряд Фурье. Число этих составляющих ν из-за кратковременности импульсов оказывается значительным. Следовательно, амплитуды дополнительных гармонических составляющих, возникающих вследствие эффекта Допплера, и их число s для каждой элементарной волны частоты $q\omega$ также будут большими. Лишь их взаимная компенсация у волн различной кратности, достигаемая в результате выполнения громоздких численных расчетов, позволяет получить простой результат, выражаемый формулой (13).

Таким образом, при непрерывном излучении вращающегося источника, $B=1$, не составляет затруднений использование точного решения задачи (10).

При излучении на малой части траектории кратковременного импульса, $B\gg1$, когда использование точного решения затруднительно, оно и не требуется, так как можно пренебречь эффектом Допплера и ограничиться решением, основанным на допущении о несжимаемости жидкости (13).

При продолжительности импульсов, незначительно отличающейся от периода вращения источника, $B\leqslant3$, целесообразно использовать полученное решение (12), учитывающее эффект Допплера в первом приближении. При этом следует иметь в виду, что решение в случае необходимости можно распространить на случай излучения импульсов асимметричной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миниович И. Я., Перник А. Д., Петровский В. С.* Гидродинамические источники звука. Л.: Судостроение, 1972.
2. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981.
3. *Gray L. M., Greeley D. S.* Source level model for propeller blade rate radiation for the world's merchant fleet.— J. Acoust. Soc. Amer., 1980, v. 67, № 2, p. 516—522.
4. *Харкевич А. А.* Спектры и анализ. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
18.X.1982