АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 4

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА НА КОНЕЧНОЙ РЕШЕТКЕ ИЗ ПОЛЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Вовк И. В., Кононученко Л. А., Омельченко Б. А.

Исследуется дифракция звуковой волны на системе полых упругих оболочек, образующих одномерную решетку конечных размеров. Выполнена расчетная оценка акустического поля, рассеянного такой решеткой, и проведено сравнение с экспериментом.

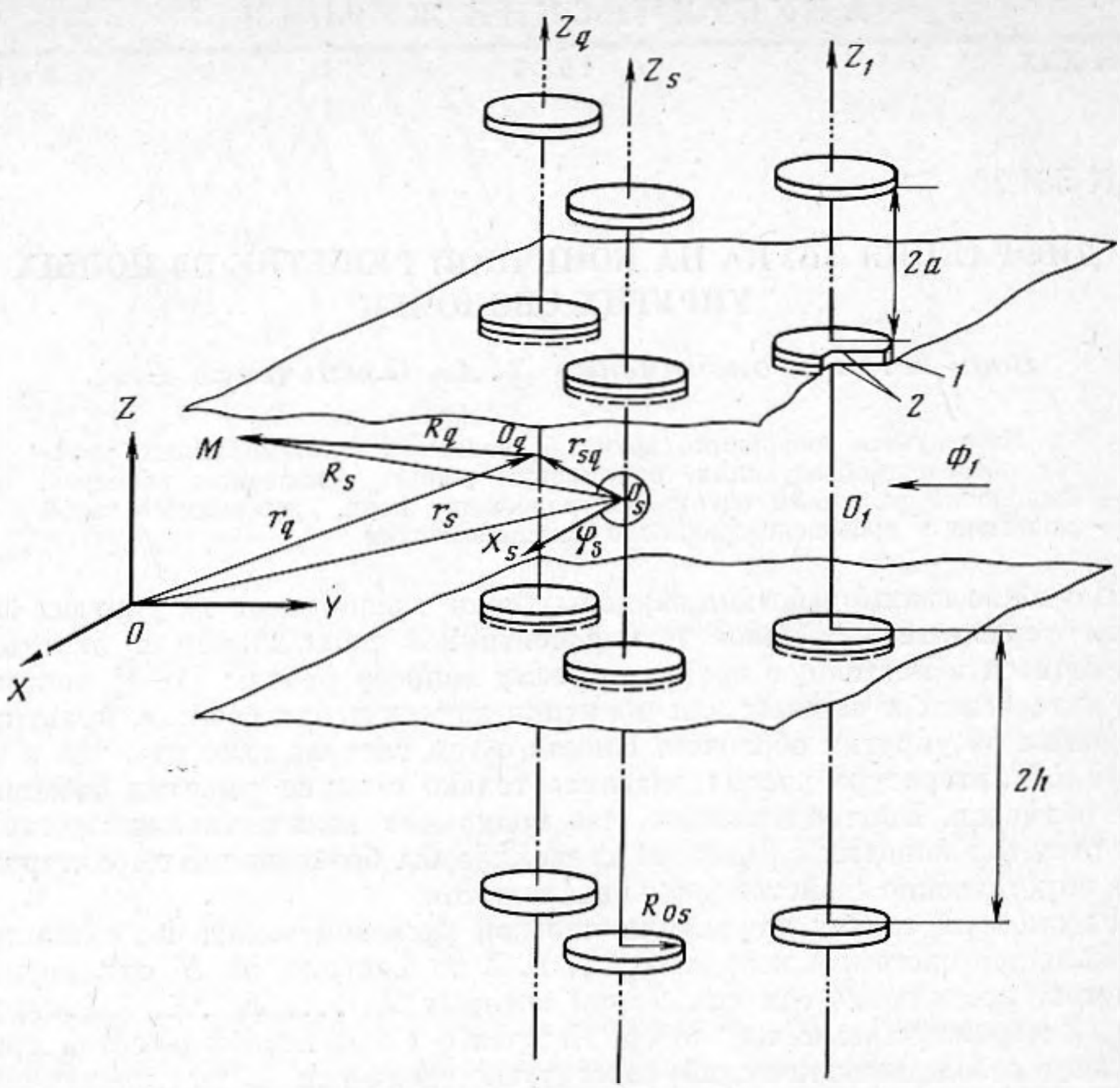
Изучение взаимодействия звуковых волн с решетками из упругих оболочек — сравнительно новое и перспективное направление в акустике. Имеющиеся в настоящее время по этому вопросу работы [1—3] вскрыли ряд интересных и важных для практики акустических свойств, присущих решеткам из упругих оболочек. Вместе с тем следует заметить, что в цитируемой литературе рассматривались только плоские решетки бесконечных размеров. Вполне очевидно, что получение количественных данных для решеток конечных размеров позволило бы более полно характеризовать акустические свойства реальных решеток.

Рассмотрим задачу дифракции плоской звуковой волны Φ_1, связанной с локальной системой координат X, Y, Z на системе из N одномерных решеток, продольные оси симметрии которых $Z_1, \ldots, Z_s, \ldots, Z_q, \ldots, Z_N$ и ось Z параллельны между собой. Каждая q-я одномерная решетка представляет собой периодический, вытянутый вдоль оси Z_q ряд идентичных оболочек. Таким образом, в отличие от исследованных в [1—3] плоских решеток, размеры которых были бесконечны в двух измерениях, рассматриваемая система решеток бесконечна только в одном измерении (вдоль оси Z), а в остальных измерениях (по осям X и Y) имеет конечные размеры. Будем полагать, что периоды всех N одномерных решеток идентичны и равны $2h$, расстояния между осями симметрии соседних решеток произвольны, а каждая оболочка образована двумя круглыми тонкими упругими пластинками, опертыми по контуру на общую кольцевую недеформируемую опору (фиг. 1). Следует заметить, что радиусы пластинок оболочек, принадлежащих разным одномерным решеткам, могут отличаться друг от друга. Начало координат каждой из осей $Z_1, \ldots, Z_s, \ldots, Z_q, \ldots, Z_N$ обозначим точками $O_1, \ldots, O_s, \ldots, O_q, \ldots, O_N$ соответственно, при этом каждая такая точка расположена на равном расстоянии от двух соседних оболочек, а все N решеток сдвинуты одна относительно другой вдоль своих продольных осей таким образом, чтобы все точки $O_1, \ldots, O_s, \ldots, O_q, \ldots, O_N$ и точка O лежали в одной плоскости, перпендикулярной осям решеток.

Ограничиваясь случаем нормального (по отношению к осям одномерных решеток) падения плоской волны и учитывая свойство симметрии решеток, исходную задачу можно заменить эквивалентной ей задачей о распространении плоской волны в бесконечном волноводе, образованном двумя параллельными акустически жесткими стенками ($Z=\pm h$), в которые вмонтированы круглые упругие пластины (фиг. 1). Тогда задача определения звукового поля в рассматриваемом волноводе сводится к совместному решению уравнения Гельмгольца и системы дифференциальных уравнений поперечных колебаний упругих пластин

$$\nabla^2\nabla^2\Phi-k^4\Phi=0, \quad \nabla^2\nabla^2 v_q-k_q^4 v_q=-\frac{\omega^2\rho_b}{D_q}\Phi, \tag{1}$$

где Φ — потенциал скорости распространяющейся волны; $k=2\pi/\lambda$ — волновое число (λ — длина волны в среде); v_q, k_q, D_q — соответственно ско-



Фиг. 1. Общий вид решетки из упругих оболочек: *1* – опора, *2* – пластины

рость изгибных колебаний, волновое число изгибных волн и цилиндрическая жесткость пластины оболочки q-й одномерной решетки; ω – круговая частота распространяющейся волны; ρ_b – плотность окружающей среды.

Представим выражение потенциала скорости падающей плоской волны в локальных цилиндрических координатах q-й одномерной решетки в виде разложения по цилиндрическим функциям [4].

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{nj}{}^n J_n(kR_q)\, e^{jn\varphi_q}, \tag{2}$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n=0; \\ 2, & n \neq 0; \end{cases} \quad J_n(kR_q) \text{ — функция Бесселя.}$$

Разобьем всю область существования звукового поля на $N+1$ подобласть следующим образом: $0 \leqslant R \leqslant R_{Oq}$; $0 \leqslant z \leqslant a$; $R \geqslant R_{Oq}$, $0 \leqslant z \leqslant h$; $1 \leqslant q \leqslant N$, где $2a$ – расстояние между пластинами оболочек. Звуковое поле в области $R \geqslant R_{Oq}$ представляет собой сумму полей, рассеянных на каждой из N одномерных решеток с учетом их взаимодействия (возникающего вследствие многократного отражения звука), и поля падающей плоской волны:

$$\Phi = \Phi_1 + \sum_{q=1}^{N} \Phi_q,$$

$$\Phi_q = \sum_m \sum_n A_{mn}{}^q Q_m(k_n R_q)\, e^{jm\varphi_q} \cos\frac{\pi n z}{h}, \tag{3}$$

$$k_n = [k^2 - (\pi n/h)^2]^{1/2};$$

$$Q_m(k_nR)=\begin{cases} H_m^{(1)}(k_nR), & k\geqslant \pi n/h, \\ K_m(k_nR), & k<\pi n/h, \end{cases}$$

$H_m^{(1)}(k_nR)$ и $K_m(k_nR)$ — функции Ханкеля и Макдональда соответственно.

Запишем выражение потенциала скорости звукового поля в q-й подобласти (область между оболочками q-й одномерной решетки) в локальных координатах этой решетки:

$$\Phi_q=\sum_m\sum_\gamma B_{m\gamma}{}^qF_m(k_\gamma R_q)\,e^{jm\varphi_q}\cos\frac{\pi\gamma z}{a}+\sum_m\sum_p C_{mp}{}^qJ_m(\nu_pR_q)\,e^{jm\varphi_q}\cos k_pz, \tag{4}$$

где $k_p=(k^2-\nu_p{}^2)^{1/2}$; $k_\gamma=[k^2-(\pi\gamma/a)^2]^{1/2}$; ν_p — корни уравнения $J_m(\nu_pR_{Oq})=0$,

$$F_m(k_\gamma R_q)=\begin{cases} J_m(k_\gamma R_q), & k\geqslant \pi\gamma/a, \\ I_m(k_\gamma R_q), & k<\pi\gamma/a, \end{cases}$$

$J_m(k_\gamma R_q)$ и $I_m(k_\gamma R_q)$ — обыкновенная и модифицированная функции Бесселя. Колебательную скорость пластин оболочки q-й одномерной решетки представим в виде ряда по собственным формам ее колебаний в вакууме. В предположении шарнирного закрепления по кромкам выражение колебательной скорости имеет вид

$$v_q=\sum_m\sum_\xi G_{m\xi}{}^q\Delta_{m\xi}{}^qe^{jm\varphi_q},$$

$$\Delta_{m\xi}{}^q=J_m(\varkappa_\xi R_q)-\frac{J_m(\varkappa_\xi R_{Oq})}{I_m(\varkappa_\xi R_{Oq})}I_m(\varkappa_\xi R_q). \tag{5}$$

Величина коэффициента $\varkappa_\xi$ зависит от способа закрепления пластины по контуру и для каждого конкретного случая табулирована [5].

Неизвестные комплексные коэффициенты A^q, B^q, C^q и G^q определяются из следующей системы функциональных зависимостей: $\Phi=\Phi_q$; $R=R_{Oq}$; $0\leqslant z\leqslant a$;

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(kR)}=\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi_q}{\partial(kR)}; & 0\leqslant z\leqslant a \\ & R=R_{Oq};\quad -\dfrac{\partial\Phi_q}{\partial z}=v_q;\ 0\leqslant R_q\leqslant R_{Oq};\ z=a; \\ 0; & a\leqslant z\leqslant h \end{cases}$$

$$\nabla^2\nabla^2v_q-k_q{}^4v_q=\frac{\omega^2\rho_b}{D_q}\Phi;\qquad 0\leqslant R_q\leqslant R_{Oq};\qquad z=a.$$

Приведенная система функциональных уравнений является исходной для проведения количественной оценки акустических свойств исследуемой решетки. Необходимо отметить, что особенностью решения рассматриваемой задачи является то, что звуковое поле, создаваемое системой одномерных решеток, представлено в различных системах координат, и функции, ортогональные на s-й решетке, становятся неортогональными на q-й. Поэтому для удовлетворения условий сопряжения на границе подобластей и возникает необходимость в представлении волн, дифрагированных на всех решетках, в системе координат q-й одномерной решетки с центром в точке O_q [6].

Математическую операцию переноса начала отсчета в точку O_q можно осуществить при помощи известной теоремы сложения для цилиндрических функций [6]

$$Q_\alpha(k_\eta R_s)\,e^{j\alpha(\varphi_s-\varphi_{sq})}=\sum_\beta J_\beta(k_\eta R_q)\,Q_{\alpha-\beta}(k_\eta r_{sq})\,e^{j\beta(\pi-\varphi_q+\varphi_{sq})}, \tag{6}$$

где r_{sq} — расстояние между точками s и q; φ_{sq} — угол между вектором r_{sq} и осью x. Отсюда в локальных координатах q-й решетки звуковое

поле в области $R \geqslant R_{Oq}$ записывается в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \sum_m \sum_n A_{mn}{}^q Q_m(k_n R_q) e^{jm\varphi_q} \cos \frac{\pi n z}{h} +$$

$$+ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq q}}^{N} \sum_{\alpha} \sum_{\eta} \sum_{\rho} A_{\alpha\beta}{}^s J_\beta(k_\eta R_q) Q_{\alpha-\beta}(k_\eta r_{sq}) e^{j\beta(\pi-\varphi_q)} e^{j(\alpha+\beta)\varphi_{sq}} \cos \frac{\pi n z}{h}. \quad (7)$$

Выражение (7) позволяет выполнить алгебраизацию функциональных уравнений (6) на основе свойств полноты и ортогональности функций $e^{jm\varphi_q}$ и $\cos \pi n z/h$ и получить следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных комплексных коэффициентов:

$$\sum_n A_{mn}{}^q Q_m(k_n R_{Oq}) N_{n\gamma} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq q}}^{N} \sum_{\alpha} \sum_{n} A_{\alpha n}{}^s J_m \times$$

$$\times (k_m R_{Oq}) Q_{\alpha-m}(k_n r_{sq}) e^{j(\alpha+m)\varphi_{sq}} N_{n\gamma} - B_{m\gamma}{}^q F_m(k_\gamma R_{Oq}) N_{\gamma\gamma} = -\delta_{mn} J_0(kR_{Oq}),$$

$$A_{mn}{}^q k_n Q_m{}'(k_n R_{Oq}) N_{nn} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq q}}^{N} \sum_{\alpha} A_{\alpha n}{}^s J_m(k_n R_{Oq}) Q_{\alpha-m}(k_n r_{sq}) e^{j(\alpha+m)\varphi_{sq}} N_{nn} -$$

$$- \sum_{\gamma} k_\gamma F_m{}'(k_\gamma R_{Oq}) N_{n\gamma} - \sum_{p} C_{mp}{}^q J_m{}'(\nu_p R_{Oq}) N_{np} = -\delta_{mn}{}' k J_0{}'(kR_{Oq}); \quad (8)$$

$$C_{mp}{}^q k_p \sin k_p a N_{pp} + \sum_{\xi} G_{m\xi}{}^q N_{p\xi} = 0;$$

$$(\rho_b/\rho_q t_q) \left[\sum_{\gamma} B_{m\gamma}{}^q (-1)^\gamma N_{\xi\gamma} + \sum_{p} C_{mp}{}^q \cos k_p a N_{\xi p} \right] + Z_\xi{}^q G_{m\xi}{}^q N_{\xi\xi} = 0.$$

Здесь $Z_\xi{}^q = (\omega_\xi{}^q/\omega)^2 - 1$; $\omega_\xi{}^q = \varkappa_{\xi q}{}^2 \sqrt{D_q/\rho_q t_q}$; ρ_q и t_q — плотность материала пластины и ее толщина в q-й решетке;

$$N_{nn} = \int_0^h \cos^2 \frac{\pi n z}{h} dz, \qquad N_{n\gamma} = \int_0^a \cos \frac{\pi n z}{h} \cos \frac{\pi \gamma z}{a} dz,$$

$$N_{\gamma\gamma} = \int_0^a \cos^2 \frac{\pi \gamma z}{a} dz, \qquad N_{p\gamma} = \int_0^a \cos k_p z \cos \frac{\pi \gamma z}{a} dz,$$

$$N_{pp} = \int_0^{R_{Oq}} J_m{}^2(\nu_p R_q) R_q \, dR_q, \qquad N_{p\xi} = \int_0^{R_{Oq}} F_m(k_\gamma R_q) \Delta_{m\xi}{}^q R_q \, dR_q,$$

$$N_{\xi\xi} = \int_0^{R_{Oq}} (\Delta_{m\xi}{}^q)^2 R_q \, dR_q, \qquad N_{\xi\gamma} = \int_0^{R_{Oq}} F_m(k_\gamma R_q) \Delta_{m\xi}{}^q R_q \, dR_q,$$

$$\delta_{mn} = \int_0^{2\pi} e^{-jm\varphi_q} d\varphi_q \int_0^a \cos \frac{\pi n z}{h} dz,$$

$$\delta_{mn}{}' = \int_0^{2\pi} e^{-jm\varphi_q} d\varphi_q \int_0^h \cos \frac{\pi n z}{h} dz.$$

Обратим внимание на одно существенное обстоятельство. В работах [1, 3] при изучении акустических свойств плоских периодических реше-

ток бесконечных размеров в качестве критерия оценки их звукопрозрачности был выбран коэффициент прохождения звука. В нашем случае таким критерием пользоваться уже нельзя, поскольку звуковое поле за решеткой конечных размеров будет определяться не только прошедшими через нее волнами, но и волнами, обогнувшими ее. В связи с этим изучение акустических свойств рассматриваемой решетки будем вести на основе анализа рассеиваемого ею звукового поля.

Рассмотрим сначала самый простой случай, когда имеется лишь одна одномерная решетка, т. е. $N=1$. При этом система уравнений (8), естественно, упростится. Если ограничиться рассмотрением только длинноволнового приближения, когда $2R_{01}/\lambda \ll 1$, $(h-a)/R_{01} \ll 1$ и $a \to h$, то в исходной системе уравнений (8) допустимо удержать только первые члены. Тогда значение коэффициента A_{00}, определяющего амплитуду рассеянной волны, можно получить в явном виде как функцию физических и геометрических характеристик одномерной решетки и оболочек, входящих в ее состав.

Опуская промежуточные выкладки, имеем

$$A_{00} \approx \left[-1 + j\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{2}{1{,}78kR_{01}} + \tilde{Z}\right)\right]^{-1}, \tag{9}$$

где

$$\tilde{Z} = \frac{2a}{1{,}64R_{01}}\left(-Z_1\frac{2{,}4\rho_{пл}t_{пл}}{\rho_b R_{01}} + \operatorname{cth} 2{,}4\frac{a}{R_{01}}\right).$$

Величину $\tilde{Z}$ можно трактовать как импеданс нагруженной на окружающую среду круглой пластины в решетке.

Сравним полученное выражение (9) с известным выражением, определяющим амплитуду рассеянной волны от бесконечно длинного акустически мягкого сплошного цилиндра радиуса $R \ll \lambda$ [6]:

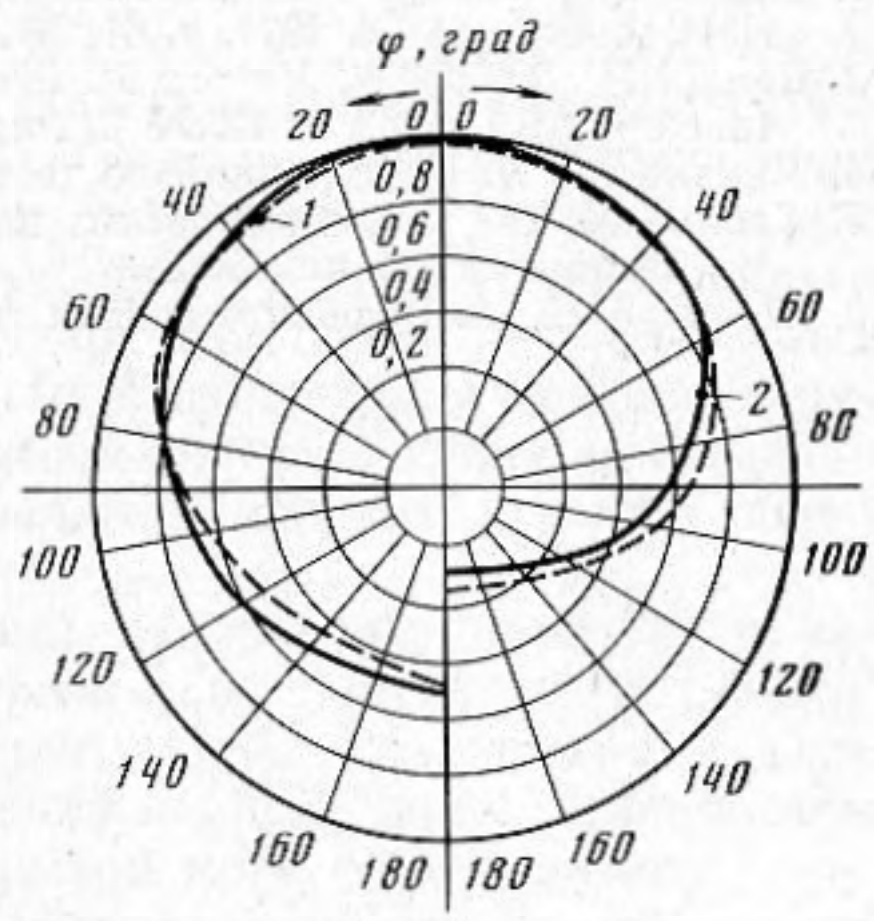
$$A_0^{\bullet} = \left[-1 + j\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{1{,}78kR}\right]^{-1}. \tag{10}$$

Легко заметить, что выражения (9) и (10) отличаются один от другого наличием в знаменателе величины $\tilde{Z}$. Этот факт позволяет сделать вывод, что на частоте резонанса системы упругая пластина — окружающая среда (при $\tilde{Z}=0$) амплитуда рассеянной волны от исследуемой одномерной решетки равна амплитуде рассеянной волны от равновеликого по диаметру акустически мягкого цилиндра.

Определим из условия $\tilde{Z}=0$ частоту резонанса системы упругая пластина — окружающая среда:

$$\omega_p = \omega\left[1 + \frac{\rho_b R_{01}}{2{,}4\rho_{пл}t_{пл}}\operatorname{ctg} 2{,}4\frac{a}{R_{01}}\right]^{-1/2}, \tag{11}$$

где ω — текущая частота.



Фиг. 2. Угловое распределение нормированной к максимуму амплитуды звукового поля, создаваемого из-за рассеяния плоской волны на конечной решетке: *1* — для случая $N=1$; *2* — для $N=2$; пунктир — результаты эксперимента

Из анализа выражения (11) непосредственно следует, что $\omega_p \to 0$ при $a \to 0$, т. е. при уменьшении шага одномерной решетки резонансная частота системы упругая пластина — окружающая среда снижается. Физическая сущность этого явления заключается в следующем. При относительно малом шаге решетки, когда $a \ll R_{01}$, даже небольшие колебания пластин вдоль оси Z вызывают значительные радиальные колебания среды между пластинами. Иными словами, происходит трансформация осевых колебаний пластин в радиальные колебания жидкости. При этом очевидно, что чем меньше отношение a/R_{01}, тем значительнее трансформация указанных скоростей. (Заметим, что подобного рода явления известны в

акустике, а устройства, где такие явления наблюдаются, носят название акустических трансформаторов [4]).

Таким образом, с уменьшением отношения a/R_{01} растет эффективная масса среды, соколеблющаяся с пластинами, что в конечном итоге и приводит к снижению резонанса системы. Перейдем к анализу акустических свойств рассматриваемой системы, не налагая ограничений на ее волновые размеры. Звуковое поле вблизи исследуемой решетки определялось по разработанной выше расчетной схеме для случаев $N=1$ и 2. Для случая $N=2$ плоскость, содержащая оси решеток, перпендикулярна направлению падения волны.

На фиг. 2 приведено нормированное к максимуму расчетное значение диаграммы полного звукового поля для $N=1$ и 2 на частоте резонанса пластины в воде при следующих геометрических и физических характеристиках решетки: $2a=4{,}4$ см, $2h=2R_{01}=5$ см; $t_{пл}=0{,}2$ см; $\rho_{пл}=4{,}5$ г/см^3; $E_{пл}=1{,}16\cdot10^6$ кг/см^2; $R_{01}/\lambda_p=0{,}0117$; $\lambda_p=2\pi C_в/\omega_p$; $C_в$ – скорость звука в воде. Представленные на фиг. 2 данные позволяют сделать вывод, что, несмотря на малый общий волновой размер одномерных решеток зона акустической тени за решеткой достаточно глубока. Для проверки эффективности выбранной расчетной схемы были изготовлены и испытаны два макета решеток, по всем параметрам соответствующие расчетной модели. Из фиг. 2 видно, что сравнение результатов теоретических и экспериментальных исследований показывает удовлетворительное совпадение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вовк И. В., Гринченко В. Т., Кононученко Л. А.* Дифракция звуковой волны на плоской решетке, состоящей из полых упругих брусьев.– Акуст. журн., 1976, т. 22, № 2, с. 201–205.
2. *Brigham A.* Analysis of scattering from large planer gratings of compliant cylindrical shells.– JASA, 1977, v. 61, № 1, January.
3. *Ronald P., Radlinski, Murray M. Simon.* Scattering by multiple gratings of compliant tubes.– JASA, 1982, v. 72, № 2, August.
4. *Ржевкин С. Н.* Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ, 1960.
5. *Хронин Д. В.* Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1970.
6. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972.

Поступила в редакцию
14.II.1983