АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 4

УДК 534.221.1

О ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО НИЗКОЧАСТОТНОГО ИСТОЧНИКА ЗВУКА В АТМОСФЕРЕ С НЕОДНОРОДНЫМ ПО ВЫСОТЕ ВЕТРОМ

Чунчузов И. П.

Работа посвящена теоретическому исследованию распространения звука в приземном слое атмосферы в присутствии неоднородного ветра. Найдено пространственное распределение амплитуды и фазы волнового поля в дальней зоне точечного излучателя.

Проблема распространения инфразвука в движущейся стратифицированной атмосфере существует достаточно давно, но особенно интенсивно она стала изучаться в конце 50-х — начале 60-х годов в связи с необходимостью анализа и приема инфразвука от источников искусственного и естественного происхождения (см. монографию [1] и приведенный в ней обзор литературы).

Помимо численных методов расчета звукового поля в многослойных моделях неоднородной атмосферы к настоящему времени развиты и аналитические методы решения для моделей атмосферы, аппроксимируемых непрерывными функциями. Это прежде всего метод ВКБ, метод малых возмущений и др. Однако теоретический расчет параметров инфразвуковых волн (амплитуды, фазы, направления распространения и др.) от различных источников в атмосфере с неоднородным по высоте ветром часто затруднен из-за того, что характерный масштаб изменения скорости ветра с высотой бывает сравним с длиной волны инфразвука. Этот случай не охватывается методом ВКБ, который справедлив только для коротких волн. Малоэффективным оказывается и метод возмущений по малому параметру отношения скорости ветра к скорости звука $\beta_0=V_0/c_0$, так как он приводит к сильным ограничениям на дальность: для сходимости ряда возмущений необходимо по крайней мере выполнение условия: $\beta_0 k_0 \rho \ll 1$ (где k_0 — волновое число, ρ — горизонтальное расстояние от источника до точки наблюдения).

В данной работе были сделаны попытки найти точное решение задачи о точечном источнике звука в атмосфере с неоднородным ветром, причем так, чтобы выбранная модель ветра более или менее хорошо отражала поведение реального профиля приземного ветра. Таким же способом решались похожие частные задачи при наличии температурной стратификации [1—3]. Присутствие ветра усложняет задачу, так как вносит в нее анизотропию.

Будем считать, что точечный гармонический источник звука находится вблизи поверхности земли, а скорость приземного ветра V_x ($V_y=V_z=0$) меняется от нуля на поверхности до некоторого постоянного значения V_0 на больших высотах. Характерный масштаб h изменения приземного ветра с высотой, составляющий обычно несколько десятков метров, гораздо меньше масштабов изменения средней температуры и плотности. Поэтому будем считать температуру и плотность постоянными (хотя это допущение не во всех случаях оправдано).

Уравнение, описывающее пространственное распределение амплитуды ψ_0 акустического поля $\psi(\mathbf{r}, t)=\psi_0(\mathbf{r})\exp(i\omega t)$ в неоднородно движущейся среде, имеет вид [4, 5]

$$\Delta\psi_0+k_0^2\psi_0-i\left[2k_0\beta(z)+\frac{1}{k_0}\beta''\right]\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=4\pi\delta(z-z_1)\delta(\rho). \qquad (1)$$

Здесь ψ — так называемый квазипотенциал, позволяющий определить давление p и колебательную скорость частиц $\mathbf{v}$ в волне:

$$p=\rho_0\, d\psi/dt, \qquad \mathbf{v}=-\nabla\psi+\int [\mathrm{rot}\, V\times\nabla\psi]dt, \tag{2}$$

где z_1 — высота источника над поверхностью, $\boldsymbol{\rho}=\{x,\ y\}$ и z — соответственно горизонтальные и вертикальные координаты точки наблюдения, $\beta(z)=V_x(z)/c_0$. Уравнение (1) приближенное и справедливо при $\beta\ll 1$ и $k_0h\gg\beta$. Здесь отброшены квадратичные по β члены. Ясно, что они дадут существенные поправки к фазе искомого решения на расстояниях $k_0x\gtrsim 2\pi/\beta_0^2$, поэтому решение (1) будет справедливым по крайней мере до расстояний

$$k_0x\ll 2\pi/\beta_0^2. \tag{3}$$

Если β_0 принять равным $3\cdot 10^{-2}$, то условие (3) дает $x\ll 10^3\lambda$ (где λ — длина волны). Для $\lambda\sim h=30$ м получаем, что $x\ll 3\cdot 10^4$ м.

Далее будем считать поверхность земли твердой, так что граничное условие потребует обращения в нуль вертикальной компоненты скорости на поверхности $z=0$

$$v_z|_{z=0}=-\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{i}{k_0}\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{z=0}=0. \tag{4}$$

Совершим замену $\psi_0=\varphi\exp(ik_0\beta_0x)$ и фурье-преобразование

$$\varphi(z,\boldsymbol{\rho})=\int\tilde{\varphi}(z,\xi)\exp(-i\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\rho})\,d\boldsymbol{\xi}. \tag{5}$$

Такое разложение поля сферической волны по плоским волнам с различными горизонтальными волновыми числами ξ упрощает решение краевой задачи (1)—(3), так как сводит ее к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\tilde{\varphi}''+[k_0^2-\xi^2-\xi_xR(r)]\tilde{\varphi}=(1/\pi)\delta(z-z_1),\ \hat{L}\tilde{\varphi}|_{z=0}=0, \tag{6}$$

где оператор

$$\hat{L}=-\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\xi_x}{k_0}\beta'(0), \qquad R(z)=2k_0(\beta-\beta_0)+\beta''/k_0.$$

Будем в дальнейшем считать профиль ветра экспоненциальным: $\beta(z)=\beta_0[1-\exp(-z/h)]$, а источник — находящимся на поверхности земли: $z_1=0$. В этом случае поставленная нами краевая задача сводится к решению однородного дифференциального уравнения (6), но с неоднородным граничным условием $\hat{L}\tilde{\varphi}|_{z=0}=\mathrm{const}=1/2\pi$ (последнее есть следствие условия $v_z|_{z=0}=2\pi\delta(\rho)$). Здесь константа 2π выбрана из условия, что при $\beta_0\to 0$ решение (6) должно переходить в сферическую волну (см. ниже).

Для выбранного профиля можно найти точное решение уравнения (6) (см. [6]), которое удовлетворяет одновременно граничному условию на поверхности $z=0$ и ограничено при $z\to\infty$

$$\tilde{\varphi}(z,\ \xi)=J_\nu(te^{-z/2h})/2\pi(\hat{L}J_\nu)_{z=0}. \tag{7}$$

Здесь $J_\nu(t)$ — функция Бесселя, аргумент которой $t=2h(\beta_0U_0k_0\xi_x)^{1/2}$, где $U_0=2+1/k_0^2h^2$ и порядок $\nu=2h(\xi^2-k_0^2)^{1/2}$ зависят от переменной ξ, $(\hat{L}J_\nu)_{z=0}=1/2h(tJ_\nu'(t)+t^2J_\nu(t)/2U_0k_0^2h^2)$.

Решение исходной задачи (1)—(3) можно получить, применив к выражению (7) фурье-преобразование (5) в цилиндрических координатах ξ, φ:

$$\psi_0(z,\rho,\varphi)=\int_0^\infty\xi\,d\xi\int_{-\pi/2}^{3/2\pi}d\varphi_1\,\tilde{\varphi}(\xi,z,\varphi_1)\exp[-i\xi\rho\cos(\varphi_1-\varphi)+ik_0\beta_0x]. \tag{8}$$

Представим интеграл по азимуту φ_1 в виде суммы двух контурных интегралов I_1 и I_2 в комплексной плоскости переменной $\varphi_1=\varphi_1'+i\varphi_1''$. Первый интеграл берется по контуру Г, состоящему из отрезков мнимой

оси ($\varphi_1'=-\pi/2$, $-\infty<\varphi_2''<0$), ($\varphi_1'=\pi/2$, $0<\varphi_2''<\infty$) и действительной оси ($-\pi/2<\varphi_1'<\pi/2$), а второй — по контуру Γ_1, состоящему из отрезков ($\varphi_1'=\pi/2$, $0<\varphi_2''<\infty$), ($\pi/2<\varphi_1'<3\pi/2$, $\varphi_2''=0$), ($\varphi_1'=3\pi/2$, $-\infty<\varphi_2''<0$). Обход по контуру Γ происходит в направлении изменения φ_2'' от $-\infty$ до ∞, а по контуру Γ_1 — в противоположном направлении. Каждый из этих интегралов может быть вычислен в волновой зоне $k_0\rho\gg1$ методом перевала после деформации контуров Γ и Γ_1 в соответствующие перевальные пути [2]. В результате получим:

$$\varphi(z,\rho)=\int\limits_0^\infty d\xi\,\xi(I_1+I_2),\ \text{причем}$$

$$I_1(\xi)={}^1/_2\pi\frac{J_\nu[2h(\beta_0U_0k_0\xi\cos\varphi)^{1/2}\exp(-z/2h)]}{\hat{L}J_\nu(2h(\beta_0U_0k_0\xi\cos\varphi)^{1/2})}\left(\frac{2\pi}{\xi\rho}\right)^{1/2}\exp[-i(\xi\rho-\pi/4)]=$$
$$=-I_2[\xi\exp(i\pi)]. \tag{9}$$

Окончательно решение представим в виде следующего интеграла по действительной оси:

$$\psi_0=e^{ik_0\beta_0x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\,\xi\left(\frac{2\pi}{\xi\rho}\right)^{1/2}e^{-i(\xi\rho-\pi/4)}\frac{J_\nu(te^{-z/2h})}{2\pi(\hat{L}J_\nu)_0}. \tag{10}$$

Последний можно разбить на сумму двух интегралов в комплексной плоскости переменной $\xi=\xi'+i\xi''$: первый — интеграл по контуру полуокружности бесконечного радиуса в нижней полуплоскости, второй — по берегам разреза вокруг точки ветвления $\xi=k_0$

$$\psi_0=\psi_{\text{волн}}+\psi_{\text{бок}}. \tag{11}$$

Первое слагаемое описывает так называемое волноводное решение, т. е. ту часть поля первоначально сферической волны, которая попадает в ветровой волновод. Волноводное решение образует дискретный спектр поля; его можно представить в виде суперпозиции нормальных волн, которые соответствуют вычетам в полюсах ξ_n подынтегрального выражения (10)

$$\psi_{\text{волн}}=+ie^{ik_0\beta_0x}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z,\rho,\varphi)e^{-i(\xi_n\rho-\pi/4)}, \tag{12}$$

где

$$A_n=\left(\frac{2\pi}{\xi_n\rho}\right)^{1/2}\left(\frac{\nu_n}{2ht_n}\right)\frac{J_{\nu_n}(t_ne^{-z/2h})}{\left(\dfrac{\partial^2J_\nu}{\partial t\,\partial\nu}\right)_{\xi=\xi_n}}.$$

Полюса ξ_n являются корнями уравнения

$$(\hat{L}J_\nu)_0\simeq\frac{t}{2h}J_\nu'(t)=0. \tag{13}$$

Вторым членом в выражении для $(\hat{L}J_\nu)_0$ в формуле (13) пренебрегаем, так как при $|t|\gg|\nu|$ или, что то же самое, при $(\xi^2-k_0^2)^{1/2}/k_0\ll(\beta_0U_0\cos\varphi)^{1/2}$ его отношение к первому члену $|t/2hJ_\nu'|={}^1/_2h|\nu J_\nu-tJ_{\nu+1}|\simeq|tJ_{\nu+1}/2h|$ составляет величину $\sim\beta\ /k_0h$, которую считаем малой.

Можно убедиться, взяв асимптотики функции Бесселя [7] при $|\nu|\gg|t|$, что (13) не имеет корней при $|\xi|\ll k_0$ и при $|\xi|\gg k_0$, так что все корни ξ_n лежат в окрестности точки $\xi=k_0$, где можно положить $t\simeq\tilde{t}\equiv\equiv2(\beta_0U_0\cos\varphi)^{1/2}k_0h$.

Значения корней уравнения (13) существенно зависят от величины параметра $|\tilde{t}|$ (его часто называют «шириной волновода») и в общем случае могут быть найдены из таблиц [7].

Приближенные значения корней (13) можно найти при больших и малых значениях $\tilde{t}$, при этом считая, что $\cos\varphi\neq0$.

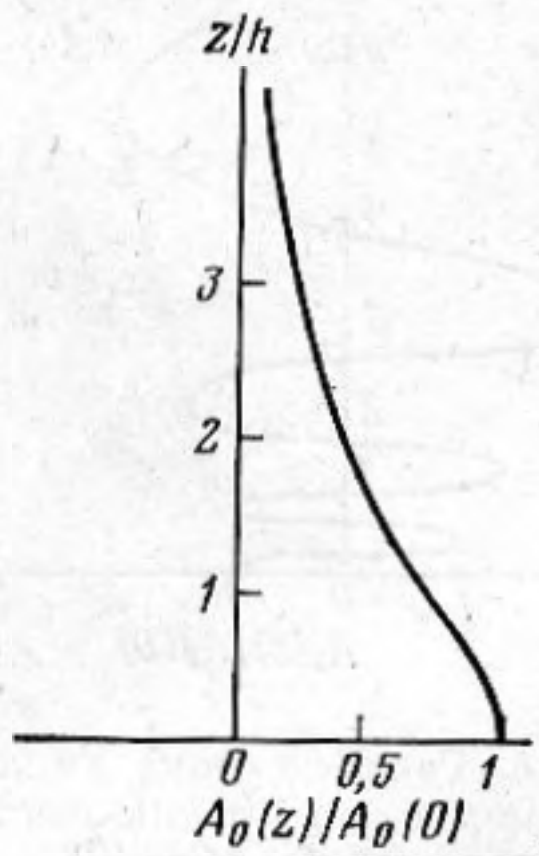
При $|\tilde{t}|\ll 1$, разложив левую часть уравнения $(\hat{L}J_\nu)_0=0$ до квадратичных относительно t членов, получим уравнение $t^2\simeq 2\nu+4\beta_0\cos\varphi$. Единственный корень последнего, удовлетворяющий условию $\operatorname{Re}\xi>0$, равен $k_0(1+2\beta_0 k_0^2 h^2\cos\varphi)$.

Соответствующее вычету в точке ξ_0 волноводное решение является нулевой нормальной волной

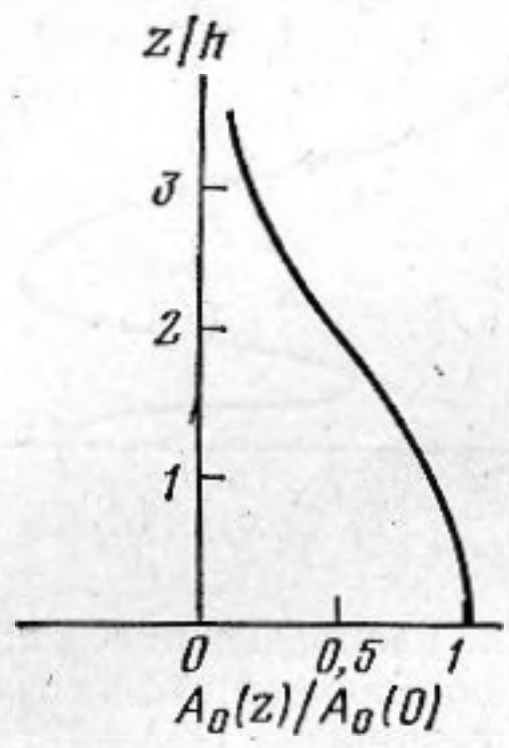
$$A_0(z,\rho)=\frac{i\nu_0}{2h}\left(\frac{2\pi}{\xi_0\rho}\right)^{1/2}e^{-\frac{\nu_0 z}{2h}}, \tag{14}$$

где $\nu_0=4\beta_0 k_0^2 h^2\cos\varphi$ $(\cos\varphi>0)$.

При большой «ширине волновода» $|\tilde{t}|\gg 1$ можно приближенно найти волновые числа ξ_n нормальных волн более высокого порядка $\xi_n=[k_0^2+(\nu_n/2h)^2]^{1/2}$, где $\nu_n\simeq\frac{2}{\pi}\left[\tilde{t}-\frac{\pi}{4}-\pi n\right]$, $|n|>1$.



Фиг. 1. Распределение амплитуды нормальной волны нулевого порядка по высоте при малой «ширине» волновода $k_0h=1$



Фиг. 2. Распределение амплитуды нормальной волны при $k_0h=2\pi$

Каждая нормальная волна порядка n распространяется в рассматриваемом ветровом волноводе при частотах $\omega=c_0k_0$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\nu_n>0$. Частота

$$\omega_n=\frac{c_0}{2h}\frac{\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)}{(\beta_0U_0\cos\varphi)^{1/2}},\qquad(\cos\varphi>0),$$

при которой $\operatorname{Re}\nu_n=0$, является критической: она «запирает» волновод. При $\omega<\omega_n$ появляется нормальная волна $n-1$ порядка и т. д.

Таким образом, по направлению ветра $(\cos\varphi>0)$ каждая нормальная волна убывает с расстоянием как цилиндрическая, а распределение ее амплитуды по высоте z носит осцилляционный характер, т. е. представляет стоячую волну с полупериодом, меняющимся в зависимости от z и направления φ.

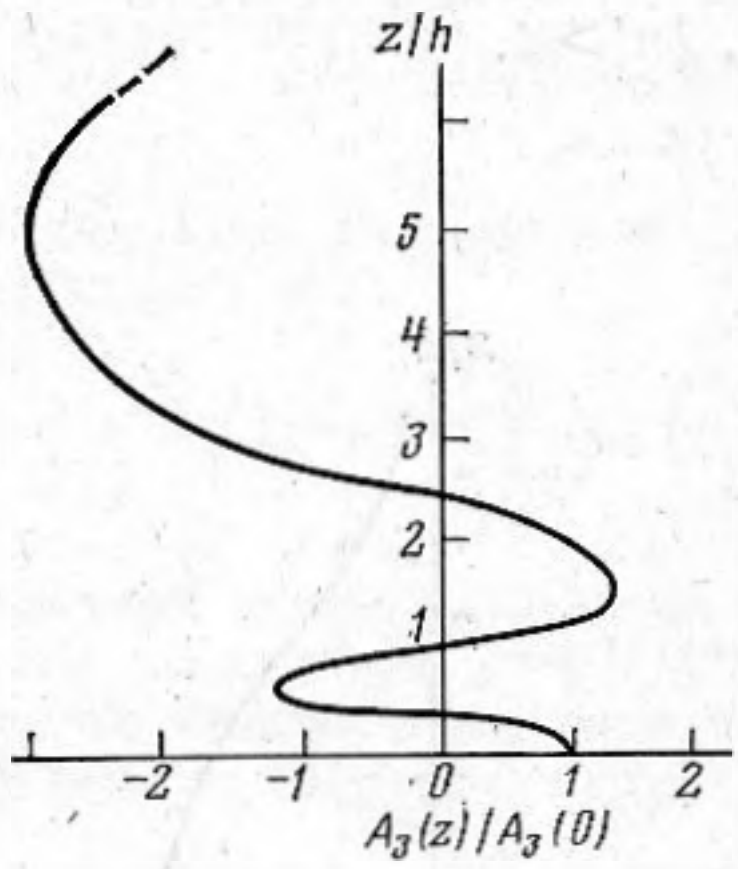
В направлении, противоположном ветру $\cos\varphi<0$, наоборот, имеет место «антиволноводное» распространение, при котором звук «сносится» ветром вверх от поверхности земли. В этом случае корни ξ_n и значения ν_n становятся комплексными, а аргумент функции Бесселя — мнимым. Физически это означает, что амплитуда каждой «антиволноводной моды» убывает монотонно по высоте z, а с расстоянием ρ ослабляется ветром как $e^{-\alpha_n\rho}/(\xi_n\rho)^{1/2}$, где $\alpha_n=-\operatorname{Im}\xi_n=\frac{2}{\pi h}(n+3/4)(-\beta_0U_0\cos\varphi)^{1/2}$.

На фиг. 1 и 2 изображены распределения амплитуд нулевой моды. На фиг. 3 и 4 изображены также амплитуды нормальных волн соответственно третьего и шестого порядков.

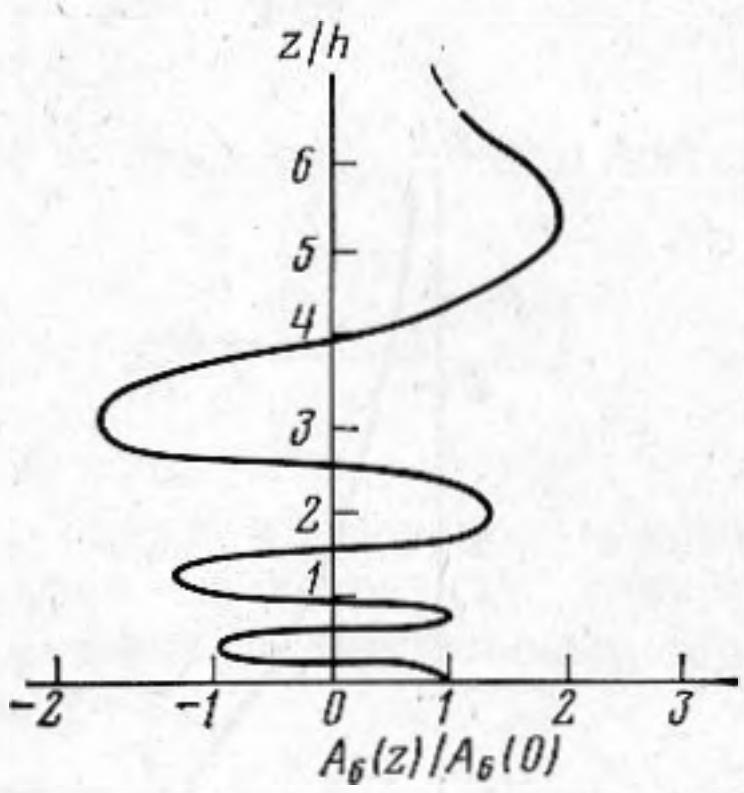
В направлениях, перпендикулярных ветру ($\cos\varphi\to 0$), в подынтегральном выражении (10) можно разложить функцию Бесселя $J_\nu(t)\simeq(t/2)^\nu\times$ $\times 1/\Gamma(\nu+1)$ и фурье-образ $\tilde\Phi(\xi,z)=J_\nu(te^{-z/2h})/(\hat L J_\nu)_0\simeq-\dfrac{i}{k}e^{-ikz}$, где $ik=$ $=\nu/2h=i(k_0^2-\xi^2)^{1/2}$. Поле ω_0 в этих направлениях убывает как сферическая волна в однородной среде

$$\psi_0\simeq(e^{-ik_0(\rho^2+z^2)^{1/2}})/(\rho^2+z^2)^{1/2}. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в выражении (11). Оно соответствует так называемой боковой волне (см. [2, 3]), т. е. описывает то поле, которое не попадает в волновод, но частично проникает в него.



Фиг. 3. Распределение амплитуды нормальной волны третьего порядка ($k_0h=22$)



Фиг. 4. Распределение амплитуды нормальной волны шестого порядка ($k_0h=40$)

Это решение можно получить, взяв интеграл (8) по берегам разреза, проведенного из точки ветвления $\xi=k_0$:

$$\psi_{\text{бок}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{k_0}^{k_0-i\infty}d\xi\xi\left(\frac{2\pi}{\xi\rho}\right)^{1/2}e^{-i(\xi\rho-\pi/4)}\left[\frac{J_\nu(te^{-\frac{z}{2h}})}{(\hat LJ_\nu)_0}-\frac{J_{-\nu}(te^{-\frac{z}{2h}})}{(\hat LJ_{-\nu})_0}\right]. \tag{16}$$

Интегрирование выражения (16) методом наискорейшего спуска в окрестности точки $\xi=k_0$ приводит к следующему выражению для поля боковой волны вблизи поверхности земли ($z\ll 2h$):

$$\psi_{\text{бок}}\simeq\frac{4i\sqrt{\pi}}{h(\beta_0U_0\cos\varphi)^{1/2}}e^{\frac{z}{4h}}\cos[\tilde t(1-e^{-\frac{z}{2h}})]\frac{e^{-ik_0(\rho-\beta_0x)}}{\left(\frac{\rho}{h}\right)^2}I_0, \tag{17}$$

где

$$I_0=i\left(\frac{\rho}{h}\right)\frac{1}{2\pi^2k_0h}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\sqrt{\alpha}\,e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\alpha}\frac{\pi}{2}[1-\Phi(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha})]\right\}, \tag{18}$$

$\alpha=\dfrac{1}{2\pi^2}\dfrac{\rho}{k_0h^2}\sin^2\left(\tilde t-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\Phi(x)$ – функция ошибок.

Если частота источника не совпадает с критической, то в зоне Фраунгофера $\rho\gg k_0h^2$:

$$I_0\simeq\sqrt{\pi/4}\sin^2(\tilde t-\pi/4); \tag{19}$$

следовательно, амплитуда боковой волны убывает с расстоянием как $1/\rho^2$.

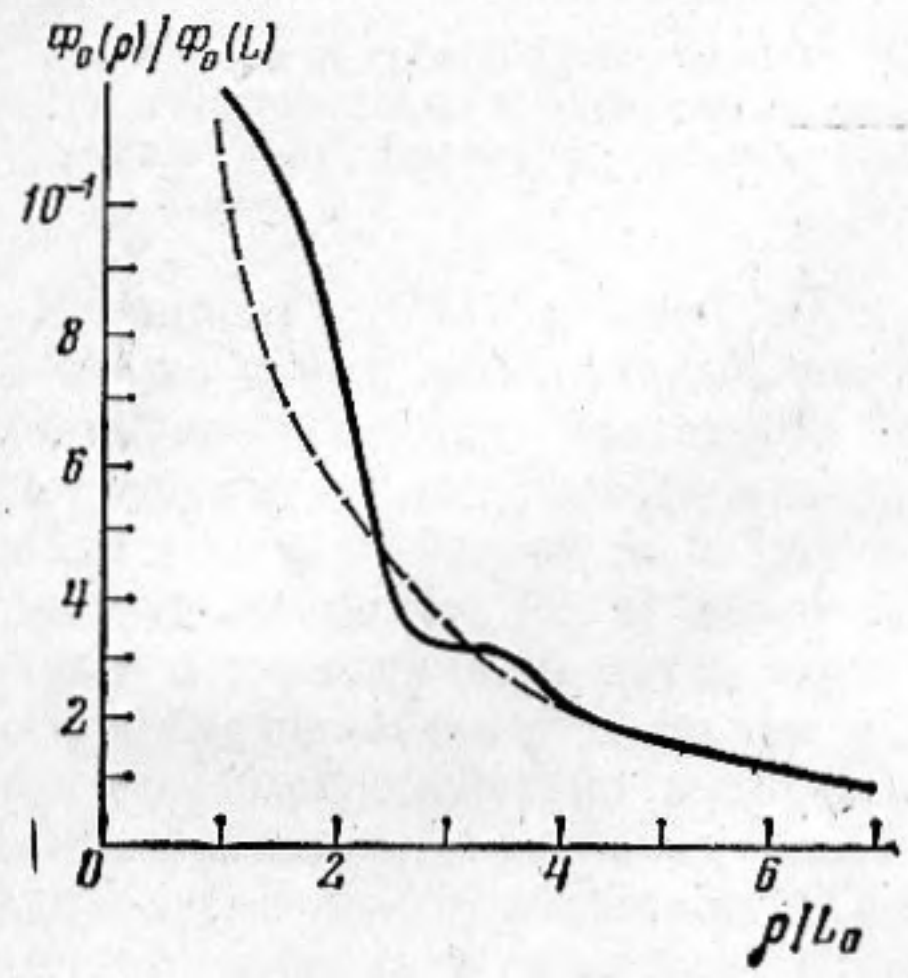
При частотах, совпадающих с критическими, для которых $\sin(t-\pi/4)=$ $=0$: $I_0\simeq i\rho/4\pi^{3/2}k_0h^2$. В этом случае соответствующая нормальная волна исчезает, но амплитуда боковой волны убывает как $1/\rho$.

В любом случае амплитуда боковой волны убывает с расстоянием гораздо быстрее, чем нормальная волна. Расстояние на поверхности земли, начиная с которого амплитуда боковой волны становится меньше амплитуды нормальной волны, находится из условия

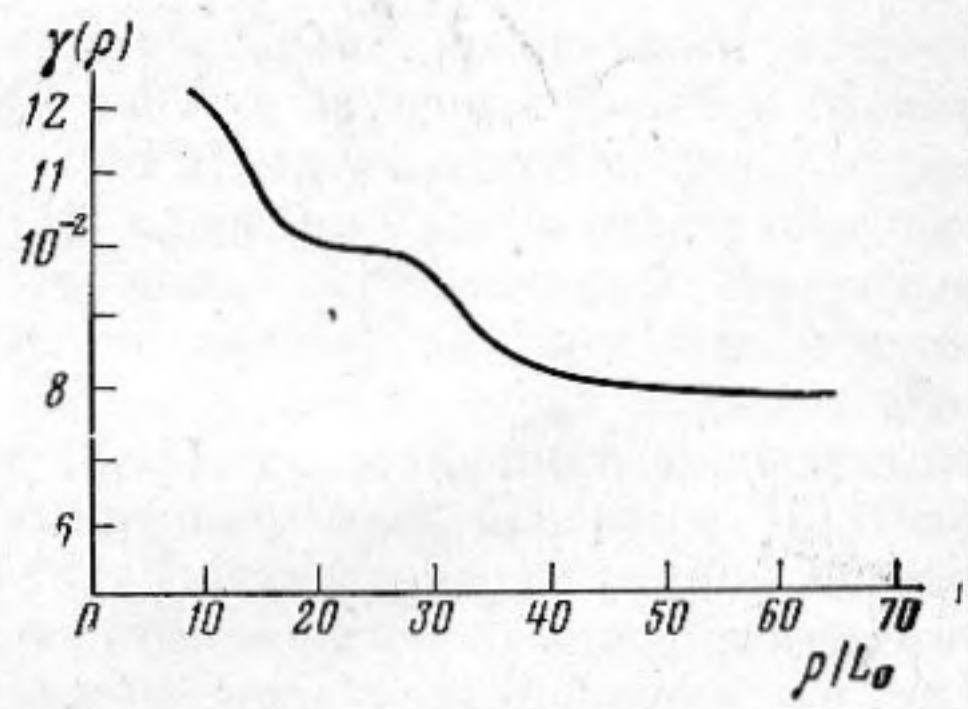
$$\varepsilon = \left| \frac{(2\pi)^{1/2}(k_0 h)^3}{\nu_n t_n \sin^2(\tilde{t}-\pi/4)\,(k_0\rho)^{1/2}} \right| < 1, \tag{20}$$

где ε — отношение амплитуды боковой волны (17) к амплитуде нормальной.

Для интересующего нас случая $\lambda \sim h = 30$ м при $\beta_0 = 3\cdot 10^{-2}$ формула (20) дает оценку этого расстояния: $k_0\rho > 300$ или $\rho > 1{,}4$ км.



Фиг. 5. Зависимость амплитуды волнового поля от расстояния при $\lambda = h = 30$ м



Фиг. 6. Зависимость поправки к фазе волны от расстояния

Результирующее поле (11), представляющее суперпозицию полей нормальной и боковой волн, можно представить в виде

$$\psi = \Phi_0 e^{i\left\{\omega t - k_0\rho\left[(1-\beta_0\cos\varphi) - \frac{\pi}{2k_0\rho} - \tilde{\gamma}\right]\right\}}, \tag{21}$$

где $\Phi_0 = |A_0|\,(1+2\varepsilon\cos\mu+\varepsilon^2)^{1/2}$ — результирующая амплитуда, а

$\tilde{\gamma} = \dfrac{1}{k_0\rho}\arcsin\dfrac{\sin\mu}{(1+2\varepsilon\cos\mu+\varepsilon^2)^{1/2}}$ — поправка к фазе, связанная с неоднородностью ветра,

$$\mu = \frac{k_0\rho}{8}\left(\frac{\nu_0}{k_0 h}\right)^2 + \frac{3\pi}{4}.$$

На фиг. (5—6) изображены кривые для амплитуды Φ_0 (нормированной на амплитуду Φ_0 на расстоянии $L_0 = k_0 h^2$) и поправки к фазе $\tilde{\gamma}$ в зависимости от приведенного расстояния ρ/L_0 в направлении ветра для случая $\lambda \sim h = 30$ м и $\beta_0 = 3\cdot 10^{-2}$.

Различие в фазовых скоростях нормальной и боковой волн приводит к небольшой пространственной модуляции амплитуды и фазы результирующего поля. На расстояниях $\rho > 30 k_0 h^2$, где $\varepsilon \sim 0{,}2$ (см. фиг. (6)), эта модуляция полностью исчезает, а поправка к фазе $\tilde{\gamma}$ становится постоянной и составляет примерно величину $8\cdot 10^{-3}$, т. е. дает ощутимый вклад в общую фазу волны.

В заключение автор выражает благодарность Бовшеверову В. М. и Татарскому В. И. за полезные обсуждения в процессе работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Госсард Э., Хук У.* Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978.
2. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
3. *Газарян Ю. Л.* Волноводное распространение звука.— Акуст. журн., 1957, т. 3, № 2, с. 127–141.
4. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородно-движущейся среды. М.: Наука, 1981.
5. *Обухов А. М.* К вопросу о распространении звука в завихренном потоке.— Докл. АН СССР, 1943, т. 32, № 46, с. 29–33.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
7. *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. М.: Физматгиз, 1959.

Институт физики атмосферы
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24.XII.1982