АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 5

УДК 534.222

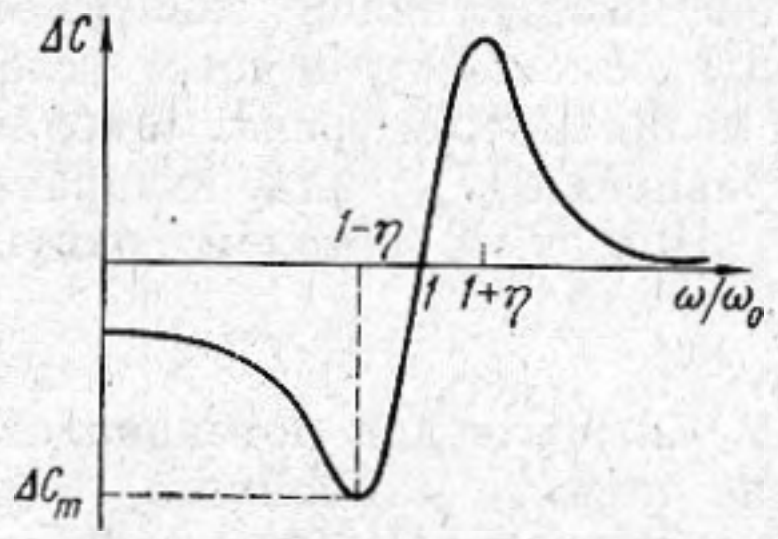
НЕЛИНЕЙНОЕ РАССЕЯНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Донской Д. М., Сутин А. М.

Рассмотрены нелинейные колебания сферических полостей в твердом теле при падении на них продольной акустической волны. Рассчитаны уровни рассеянных сигналов на частоте второй гармоники и разностной частоте. В рамках гомогенного приближения получены значения эффективного нелинейного параметра пористой среды.

В настоящее время изучаются возможности использования нелинейных акустических эффектов для диагностики различных сред. Эти эффекты уже используются для обнаружения газовых пузырьков в море [1, 2], в трубопроводах [3]. Для твердых сред теоретически рассмотрены эффекты генерации второй сдвиговой гармоники, позволяющие судить об остаточных деформациях в среде [4, 5], и экспериментально исследовано влияние усталостных свойств материалов на взаимодействие акустических волн [6]. Экспериментальные исследования [7] показали, что пористая среда отличается повышенным значением параметра нелинейности. Для определения возможностей использования нелинейных акустических эффектов для диагностики полостей в твердых средах в первую очередь необходима теория нелинейного рассеяния на таких полостях.

Рассмотрим задачу о генерации волн с частотой второй гармоники и комбинационной частотой при рассеянии продольной акустической волны на сферических полостях в твердой среде, пустых или заполненных жидкостью или газом. На основе решения этой задачи определим эффективные нелинейные параметры пористой среды и обсудим возможности использования такого рассеяния для диагностики полостей.



Рассмотрим сначала рассеяние плоской продольной волны частоты ω на сферической полости радиуса $a \ll \Lambda$, где Λ — длина волны. Для этого запишем уравнения нелинейной теории упругости в сферической системе координат. Для сферически-симметричных деформаций уравнение движения с учетом квадратичных по смещению членов имеет вид [8]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - (\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r}\right) = F, \tag{1}$$

где r — радиальная координата, u_r — смещение в радиальном направлении, λ, μ — коэффициенты Ламе,

$$F = \frac{2\alpha}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 - \frac{2\beta}{r^3}u_r^3 + 2\gamma\frac{u_r}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\right) + \varkappa\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial^2 u_r}{dr^2}, \tag{2}$$

$\alpha = 3\mu + 2\lambda + A + 4B + 2C$, $\beta = 3\mu + 3\lambda + A + 6B + 4C$, $\gamma = \lambda + 2B + 2C$, $\varkappa = 6\mu + 3\lambda + 2A + 6B + 2C$; A, B, C — упругие модули третьего порядка [9]. Радиальную компоненту тензора напряжений можно представить в виде суммы линейной и нелинейной частей: $\sigma_{rr} = \sigma_1 + \sigma_2$, где

$$\sigma_1 = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda\frac{u_r}{r}, \tag{3}$$

$$\sigma_2=\frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2+2\gamma\frac{u_r}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\delta\frac{u_r^2}{r^2}. \qquad (4)$$

Здесь $\delta=\lambda+2B+4C$. Уравнение состояния для газа (жидкости), заполняющего полость, представим в виде

$$P=P_*(\rho_1'/\rho_1)^\Gamma, \qquad (5)$$

где ρ_1', ρ_1 — соответственно возмущенная и невозмущенная плотности заполнителя полости, P — давление. Для газа — это уравнение адиабаты: P_* — статическое давление газа, $\Gamma=c_P/c_V$ — отношение удельных теплоемкостей газа. Для жидкости — это уравнение в форме Тэта с эмпирическими параметрами. В частности, для воды $\Gamma\simeq7$, $P_*=3{,}2\cdot10^8$ Па [10]. При малых смещениях стенок полости $u_r\ll a$ уравнение (5) можно разложить в ряд с точностью до квадратичных по относительному смещению u_r/a членов:

$$P'=P-P_*=-3\Gamma P_*\frac{u_r}{a}+\frac{3\Gamma(3\Gamma+1)P_*}{2}\left(\frac{u_r}{a}\right)^2. \qquad (6)$$

Система уравнений, описывающих рассеяние звука на полости для сферически-симметричных деформаций состоит из уравнения (1) и граничного условия

$$\sigma_{rr}(u_r)\,|_{r=a+u_r}=-P'\,|_{r=a+u_r}. \qquad (7)$$

Как видно из анализа соотношений (1)—(7), квадратичные члены присутствуют как в уравнении движения, так и в граничном условии. Их наличие в уравнении движения описывает нелинейные эффекты в акустической волне, распространяющейся вне полости в сплошной среде. Такие эффекты неоднократно рассматривались, например, в книге [10], и здесь будем интересоваться лишь эффектами, связанными с наличием полости, а распространение волны в среде будем считать линейным ($F=0$).

Колебания границы полости описываются уравнением (7), которое учитывает три вида нелинейности. Физическая нелинейность среды обусловлена квадратичной зависимостью $\sigma_{rr}(u_r)$, геометрическая нелинейность определяется граничным условием, задаваемым на движущейся границе, а нелинейность среды, заполняющей полость, учитывается в правой части уравнения (7) в виде квадратичной зависимости $P'(u_r)$.

Пользуясь методом возмущений, решение ищем в виде суммы:

$$u_r=u_1+u_2 \qquad (8)$$

($u_2\ll u_1$) или для потенциалов смещения $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, где $u_1=\partial\varphi_1/\partial r$ — решение первого (линейного) приближения, $u_2=\partial\varphi_2/\partial r$ — решение второго приближения. Найдем решение линейной задачи. Отбрасывая в уравнении (7) члены второго порядка малости, получим линейное граничное условие

$$\sigma_1(u_1)\,|_{r=a}=3\Gamma P_*u_1/a\,|_{r=a}. \qquad (9)$$

Исходя из сферической симметрии задачи рассеяния, решение ищем в виде суммы падающей волны (нулевой член разложения плоской волны по полиномам Лежандра) и рассеянной сферической волны [11]:

$$\varphi_1=\varphi_0\frac{\sin kr}{kr}e^{-i\omega t}+T\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\omega t}, \qquad (10)$$

где $k=\omega/c_l$, $c_l=(\lambda+2\mu)^{1/2}/\rho_0$ — скорость распространения продольных волн в твердой среде, φ_0 — потенциал падающей волны, T — искомый коэффициент, определяющий амплитуду рассеянной волны. Подставляя представление (10) в равенство (9), найдем

$$T=\frac{a\varphi_0}{(\omega_0/\omega)^2-1-ika}. \qquad (11)$$

Вводя диссипативные потери, соотношение (11) перепишем в виде

$$T=\frac{a\varphi_0}{(\omega_0/\omega)^2-1-i\eta(\omega)}. \tag{12}$$

Здесь $\eta(\omega)=ka+\eta'(\omega)$, $\eta'(\omega)$ — коэффициент, характеризующий диссипативные потери в твердой среде и заполнителе полости на частоте ω, $\omega_0=[(4\mu+3\Gamma P_*)/\rho_0]^{1/2}a^{-1}$ — резонансная частота заполненной газом или жидкостью полости [12]. С учетом того, что $(\mu/\rho_0)^{1/2}=c_t$ — скорость поперечных волн в твердой среде, $\Gamma P_*=\rho_1 c_1^2$, где ρ_1 и c_1 — плотность и скорость звука в среде-заполнителе полости, выражение для резонансной частоты примет вид

$$\omega_0=(4c_t^2+3c_1^2\rho_1/\rho_0)^{1/2}a^{-1}. \tag{13}$$

Из сравнения этого выражения и выражения для резонансной частоты $\omega_0'=2c_t/a$ [11] пустой полости видно, что наличие заполнителя может приводить к смещению резонансной частоты (см. таблицу). При условии $c_1(\rho_1/\rho_0)^{1/2}\ll c_t$ наличием заполнителя можно пренебречь. В обратном случае $c_1(\rho_1/\rho_0)^{1/2}\gg c_t$ упругость полости-осциллятора определяется упругостью заполняющего полость газа (жидкости) и соотношение (13) совпадает с выражением для резонансной частоты газового пузырька в жидкости [11].

Тв. среда	Резина [15]			Биологические ткани [13]		
Заполнитель	вакуум	воздух под давл. 1 атм	вода	вакуум	азот под давл. 1 атм.	вода
ω_0/ω_0'	1	1,06	44	1	1–10	$10-10^3$
ξ	19,3	18,2	0,44	$10-10^3$	$10-10^2$	0,6
ε'	1100	820	4,5	10^2-10^6	10^2-10^4	10
N	0,4	0,25	–	0,05–>0,5 *	0,05–>0,5 *	–
l_0/a	$6\cdot10^9$	$3{,}3\cdot10^9$	–	10^7-10^{21}	10^7-10^{14}	–

Примечание. Звездочкой отмечены высокие уровни второй гармоники, выходящие за рамки метода возмущений.

Поскольку рассматриваем длинноволновое рассеяние ($a\ll\Lambda$), то из анализа соотношения (13) видно, что в резонансе это условие выполняется для сред, в которых

$$(c_e/2c_t)^{1/2}\gg1, \tag{14}$$

$$(\rho_0/\rho_1)^{1/2}c_e/c_1\gg1. \tag{15}$$

Условие (15) выполняется для любого заполнителя с плотностью, много меньшей плотности твердой среды, условие (14) соответствует условию $\mu\ll\lambda$ и выполняется для резиноподобных сред. В случае $\mu\sim\lambda$ длина волны резонансных колебаний полости становится сравнимой с радиусом полости и приведенное рассмотрение справедливо при $\omega\ll\omega_0$.

Найдем нелинейную добавку φ_2, характеризующую нелинейное рассеяние звука на полости. Из-за квадратичного характера нелинейности эта добавка имеет частоту 2ω и ищем ее также в виде сферической волны

$$\varphi_2=Q\frac{e^{2ikr}}{r}e^{-2i\omega t}. \tag{16}$$

Это решение удовлетворяет линейному ($F=0$) уравнению движения. Из нелинейного граничного условия

$$\sigma_1(u_2)\big|_{r=a}+\sigma_2(u_1)\big|_{r=a}+\sigma_1(u_1)\big|_{r=a+u_1}= \\ =-\frac{3\Gamma(3\Gamma+1)P_*}{2}\left(\frac{u_1}{a}\right)^2\Bigg|_{r=a}+3\Gamma P_*\frac{u_2}{a}\Bigg|_{r=a}+3\Gamma P_*\frac{u_1}{a}\Bigg|_{r=a+u_1} \tag{17}$$

определим Q:

$$Q=-\frac{\varepsilon'\varphi_0^2(\omega_0/2\omega)^2}{a[(\omega_0/\omega)^2-1-i\eta(\omega)]^2[(\omega_0/2\omega)^2-1-i\eta(2\omega)]}, \tag{18}$$

где

$$\varepsilon' \simeq \frac{6\lambda+48\mu+8A+12B+3\Gamma(3\Gamma+5)P_*}{2(4\mu+3\Gamma P_*)}. \tag{19}$$

В случае, если на полость падает бигармоническая волна

$$\varphi=(\varphi_{01}e^{-i\omega_1 t}+\varphi_{02}e^{-i\omega_2 t}+\text{к.с.})/2 \tag{20}$$

(соответствующие длины волн $\Lambda_{1,2}\gg a$), аналогичная процедура нахождения решения нелинейно рассеянной волны разностной частоты $\omega_3=\omega_1-\omega_2$ дает

$$\varphi_2=-\frac{(\omega_0/\omega_3)^2\varepsilon'\varphi_{01}\varphi_{02}}{aR_1R_2R_3}\frac{e^{2i(k_3r-\omega_3 t)}}{r}, \tag{21}$$

где $R_j=[(\omega_0/\omega_j)^2-1+i(-1)^j\eta(\omega_j)]$, $k_j=\omega_j/c_l$, $j=1, 2, 3$; φ_{01}, φ_{02} — амплитуды падающих на полость плоских волн.

Как видно из анализа соотношений (18) и (21), нелинейно рассеянный сигнал максимален при резонансных колебаниях полости, т. е. при $\omega=\omega_0$. В этом случае относительное смещение границы полости (при падении на полость гармонической волны) определяется выражением

$$\left.\frac{u_r}{a}\right|_{r=a}=-i\frac{\xi^2 M}{\eta}e^{-i\omega_0 t}-\frac{\xi^4\varepsilon' M^2}{\eta^2}e^{-2i\omega_0 t}, \tag{22}$$

где $M=P_0/\rho_0 c_l^2$ — число Маха для падающей волны, $P_0=\rho_0\omega^2\varphi_0$ — давление в падающей волне, $\xi=c_l(4c_t^2+3c_l^2\rho_l/\rho_0)^{-1/2}$. При этом выражение для относительного уровня второй гармоники, рассеянной резонансной полостью, имеет вид

$$N=|u_2/u_1|=\xi^2\varepsilon' M/\eta. \tag{23}$$

Следует отметить, что при распространении акустической волны в однородной среде также генерируется вторая гармоника за счет нелинейности уравнения движения. Этот нелинейный сигнал, линейно рассеиваясь на полости, является помехой для приема нелинейного сигнала, генерируемого полостью. Сравним эти два сигнала. На расстоянии l от излучателя плоской продольной волны уровень второй гармоники в волне определяется выражением [10]

$$|\tilde{\varphi}_2|=\varepsilon_0 M^2 l/8k, \tag{24}$$

где $\varepsilon_0=(3\lambda+6\mu+2A+6B+2C)/(\lambda+2\mu)$. При линейном рассеянии на сферической полости амплитуда этого сигнала определяется выражением (10), в котором φ_0 надо заменить на $\tilde{\varphi}_2$; ω и k — соответственно на 2ω и $2k$. Относительный уровень второй гармоники в рассеянном таким образом сигнале при $2\omega=2\omega_0$ определяется соотношением

$$N_0=\varepsilon_0 Ml/2\xi a\sqrt{16+9/\eta^2}. \tag{25}$$

Здесь l — расстояние от излучателя до полости. Из сравнения соотношений (23) и (25) видно, что при условии

$$l<l_0=\frac{2\xi^3\varepsilon' a\sqrt{16+9/\eta^2}}{\varepsilon_0\eta} \tag{26}$$

уровень гармоники в рассеянном сигнале определяется в основном нелинейными свойствами полости.

В таблице оценены относительные уровни сигнала с частотой второй гармоники при резонансном рассеянии на сферических полостях в резиноподобных средах и значения отношения l_0/a, характеризующего расстояние l_0, до которого могут быть использованы нелинейные методы обнаружения полостей. Оценки сделаны для $M=5\cdot10^{-7}$ ($P_0=650$ Па в резине) без учета диссипативных потерь ($\eta'=0$, $\eta=\xi^{-1}$). Поскольку для резины

и биологических тканей значения модулей третьего порядка не были известны, для грубых оценок ε' в этих материалах считалось $\lambda \gg A+2B$.

Как видно из таблицы, уровень гармоники при рассеянии на резонансных полостях в резиноподобных средах может быть очень велик и практически всегда превышает фоновый сигнал на частоте гармоники, обусловленный нелинейностью однородной среды. Наличие заполнителя полости снижает нелинейное рассеяние, причем жидкостное заполнение сводит его на нет.

Рассмотрим далее нелинейные свойства пористой среды. Будем исходить из гомогенного приближения, которое используется для описания пузырьковых сред [14]. Согласно этому приближению, содержащиеся в среде полости находятся друг от друга на расстоянии, много большем их радиуса, и в то же время это расстояние много меньше длины акустической волны. Как и для пузырьковых сред [14], знание рассеянного одиночной полостью поля позволяет найти законы дисперсии, затухания и определить эффективные значения нелинейного параметра в пористой среде. Для полостей, имеющих закон распределения по размерам $n(a)$ ($n(a)$)da — количество полостей с радиусами от a до $a+da$ в единице объема), дисперсионное уравнение принимает вид

$$k_s = k + \frac{2\pi}{k}\int_0^{a_m} \frac{n(a)\,a\,da}{(\omega_0/\omega)^2 - 1 - i\eta}, \tag{27}$$

где k_s — волновое число для среды с полостями, a_m — радиус самой большой полости. Представляя k_s в виде $k_s = \omega/(c_l+\Delta c)+i\alpha$, нетрудно получить выражения для малой добавки Δc к скорости распространения волны и коэффициента затухания α.

В среде с полостями одного радиуса $n(a)=N\delta(a-a_0)$, где N — количество полостей в единице объема, дисперсионная кривая подобна соответствующей кривой для жидкости с пузырьками газа. Максимальное изменение скорости звука достигается вблизи резонанса: $\Delta c_m = 3c_l\xi^2 V/4\eta$, где $V = 4\pi a^3 N/3$ — объемная плотность полостей. В случае, когда собственные частоты полостей много выше частоты волны,

$$\Delta c = 3c_l\xi^2 V/2, \tag{28}$$

т. е. измерение скорости звука в такой среде позволяет определить объемную концентрацию полостей.

При $c_l \to 0$ выражение (28) переходит в соотношение, определяющее изменение скорости звука в жидкости с пузырьками газа [16], которое используется для определения объемной концентрации свободного газа в воде по измерению скорости звука.

Из (28) видно, что достаточно большие изменения скорости звука могут быть лишь в резиноподобных средах, для которых $\xi \gg 1$.

При плавном распределении полостей по размерам $\Delta c \approx 0$, так же как и для пузырьков газа в жидкости [14], а затухание определяется в основном резонансными полостями:

$$\alpha \simeq \pi^2 \xi n(a_\omega) a_\omega^3, \tag{29}$$

где a_m — радиус полостей с резонансной частотой, равной частоте ω падающей волны.

Зная уровень нелинейно рассеянного совокупностью полостей поля, так же как и для пузырьков газа в жидкости [14], можно определить эффективные параметры нелинейности ε пористой среды. В частности, при когерентном рассеянии в случае генерации второй гармоники

$$\varepsilon_{2\omega} = \frac{\pi\varepsilon'}{k^4}\int_0^{a_m} \frac{n(a)\,(\omega_0/\omega)^2\,da}{a[(\omega_0/\omega)^2 - 1 - i\eta(\omega)]^2[(\omega_0/2\omega)^2 - 1 - i\eta(2\omega)]} + \varepsilon_0. \tag{30}$$

При генерации волны разностной частоты

$$\varepsilon_{\omega_3}=\frac{4\pi\varepsilon'}{k_1^2k_2^2}\int\limits_0^{a_m}\frac{(\omega_0/\omega_3)^2n(a)\,da}{aR_1R_2R_3}+\varepsilon_0, \tag{31}$$

где R_i определены при обозначении выражения (21).

Если тело содержит маленькие полости, резонансные частоты которых выше частоты волны, то

$$\varepsilon_{\omega_3}\approx\varepsilon_{2\omega}=\varepsilon\approx3\xi^4\varepsilon'V+\varepsilon_0. \tag{32}$$

Поскольку гомогенная модель применима при $V\ll1$, то для материалов с $\xi\lesssim1$ эффективный параметр $\varepsilon\approx\varepsilon_0$. В этом случае наличие пор не влияет на нелинейные свойства твердых сред. Для резиноподобных материалов ($\xi\gg1$) параметр нелинейности может быть существенно больше. Например, для резины (параметры ξ и ε' приведены в таблице) с пустыми порами

$$\varepsilon\approx4{,}5\cdot10^8V+\varepsilon_0. \tag{33}$$

Видно, что малые значения объемной концентрации могут приводить к большим значениям ε.

Еще сильнее возрастает нелинейный параметр резиноподобной среды при совпадении частоты падающей волны с резонансной частотой полости. В этом случае

$$\varepsilon_{\omega_3}\approx\varepsilon_{2\omega}\approx3\xi^4\varepsilon'V/\eta^2. \tag{34}$$

В случае плавного распределения полостей по размерам основной вклад в ε вносят резонансные полости. Вычисляя интеграл (31) аналогично соответствующему интегралу для параметра нелинейности пузырьковой среды [14], для $\omega_3\ll\omega_{1,2}$, $\eta_1\approx\eta_2\approx\eta_3=\eta$ и $n(a_{\omega_1})=n(a_{\omega_2})=n(a_\omega)$ получим

$$\varepsilon_{\omega_3}\approx\frac{2\pi^2c^4\varepsilon'}{\omega^3(\omega\eta-i\omega_3)}[n(a_\omega)+i\eta n(a_{\omega_3})]. \tag{35}$$

Таким образом, получены соотношения, позволяющие определять уровень нелинейно рассеянного на сферической полости в твердой среде сигнала. Такое рассеяние в резиноподобных средах существенно превышает уровень сигналов на второй гармонике и на комбинационных частотах, образовавшихся при распространении акустической волны в среде и линейно рассеянных на полостях. Это открывает возможности для использования такого рассеяния в целях диагностики полостей. В рамках гомогенного приближения показано, что резиноподобные пористые среды должны обладать высокими значениями параметра нелинейности. Такие среды можно использовать в качестве рабочего тела в различных устройствах, работа которых основана на нелинейных акустических эффектах, например в параметрических приемниках или излучателях.

Авторы благодарны Л. А. Островскому и Ю. А. Кобелеву за интерес к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сандлер Б. М., Селивановский Д. А., Соколов А. Ю.* Измерения концентрации газовых пузырьков в приповерхностном слое моря.– Докл. АН СССР, 1981, с. 259, № 6, с. 1474–1476.
2. *Кобелев Ю. А., Островский Л. А., Сутин А. М.* О возможностях акустических методов диагностики газовых пузырьков.– Тез. докл. I Всесоюз. конф.: Метрология гидрофизических измерений. М.: ВНИИФТРИ, 1980, с. 108–109.
3. *Кобелев Ю. А., Куликов В. В., Сандлер Б. М., Селивановский Д. А., Соколов А. Ю.* Индикация отдельных газовых пузырьков в трубопроводе с жидкостью.– Тез. докл. III Всесоюз. симп. по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. Ташкент: ТГПИ, 1982, с. 16.

4. *Зарембо Л. К., Прохоров В. М.* Генерация второй сдвиговой гармоники в средах с остаточными внутренними деформациями.– Акуст. журн., 1975, т. 21, № 2, с. 198–202.
5. *Зарембо Л. К., Суховцев В. В.* К вопросу об акустических пространственных нелинейных резонансах в нелинейно-неоднородных средах.– Акуст. журн., 1982, т. 28, № 2, с. 212–215.
6. *Конюхов Б. А.* О влиянии статического нагружения на нелинейные взаимодействия акустических волн в металлах.– Акуст. журн., 1971, т. 17, № 1, с. 157–158.
7. *Остроумов Г. А., Дружинин Г. А., Крячко В. М., Токман А. С.* Нелинейные явления при распространении акустических волн в пористых средах.– Тез. докл. на VI Межд. симп. по нелинейной акустике. М.: МГУ, 1975, с. 166–169.
8. *Донской Д. М.* Нелинейное рассеяние акустических волн на полостях в твердых средах. Препринт № 63, 1983.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965.
10. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
11. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
12. *Андреева И. Б.* О рассеянии звука газовыми пузырями рыб в глубоководных звукорассеивающих слоях океана.– Акуст. журн., 1964, т. 10, № 1, с. 20–24.
13. *Сарвазян А. П.* Низкочастотные акустические характеристики биологических тканей.– Механика полимеров, 1975, № 4, с. 691–695.
14. *Кобелев Ю. А., Островский Л. А.* Модели газожидкостной смеси как нелинейной диспергирующей среды.– В кн. тр. ИПФ АН СССР. Нелинейная акустика. Теоретические и экспериментальные исследования. Горький: ИПФ, 1980, с. 143–160.
15. Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1964.
16. *Гаврилов Л. Р.* Содержание свободного газа в жидкости и методы его измерения. М.: Наука, 1970, с. 395–426.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29.III.1983