АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 5

УДК 623.8:534.8

ОЦЕНКА ДИССИПАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕМПФИРОВАННЫХ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Ионов А. В.

С помощью аппарата комплексных собственных форм колебаний получены выражения для коэффициентов потерь составной демпфированной конструкции через коэффициенты потерь собственных форм ее отдельных частей. Приведен пример расчета многомассовой системы.

Применение современных высокоэффективных средств вибропоглощения позволяет существенно ослабить резонансные явления в инженерных конструкциях в широком диапазоне частот, в том числе и на их первых резонансах [1]. Борьба с вибрацией в диапазоне низких и средних звуковых частот связана, как правило, со значительными конструктивными изменениями. Поэтому особую важность приобретает разработка методов расчета динамического поведения пространственных конструкций. Однако именно в этом случае получение оценок эффективности различных способов внесения потерь связано с построением сложных математических моделей и их расчетом на ЭЦВМ [2]. Существуют приближенные оценки эффективности вибропоглотителей для простейших структур типа стержней и пластин [3]. В указанном диапазоне частот для конструкций сложных конфигураций их применение требует специальной проверки. Упрощенные аналитические оценки эффективности вибропоглотителей, вносимых в части сложной конструкции, могут быть получены путем установления связи между диссипативными характеристиками отдельных элементов конструкции, исследование которых не вызывает каких-либо практических затруднений, с соответствующими характеристиками всей конструкции. Подобная постановка задачи предполагает расчленение конструкции на ряд отдельных элементов простой конфигурации, исследование их динамических характеристик и последующее восстановление динамических характеристик всей конструкции. В литературе такой подход получил название задачи синтеза [4]. Способы ее решения разработаны для систем без потерь и для систем с пропорциональным (классическим) демпфированием, предполагающим равномерную диссипацию колебательной энергии по всей конструкции. Для конструкций, элементы которых имеют различные коэффициенты потерь, такая задача не ставилась. Решение ее возможно с помощью аппарата комплексных собственных форм колебаний.

Запишем уравнение движения конструкции с произвольным распределением диссипативных сил в удобном для численных расчетов на ЭЦВМ матричном виде

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}+j[G]\{q\}=\{Q\}, \tag{1}$$

где $[M]$, $[K]$ и $[G]$ — матрицы инерции, жесткости и потерь размерности $N\times N$; $\{q\}$ — матрица-столбец решений при заданной матрице-столбце внешних сил $\{Q\}$. Уравнению (1) соответствует однородное уравнение, определяющее систему комплексных собственных чисел, представляемую диагональной матрицей $[\Lambda]=\mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2N}]$, а также определяющее системы правых $[\Phi]$ и левых $[V]$ комплексных собственных векторов (размерность этих матриц $N\times 2N$). Если нормировка $[\Phi]$ и $[V]$ производится в форме $[\Lambda][V]^{\tau}[M][\Phi]+[V]^{\tau}[M][\Phi][\Lambda]+[V]^{\tau}[K][\Phi]=[D]$, где $[D]=\mathrm{diag}[d_1, d_2, \ldots, d_{2N}]$, то условие ортогональности комплексных собственных форм имеет вид [5] $[\Phi][D]^{-1}[V]^{\tau}=[0]$.

При условии симметричности входящих в уравнение (1) матриц, поло-

жительной определенности $[M]$ и неотрицательной определенности $[K]$ и $[G]$ (что всегда имеет место в рассматриваемых задачах) матрицы правых и левых собственных векторов оказываются комплексно-сопряженными $[V]=[\bar{\Phi}]$. При этом блочно-диагональная матрица собственных чисел представляется в виде $[\Lambda]=\mathrm{diag}[[\Lambda'], [-\Lambda']]$, т. е. содержит дивергентные члены, которые надлежит отбросить. Поэтому в решении уравнения (1) следует удерживать члены, соответствующие только $[-\Lambda']$, т. е. считать матрицы $[\Lambda]$ и $[\Phi]$ имеющими размерность $N\times N$.

Не теряя общности, предположим, что собираемая конструкция состоит из двух демпфированных подконструкций. Тогда решение уравнения (1), выраженное в несвязанных координатах $\{q_1\}$, $\{q_2\}$, можно представить в виде $\{q\}=\{q_1, q_2\}^T$. Число координат первой подконструкции равно n_1, а второй — n_2, причем $n_1+n_2=N+n^s$, где n^s — число координат поверхности раздела.

Предположим, что каждая из подконструкций имеет достаточно простую конфигурацию и что их вибропоглощающие характеристики равномерно распределены. Тогда [2]

$$[G_l]=[\eta_l][K_l] \quad (l=1, 2), \tag{2}$$

где $[\eta_l]$ — диагональная матрица коэффициентов потерь. В силу соотношения (2) вещественная матрица собственных форм $[\Phi_l]$ приводит к диагональному виду матрицу $[G_l]$ тем же самым преобразованием, что и матрицы $[M_l]$ и $[K_l]$

$$[\Phi_l]^T[M_l][\Phi_l]=\mathrm{diag}[m_1, m_2, \ldots, m_{N_l}]=[m_l],$$

$$[\Phi_l]^T[K_l][\Phi_l]=\mathrm{diag}[\omega_1^2 m_1, \ldots, \omega_{N_l}^2 m_{N_l}]=[\omega_l^2 m_l]=[k_l], \tag{3}$$

$$[\Phi_l]^T[G_l][\Phi_l]=[\eta_l][k_l],$$

так как произведение $[\eta_l][\Phi_l]^T$ коммутативно (последнее вытекает из блочно-диагонального вида $[\Phi_l]$).

Введем обобщенные координаты $\{p_l\}$, связанные с физическими координатами $\{q_l\}$ соотношением

$$\{q_l\}=[\Phi_l]\{p_l\} \quad (l=1, 2), \tag{4}$$

и осуществим перенумерацию узловых перемещений в векторе физических координат каждой l-й подконструкции таким образом, чтобы выделить систему координат поверхности раздела

$$[\Phi_l]=\left[\begin{array}{c|c} [\Phi_l^{ii}] & [\Phi_l^{is}] \\ \hline [\Phi_l^{si}] & [\Phi_l^{ss}] \end{array}\right]. \tag{5}$$

В равенстве (5) подматрица $[\Phi_l^{ss}]$ имеет размерность $n^s\times n^s$ и ее столбцы сформированы таким образом, чтобы она не была вырожденной.

Можно показать, что в силу вещественности матриц $[\Phi_l]$ полученная в работе [4] матрица $[\beta]$, осуществляющая связь между обобщенными координатами $\{p_1, p_2\}^T$ несвязанной системы с координатами $\{\rho\}=\{\rho_1^i, \rho^s, \rho_2^i\}^T$ связанной системы $\{p_1, p_2\}^T=[\beta]\{\rho\}$, позволяет скомпоновать матрицы уравнения колебаний составной системы

$$[m_\Sigma]\{\ddot{\rho}\}+[k_\Sigma]\{\rho\}+j[g_\Sigma]\{\rho\}=[\beta]^T\left\{\begin{array}{c} [\Phi_1]^T\{Q_1\} \\ \hline [\Phi_2]^T\{Q_2\} \end{array}\right\}, \tag{6}$$

где $\{Q_l\}$ характеризует внешнюю нагрузку на l-й элемент, в форме $[m_\Sigma]=[\beta]^T\mathrm{diag}[[\Phi_1]^T[M_1][\Phi_1], [\Phi_2]^T[M_2][\Phi_2]][\beta]$, $[k_\Sigma]=[\beta]^T\mathrm{diag}[[\Phi_1]^T\times[K_1][\Phi_1], [\Phi_2]^T[K_2][\Phi_2]][\beta]$, $[g_\Sigma]=[\beta]^T\mathrm{diag}[[\Phi_1]^T[G_1][\Phi_1], [\Phi_2]^T\times[G_2][\Phi_2]][\beta]$.

Установив, что форма алгоритма решения задачи синтеза остается неизменной при внесении потерь в составную конструкцию, применим известные способы компоновки матриц $[\Phi_l]$ подструктур, например [6].

Пусть матрица $[\Phi_l^{ii}]$ в соотношении (5) определяет собственные формы подконструкции с закрепленной границей (размерность матрицы $n_l^i \times n_l^i$). Тогда матрица $[\Phi_l^{si}]=[0]$. Матрица $[[\Phi_l^{is}]^T \vdots [\Phi_l^{ss}]^T]^T$ описывает внутренние перемещения, вызываемые поочередным единичным перемещением граничных точек (узлов модели) при полностью неподвижных всех остальных граничных точках. Поэтому $[\Phi_l^{ss}]=[E^s]$, где $[E^s]$ — единичная матрица размерности $n^s \times n^s$. Матрицы, входящие в уравнение (6), могут быть преобразованы к виду

$$[m_\Sigma]=\left[\begin{array}{c|c|c} [m_1^{ii}] & [m_1^{is}] & [0] \\ \hline [m_1^{si}] & [m_1^{ss}]+[\beta_{32}]^T[m_2^{ss}][\beta_{32}] & [\beta_{32}]^T[m_2^{si}] \\ \hline [0] & [m_2^{is}][\beta_{32}] & [m_2^{ii}] \end{array}\right], \tag{7}$$

где $[\beta_{32}]=[\Phi_2^{ss}]^{-1}[S][\Phi_1^{ss}]$, $[S]$ — унитарная матрица преобразования поверхности раздела от координатной системы подконструкции 1 к координатной системе подконструкции 2;

$$[m_l^{ii}]=[\Phi_l^{ii}]^T[M_l^{ii}][\Phi_l^{ii}],$$

$$[m_l^{is}]=[m_l^{si}]^T=[\Phi_l^{ii}]^T[M_l^{ii}][\Phi_l^{is}]+[\Phi_l^{ii}]^T[M_l^{is}],$$

$$[m_l^{ss}]=[M_l^{ss}]+[\Phi_l^{is}]^T[M_l^{ii}][\Phi_l^{is}]+[M_l^{si}][\Phi_l^{is}]+[\Phi_l^{is}]^T[M_l^{is}];$$

$$[k_\Sigma]=\left[\begin{array}{c|c|c} [k_1^{ii}] & [0] & [0] \\ \hline [0] & [k_1^{ss}]+[\beta_{32}]^T[k_2^{ss}][\beta_{32}] & [0] \\ \hline [0] & [0] & [k_2^{ii}] \end{array}\right], \tag{8}$$

где $[k_l^{ii}]=[\Phi_l^{ii}][K_l^{ii}][\Phi_l^{ii}]$, $[k_l^{ss}]=[K_l^{ss}]+[\Phi_l^{is}]^T[K_l^{ii}][\Phi_l^{is}]+[K_l^{si}][\Phi_l^{is}]+$ $+[\Phi_l^{is}]^T[K_l^{is}]$;

$$[g_\Sigma]=\left[\begin{array}{c|c|c} [g_1^{ii}] & [0] & [0] \\ \hline [0] & [g_1^{ss}]+[\beta_{32}]^T[g_2^{ss}][\beta_{32}] & [0] \\ \hline [0] & [0] & [g_2^{ii}] \end{array}\right], \tag{9}$$

где $[g_l^{ii}]=[\Phi_l^{ii}]^T[G_l][\Phi_l^{ii}]$, $[g_l^{ss}]=[G_l^{ss}]+[\Phi_l^{is}]^T[G_l^{ii}][\Phi_l^{is}]+[G_l^{si}][\Phi_l^{is}]+$ $+[\Phi_l^{is}]^T[G_l^{is}]$. Матрица (8) блочно-диагональна в силу равенства нулю членов $[k_l^{is}]=[k_l^{si}]^T=[\Phi_l^{ii}]^T[K_l^{ii}][\Phi_l^{is}]+[\Phi_l^{ii}]^T[K_l^{is}]$. Элементы матрицы $[k_l^{is}]$ равны работе, которую производит совокупность реакций граничных связей на нормальных перемещениях. Но так как при нормальных перемещениях границы подконструкции неподвижны, то работа этих сил равна нулю. Блочно-диагональный вид матрицы (9) определяется способом формирования матриц $[G_l]$ (см. (2)).

Выполним новое преобразование координат $\{\rho\}=[\Psi]\{\xi\}$, где $[\Psi]$ — матрица комплексных собственных форм однородного уравнения, соответствующего уравнению (6). Получим

$$[E]\{\ddot{\xi}\}+[\omega^2(1+j\eta)]\{\xi\}=[\overline{\Psi}]^T[\beta]^T\left\{\begin{array}{c}[\Phi_1]^T\{Q_1\}\\ \hline [\Phi_2]^T\{Q_2\}\end{array}\right\}. \tag{10}$$

Диагональная матрица коэффициентов потерь $[\eta]$ в уравнении (10) может быть представлена в виде

$$[\eta]=\frac{1}{2\pi}[W]^{-1}[\Delta W], \tag{11}$$

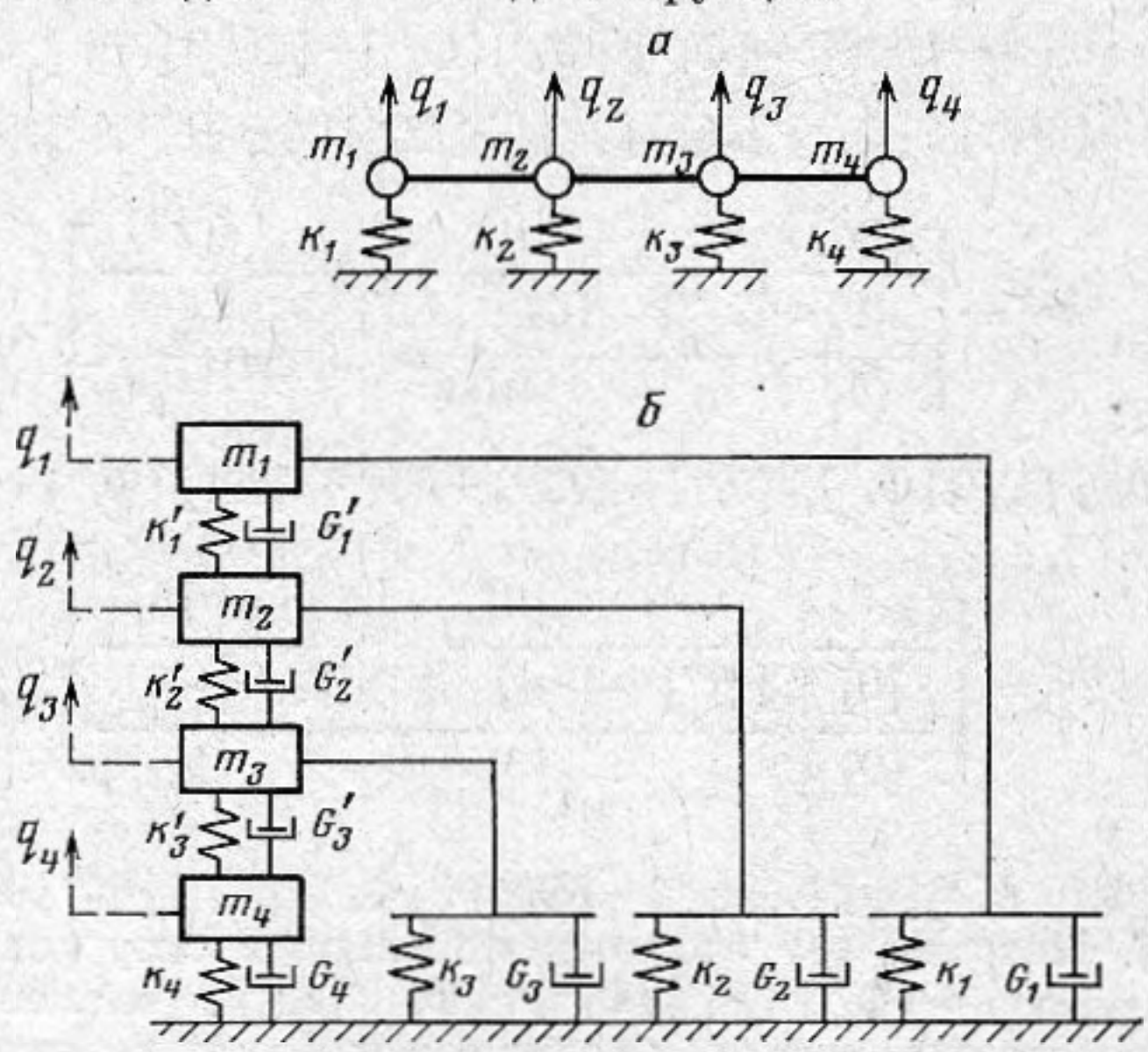
где рассеиваемая на каждой k-й собственной форме колебаний за период τ_k энергия ΔW_k определяется соотношением $\Delta W_k=\{\overline{\psi}_k\}^T[g_\Sigma]\{\psi_k\}\pi\xi_k^2$, а максимальная энергия цикла колебаний W_k определяется равенством $W_k=$ $=\{\overline{\psi}_k\}^T[k_\Sigma]\{\psi_k\}{}^1/_2\xi_k^2$. Подставляя в соотношение (11) матрицы (7)—(9).

получим

$$[\eta]=\operatorname{diag}\left[\frac{\eta_1^{ii}\omega_1^2+\eta_s\Delta\omega_1^2}{\omega_1^2+\Delta\omega_1^2},\right.$$

$$\left.\frac{\eta_1^{ii}\Delta\omega_{s_1}^2+\eta_2^{ii}\Delta\omega_{s_2}^2+\eta_s\omega_s^2}{\Delta\omega_{s_1}^2+\Delta\omega_{s_2}^2+\omega_s^2},\ \frac{\eta_2^{ii}\omega_2^2+\eta_s\Delta\omega_2^2}{\omega_2^2+\Delta\omega_2^2}\right], \qquad (11а)$$

где $[\Delta\omega_1^2]=[\overline{\Psi}_1^{si}]^T[k^{ss}][\Psi_1^{si}]$ имеет размерность $n_1^i\times n_1^i$, $[\Delta\omega_2^2]=[\overline{\Psi}_2^{si}]^T\times\times[k^{ss}][\Psi_2^{si}]$ имеет размерность $n_2^i\times n_2^i$, $[\omega_5^2]=[\overline{\Psi}^{ss}]^T[k^{ss}][\Psi^{ss}]$ имеет размерность $n^s\times n^s$, $[k^{ss}]=[k_1^{ss}]+[S]^T[k_2^{ss}][S]$, $[\Delta\omega_{s_1}^2]=[\overline{\Psi}_1^{is}]^T[k_1^{ii}][\Psi_1^{is}]$ имеет размерность $n^s\times n^s$, $[\Delta\omega_{s_2}^2]=[\overline{\Psi}_2^{is}]^T[k_2^{ii}][\Psi_2^{is}]$ имеет размерность $n^s\times n^s$. При выводе (11а) предполагалось, что структура матрицы комплексных собственных векторов $[\Psi]$ определяется видом матриц (7)—(9), а также что коэффициент потерь η_s обеих подконструкций одинаков для единичного перемещения соответствующего узла общей границы. Члены матрицы $[\Delta\omega_l^2]$ характеризуют смещение собственных частот l-й подконструкции за счет изменения граничных условий. Матрица $[\Delta\omega_{s_1}^2+\Delta\omega_{s_2}^2+\omega_s^2]$ задает соответствующие собственные частоты конструкции, обусловленные совместным движением подконструкций.



Амортизированный стержень с четырьмя массами: *а* — общая схема; *б* — условная расчетная схема с дополнительно введенными диссипативными элементами

Наиболее точные результаты в задаче синтеза могут быть получены при разбиении конструкции на подструктуры по «естественным границам», т. е. местам резкого изменения геометрических характеристик, например угловым или сварным соединениям, либо конструктивным узлам иного типа, а также местам крепления разнородных элементов (амортизаторов, разнообразных упругих вставок и т. п.). Такие места в конструкциях характеризуются резким рассогласованием механических сопротивлений. В этих случаях общие границы демпфированных подконструкций, как правило, не содержат слоев вязкоупругих материалов, что вызвано необходимостью обеспечения высоких прочностных характеристик структуры в целом. Поэтому для демпфированных подконструкций положим $\eta_l^{ii}>\eta_s$. Учитывая также, что всегда $\omega_l^2>\Delta\omega_l^2$, выражение (11а) можно упростить

$$[\eta]\approx\operatorname{diag}\left[\eta_1^{ii}\left(1-\frac{\Delta\omega_1^2}{\omega_1^2}\right),\right.$$

$$\left.\frac{\eta_1^{ii}\Delta\omega_{s_1}^2+\eta_2^{ii}\Delta\omega_{s_2}^2+\eta_s\omega_s^2}{\Delta\omega_{s_1}^2+\Delta\omega_{s_2}^2+\omega_s^2},\quad \eta_2^{ii}\left(1-\frac{\Delta\omega_2^2}{\omega_2^2}\right)\right]. \qquad (11б)$$

Эффективность средств вибропоглощения в конструкции может быть оценена сравнением коэффициентов потерь соответствующих форм колебаний до и после применения вибропоглотителей. Из анализа соотношения (11б) следует, что коэффициенты потерь собственных форм колебаний составной конструкции прямо пропорциональны коэффициентам потерь собственных форм подструктур, на которые она условно разбита. Следовательно, увеличение демпфирования в отдельных элементах сложной структуры приводит к пропорциональному увеличению эффекта вибропоглощения по всем тем ее собственным формам колебаний, которые синтезируются с учетом собственных форм данной подструктуры. Следует подчеркнуть, что изменение инерционно-жесткостных характеристик элемента вследствие его демпфирования учитывается в обобщенных параметрах ω_l^2 и $\Delta\omega_l^2$. Таким образом, приближенные оценки [3], полученные для простейших структур, в силу соотношения (11б) могут быть распространены в диапазоне первых изгибных резонансов и на конструкции сложных конфигураций. Основной отличительной чертой такого анализа является качественное сравнение собственных форм колебаний элементов и конструкции в целом и уточнение резонансных частот $(\omega_l^2 \pm \Delta\omega_l^2)^{1/2}$.

Возможности анализа на основе комплексных собственных форм проиллюстрируем примером системы из четырех амортизированных масс (фиг. *а*), закрепленных на едином стержне. Для вертикальных перемещений масс $\{q\}=\{q_1, \ldots, q_4\}^T$ этой колебательной системе соответствует условная схема фиг. *б*, в которой дополнительно учтены диссипативные элементы. Матрицы инерции и жесткости имеют вид

$$[M]=\mathrm{diag}[m_1, \ldots, m_4],$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k_1+k_1' & -k_1' & & \\ -k_1' & k_2+k_1'+k_2' & -k_2' & \\ & -k_2' & k_3+k_2'+k_3' & -k_3' \\ & & -k_3' & k_4+k_3' \end{bmatrix}.$$

Для случая $m_1=m_2=m_3=m_4=1$, $k_1=k_2=k_3=k_4=1$ и $k_1'=k_2'=k_3'=0{,}2$ в отсутствие потерь имеем

$$[\omega^2]=\mathrm{diag}[1{,}0000;\ 1{,}1149;\ 1{,}3990;\ 1{,}6824],$$

$$[\Phi]=\begin{bmatrix} 0{,}5000 & -0{,}6533 & -0{,}5000 & -0{,}2706 \\ 0{,}5000 & -0{,}2706 & 0{,}5000 & 0{,}6533 \\ 0{,}5000 & 0{,}2706 & 0{,}5000 & -0{,}6533 \\ 0{,}5000 & 0{,}6533 & -0{,}5000 & 0{,}2706 \end{bmatrix}.$$

Введем диссипативные члены $G_1=G_2=0{,}01k_1$; $G_1'=G_2'=0{,}01k_1'$; $G_3=G_4=0{,}1k_1$; $G_3'=0{,}1k_3'$. Если в работе [7], в которой использовались нормальные формы колебаний этой системы, отыскание коэффициентов потерь потребовало составления специального итерационного алгоритма и сравнительно большого объема вычислений, то, решая однородное уравнение (1) в комплексной форме, сразу находим $[\omega^2(1+j\eta)]=\mathrm{diag}[1{,}0176(1+j0{,}0535);\ 1{,}1020(1+j0{,}0537);\ 1{,}4106(1+j0{,}05220);\ 1{,}6698(1+j0{,}0462)]$,

$$[\Phi]=\begin{bmatrix} 0{,}5030 & -0{,}6205 & -0{,}4855 & -0{,}2773 \\ 0{,}4705+j0{,}1179 & -0{,}3197-j0{,}1568 & 0{,}4960-j0{,}1227 & 0{,}6390-j0{,}1234 \\ 0{,}3601+j0{,}3307 & 0{,}1907-j0{,}2740 & 0{,}4951+j0{,}1625 & -0{,}5536+j0{,}3431 \\ 0{,}2004+j0{,}4340 & 0{,}5374-j0{,}2966 & -0{,}4724-j0{,}0125 & 0{,}2131-j0{,}1732 \end{bmatrix}.$$

Реальная часть [Ф] определяет физические амплитуды вертикальных перемещений масс системы. Имеет место пространственное уменьшение амплитуд в соответствии с распределением демпфирования в системе, т. е. собственные формы несимметричны. Несмотря на очевидное преимущество расчета комплексных собственных форм прямым методом, работы с практическими примерами такого рода расчетов автору не известны.

Произведем разбиение системы на две подсистемы путем закрепления массы m_3 и получим

$$[M_1^{ii}]=\mathrm{diag}[1;1];\quad [K_1^{ii}]=\begin{bmatrix} 1{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 1{,}4 \end{bmatrix};\quad [\eta_1^{ii}]=\mathrm{diag}[0{,}01;0{,}01];$$

$$[{}^{ii}\omega_1^2]=\mathrm{diag}[1{,}0764;\ 1{,}5236];$$

$$[\Phi_1]=\left[\begin{array}{cc|c} 0{,}8507 & -0{,}5257 & 0{,}0244 \\ 0{,}5257 & 0{,}8507 & 0{,}1463 \\ \hline 0{,}0000 & 0{,}0000 & 1{,}0000 \end{array}\right];$$

$$[M_2^{ii}]=1;\ [K_2^{ii}]=1,2;\ [{}^{ii}\omega_2^2]=1,2;\ [\eta_2^{ii}]=0{,}1;\ [\Phi_2]=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} 1{,}0000 & -0{,}1667 \\ \hline 0{,}0000 & 1{,}0000 \end{array}\right].$$

Выполнив преобразование (7)–(9), получим

$$[m_\Sigma]=\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1{,}0000 & & 0{,}0977 & \\ \hline & 1{,}0000 & 0{,}1163 & \\ \hline 0{,}0977 & 0{,}1163 & 2{,}0498 & -0{,}1667 \\ \hline & & -0{,}1667 & 1{,}0000 \end{array}\right],$$

$$[k_\Sigma]=\mathrm{diag}[1{,}0764;\ 1{,}5236;\ 2{,}8707;\ 1{,}2000],$$

$$[g_\Sigma]=\mathrm{diag}[0{,}0108;\ 0{,}0152;\ 0{,}2433;\ 0{,}1200].$$

Расчет (10) дает $[\omega^2(1+j\eta)]=\mathrm{diag}[1{,}0607(1+j0{,}0519);\ 1{,}1393(1+j0{,}0553);\ 1{,}4364(1+j0{,}0505);\ 1{,}6318(1+j0{,}0476)]$, т. е. полученные методом синтеза значения коэффициентов потерь достаточно хорошо совпадают с точным значениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ионов А. В., Курбатов А. И., Попков В. И.* Экспериментальная оценка эффективности применения вибродемпфированных составных балок в фундаментах судового оборудования. Л.: Судостроение, 1980, № 7, с. 18–19.
2. *Ионов А. В., Кислова Т. Б.* Исследование сложных вибродемпфированных конструкций методом конечных элементов.– Акуст. журн., 1981, т. 27, № 1, с. 116–120.
3. *Борисов Л. П., Канаев Б. А., Рыбак С. А., Тартаковский Б. Д.* О критериях оценки эффективности вибропоглощающих покрытий.– Акуст. журн., 1974, т. 20, № 3, с. 352–359.
4. *Хинц Р. М.* Аналитические методы синтеза форм колебаний.– Ракетная техника и космонавтика, 1975, т. 13, № 8, с. 50–63.
5. *Фавзи И.* Ортогональность обобщенно нормированных собственных векторов и собственных строк.– Ракетная техника и космонавтика, 1977, т. 15, № 2, с. 174–176.
6. *Крейг Р. Р., Бемптон М. С.* Сочленение подконструкций при динамическом расчете конструкций.– Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 7, с. 113–121.
7. *Cronin D. L.* Approximation for determining harmonically excited responce of nonclassically damping systems.– J. engineering industry, Trans. ASME, 1976, v. 98, Ser. B, № 1, p. 43–47.

Поступила в редакцию
14.I.1982
после исправления 3.III.1983