АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 5

УДК 534.2–16

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ И ИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Можаев В. Г.

С помощью метода возмущений развивается теория распространения упругих поверхностных волн в анизотропных твердых телах с гладкими криволинейными границами. Приведена общая схема используемого метода. В качестве случая с вырожденной анизотропией рассмотрено распространение волн Рэлея в изотропной среде.

Поверхностные волны рэлеевского типа в наиболее простой постановке задачи распространяются в анизотропном твердом теле без дисперсии. В такой постановке задачи рассмотрение производится в линейном приближении классической теории упругости; считается, что поверхностные волны имеют плоские фазовые фронты, не взаимодействуют с полями другой природы и распространяются в однородном полупространстве с плоской свободной границей в отсутствие внешних воздействий. Отклонения от описанной модели могут приводить к появлению дисперсии и дополнительного затухания (затуханием в исходной модели обладают вытекающие волны). Если изменения характеристик волны, вызванные этими отклонениями, малы, то дополнительное затухание и дисперсия могут быть рассчитаны с помощью теории возмущений. Наиболее эффективным является метод теории возмущений, описанный в монографии [1]. Ранее этот метод использовался в теории упругих поверхностных волн для учета влияния возмущений в объеме среды и в граничных условиях [2]. В данной работе указанный метод применяется к новому кругу задач, в которых возмущением является изменение формы анизотропного твердого тела. Актуальность этого круга задач в последние годы возросла в связи с широким использованием в акустоэлектронных устройствах на поверхностных волнах кристаллов с криволинейными границами. Искривление поверхности кристаллов дает возможность создавать миниатюрные линии длительной задержки сигналов [3], топографические волноводы [4], геодезические линзы [5]. Однако теория распространения поверхностных волн рэлеевского типа — основного типа поверхностных волн, используемого в акустоэлектронике — разрабатывалась до сих пор для гладких криволинейных поверхностей лишь в случае изотропных материалов [6—19] (в указанных работах развивается асимптотическая теория для случая свободной поверхности твердого тела). Тем не менее и в этом наиболее простом случае имеется несовпадение результатов у разных авторов, недостаточно внимания уделялось анализу полученных выражений. В связи с этим в данной статье рассматривается также случай изотропной среды.

Приведем общую схему используемого метода для произвольных малых возмущений применительно к задачам распространения упругих волн в анизотропных твердотельных волноводах и неограниченных твердых телах. Будем считать, что возмущенная задача описывается следующими уравнениями:

уравнения движения $\rho \dot{V}_i' = \partial_j' T_{ij}' + f_i^F$, (1)

уравнения состояния $T_{ij}' = c_{ijkl} S_{kl}' + f_{ij}^T$, (2)

граничные условия $T_{in}'+Z_{ik}V_k'=f_{ik}^{Z}V_k'$, (3)

связь деформаций и смещений $S_{ij}'=(\partial_i'U_j'+\partial_j'U_i')/2+f_{ij}^{S}$, (4)

V_i — колебательная скорость, U_i — механическое смещение, T_{ij} — упругое напряжение, S_{ij}' — деформация, ρ — плотность среды, c_{ijkl} — модуль упругости, Z_{ik} — механический импеданс, $\partial_i\equiv\partial/\partial x_i$, x_i — декартовы координаты. Индексы i, j, k, l принимают значения 1, 2, 3. Функции f являются возмущениями. Их вид на этом этапе не конкретизируем. В невозмущенной задаче полагаем, что они равны нулю. С помощью штриха обозначаются переменные возмущенной задачи, не совпадающие с аналогичными переменными невозмущенной задачи. При учете взаимодействия упругих волн с полями другой природы добавляются еще уравнения динамики этих полей. Используем также локально декартовые координаты x_τ, x_n, x_t. Ось x_τ совпадает по направлению с фазовой скоростью волны. Ось x_n направлена по внешней нормали к поверхности, на поверхности $x_n=0$. Направление оси x_t уточним позднее. Волновой множитель будем записывать в виде $\exp[-i(\omega t-kx_\tau)]$.

Произведем над исходными уравнениями следующие операции. Умножим уравнение (1) на V_i^*, а аналогичное комплексно-сопряженное уравнение невозмущенной задачи — на V_i'. Складывая эти уравнения с учетом соотношения $\partial/\partial t=\pm i\omega$, получим

$$V_i^*\partial_j'T_{ij}'+V_i'\partial_jT_{ij}^*+f_i^FV_i^*=0. \tag{5}$$

Считаем, что имеются точки x_i, x_i' в которых $\partial_i=\partial_i'$. Последующие преобразования будем производить в этих точках. Представим уравнение (5) в виде

$$\partial_j\{-T_{ij}^*V_i'-T_{ij}'V_i^*\}+i\omega[T_{ij}'\partial_jU_i^*-T_{ij}^*\partial_jU_i']-f_i^FV_i^*=0. \tag{6}$$

Уравнение (6) проинтегрируем по площади поперечного сечения волновода S и используем двумерную теорему Остроградского — Гаусса $\int\limits_S\partial_j\{\ \}_j\,ds=\int\limits_S\partial_\tau\{\ \}_\tau\,ds+\int\limits_L\{\ \}_n\,dx_t$. Здесь $\{\ \}_j$ — выражение в фигурных скобках в уравнении (6), L — контур сечения S. В одномерном случае интегрирование не производится. Используем также соотношение, вытекающее из уравнений (2), (4) и симметрии c_{ijkl}, а также соотношение, справедливое, когда средний по времени поток энергии через границу невозмущенного волновода равен нулю

$$T_{ij}'\partial_jU_i^*-T_{ij}^*\partial_jU_i'=T_{ij}^*f_{ij}^S+S_{ij}^*f_{ij}^T,\quad \int\limits_L\{\ \}_n\,dx_t=-\int\limits_L f_{ik}^ZV_k'V_i^*\,dx_t.$$

В результате указанных преобразований приходим к уравнению

$$\int\limits_S\partial_\tau\{\ \}_\tau\,ds=-i\omega\int\limits_S[f_{ij}^TS_{ij}^*+f_{ij}^ST_{ij}^*-f_i^FU_i^*]\,ds+\int\limits_L f_{ik}^ZV_k'V_i^*\,dx_t\equiv F.$$

Считаем, что возмущенное и невозмущенное решения связаны в этом уравнении соотношением $\mathscr{A}'(x_\tau,\ x_n,\ x_t)\exp(ik'x_\tau)=a(x_\tau)[\mathscr{A}(x_n,\ x_t)+\Delta\mathscr{A}(x_n,\ x_t)]\exp(ikx_\tau)$, $a(x_\tau)$ — медленно меняющаяся амплитуда, $\Delta\mathscr{A}$ — слагаемое, учитывающее изменение структуры волны, $\mathscr{A}$ — амплитудное значение T_{ij}, U_i или V_i.

В итоге получаем уравнение относительно $a(x_\tau)$

$$\frac{\partial a}{\partial x_\tau}-\frac{F^La}{4P_W+\Delta p}=\frac{F^{NL}}{4P_W+\Delta p}, \tag{7}$$

$$P_W=(1/2)\,\mathrm{Re}\int\limits_S\mathscr{P}_\tau\,ds,\quad \mathscr{P}_j=-T_{ij}V_i^*,$$

$$\Delta p=-\int\limits_S(\Delta T_{i\tau}V_i^*+\Delta V_iT_{i\tau}^*)\,ds,$$

$\mathrm{Re}\,\mathscr{P}_j$ — средняя по времени плотность потока энергии, F^L — линейная по амплитуде a часть функции F, из которой a выделена множителем; $F^{NL}=F-aF^L$. Для возмущения волнового числа Δk из формулы (7) имеем следующее выражение:

$$\Delta k=k'-k^*=-iF^L/(4P_W+\Delta p),$$
$$a(x_\tau)=\exp(i\Delta k x_\tau). \tag{8}$$

Подставляем в эту формулу решение в виде ряда по степеням малого параметра, характеризующего возмущение. В дальнейшем будем рассматривать только те ситуации, в которых относительное изменение структуры волны имеет такой же порядок величины, что и относительное изменение волнового числа. Тогда получаем, что в $(N+1)$ порядке по малому параметру возмущение Δk можно вычислить через волновые поля, определенные с точностью до N-го порядка по этому параметру. Следовательно, формула (8) позволяет вычислять волновое число возмущенной задачи итерациями. В первом порядке по малому параметру

$$\Delta k=-iF_1^L/4P_W, \tag{9}$$

а F_1^L определяется через решение невозмущенной задачи. Изменением структуры волны при вычислении Δk по формуле (9) фактически пренебрегаем.

Используем описанный выше алгоритм для расчета возмущения волнового числа упругих поверхностных волн, вызванного изменением формы анизотропного твердого тела. Будем считать, что в невозмущенной задаче твердое тело имеет плоскую поверхность, а в возмущенной — поверхность кругового цилиндра, и отношение длины волны к радиусу цилиндра R является малым параметром ($kR\gg1$). В соответствии с выбором малого параметра уравнения теории упругости в цилиндрической системе координат r, z, φ, описывающие возмущенную задачу, представим в виде уравнений (1)—(4). Функции f и координаты x_i' имеют при этом следующий вид (индексы i, j, k, l принимают значения r, z, φ): $f_r^F=\varepsilon\partial_\varphi T_{r\varphi}+(T_{rr}-T_{\varphi\varphi})/r$, $f_\varphi^F=\varepsilon\partial_\varphi T_{\varphi\varphi}+2T_{r\varphi}/r$, $f_z^F=\varepsilon\partial_\varphi T_{z\varphi}+T_{rz}/r$, $f_{\varphi\varphi}^S=\varepsilon\partial_\varphi U_\varphi+U_r/r$, $\varepsilon=(r^{-1}-R^{-1})$, $2f_{\varphi z}^S=\varepsilon\partial_\varphi U_z$, $2f_{\varphi r}^S=\varepsilon\partial_\varphi U_r-U_\varphi/r$, $x_r'=r-R$, $x_z'=z$, $x_\varphi'=R\varphi$, остальные $f_{ik}^S=0$. Возмущения f_{ij}^T, f_{ik}^Z в этой задаче отсутствуют, а $Z_{ik}=0$. По известным функциям f с помощью уравнения (9) в первом порядке по параметру $1/(kR)$ можно определить возмущение волнового числа. Рассмотрим первоначально два частных случая — распространение вдоль и перпендикулярно образующей цилиндра. Будем считать, что поверхностные волны имеют плоские фазовые фронты. Тогда интегралы по поперечному сечению волновода в выражениях для F и P_W, входящих в уравнение (9), вырождаются в интегралы по глубине (координате x_n). Для поверхностных волн, распространяющихся вдоль выпуклого цилиндра, $x_n=x_r'$, $x_\tau=x_z'$, $x_t=x_\varphi'$, а оси x_τ, x_n, x_t образуют правую тройку. Выражение для возмущения Δk в этом случае имеет вид

$$(\Delta k/k)_t=(4P_W kR_t)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{0}(N_t+i\mathscr{P}_n)\,dx_n, \tag{10}$$

где $N_i=2\omega\,\mathrm{Re}(U_i^*T_{in}-U_n^*T_{ii})$ — суммирование по i не производится. Аналогичное выражение имеет место при распространении вокруг выпуклого цилиндра

$$(\Delta k/k)_\tau=(4P_W kR_\tau)^{-1}\left\{\int\limits_{-\infty}^{0}(N_\tau+i\mathscr{P}_n)\,dx_n+\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{n}(2k\,\mathrm{Re}\,\mathscr{P}_\tau\,dx_n)\,dn\right\}. \tag{11}$$

В этом случае $x_n=x_r'$, $x_\tau=x_\varphi'$, $x_t=x_z'$, а оси x_τ, x_n, x_t образуют левую тройку. Двойной интеграл в формуле (11) появился при вычислении интеграла вида $\int x_n\mathscr{P}_\tau\,dx_n$ по частям. Индексами τ, t у R и $\Delta k/k$ обозначено, что нормальная кривизна поверхности по отношению к волновому вектору явля-

ется продольной или поперечной (далее будем называть ее просто продольной или поперечной кривизной). Величины T_{ij} и U_i, V_i определяются из решения задачи с плоской границей. Анизотропия твердого тела и ориентация его главных осей в выражениях (10), (11) произвольны при условии, что кривизна поверхности слабо изменяет структуру волны. Для вогнутых цилиндрических поверхностей необходимо положить $x_n=-x_r$, что приводит к смене знака Δk. В этом случае можно также использовать формулы (10), (11), если считать для вогнутых поверхностей радиусы кривизны отрицательными. Полученные выражения с заменой пределов интегрирования применимы и для граничных волн других типов. Обобщение на случай распространения волн по гладкой поверхности произвольной формы легко провести следующим образом. Кривизна гладкой поверхности в любой точке полностью определяется радиусами нормальной кривизны в двух ортогональных направлениях. В рассматриваемой задаче одно из них естественно связать с направлением волнового вектора. Раздельное влияние искривлений поверхности в каждом из этих направлений определяется формулами (10), (11). Их совместное влияние в силу независимости действия малых возмущений будет определяться просто суммой выражений (10), (11)

$$\Delta k/k=(\Delta k/k)_t+(\Delta k/k)_\tau=A_t/(kR_t)+A_\tau/(kR_\tau), \tag{12}$$

в которой R_t, R_τ представляют собой локальные радиусы кривизны. Вычисляя с помощью этого выражения локальную скорость поверхностных волн, можно затем, используя принцип Ферма, найти и их траекторию. Справедливость формулы (12) для поверхностных волн на сфере подтвердилась при выводе возмущения Δk изложенным выше методом из уравнений теории упругости в сферической системе координат. Возмущение Δk можно определить и через главные радиусы кривизны поверхности R_1, R_2, используя для этого формулу Эйлера

$$\Delta k=(A_\tau/R_1+A_t/R_2)\cos^2\theta+(A_\tau/R_2+A_t/R_1)\sin^2\theta, \tag{13}$$

θ — угол между волновым вектором и главным направлением поверхности с радиусом кривизны R_1. Для круглого цилиндра радиуса R $R_1=0$, $R_2=R$, θ — угол между волновым вектором и образующей цилиндра.

Анализ полученных решений целесообразно начать с наиболее простого случая вырожденной анизотропии — случая изотропной среды. Результаты для волн Рэлея после преобразований с использованием дисперсионного уравнения можно привести к следующему виду:

$$A_t^i=\frac{(k^2-qs)}{2k^3qK},\quad A_\tau^i=\frac{(k^2-4q^2)(q^2-s^2)}{2ks^2q^3K},$$

где

$$K=1/s^2+1/q^2+2/k^2-8/(k^2+s^2), \tag{14}$$

$$q^2=k^2-k_l^2,\quad s^2=k^2-k_t^2,\quad k_l^2=\omega^2\rho/(\lambda+2\mu),\quad k_t^2=\omega^2\rho/\mu,$$

λ, μ — коэффициенты Ламе. К такому же виду можно привести соответствующие формулы работ [6—14], что подтверждает справедливость полученных решений. Выражения, имеющиеся в работах [15—19], дают не совпадающие с формулами (14) численные значения, которые различаются и между собой. Функции A_t^i, A_τ^i зависят лишь от коэффициента Пуассона ν и для реальных твердых тел изменяются монотонно от ν в следующих пределах:

При $\nu=0$ $v_R^2/v_t^2=3-\sqrt{5}$, $A_t^i=\sqrt{10(\sqrt{5}+1)}/20\approx0{,}284$, $A_\tau^i=-(4+\sqrt{5})A_t^i\approx\approx-1{,}774$; при $\nu=0{,}5$ $v_R^2/v_t^2=\eta=(2/3)(4+\sqrt[3]{3\sqrt{33}-17}-\sqrt[3]{3\sqrt{33}+17})$, $A_t^i=(4-\eta)(1-\eta)(2-\eta)/(24\eta-16)\approx0{,}050$, $A_\tau^i=3(2-\eta)/(6\eta-4)\approx-2{,}211$; v_R, v_t — скорости рэлеевской и сдвиговой волн. Из этих выражений следует, что A_τ^i в отличие от A_t^i слабо зависит от упругих свойств среды ($\max A_\tau^i/\min A_\tau^i\approx1{,}25$). Анализ значений A_t^i, A_τ^i и формулы (12) позво-

ляет сделать ряд качественных выводов [6, 7, 19–21]. Приведем некоторые из них, ранее не отмечавшиеся в литературе. Во-первых, характер дисперсии из-за кривизны поверхности существенным образом зависит от того, как по отношению к волновому вектору искривлена поверхность. А именно если для выпуклых поверхностей продольная кривизна приводит к нормальной, то поперечная — к аномальной дисперсии и наоборот — для вогнутых поверхностей. Во-вторых, при равных радиусах влияние продольной кривизны значительно сильнее, чем поперечной. Это позволяет в оценочных расчетах фазовой скорости волн Рэлея на сферических поверхностях пренебрегать влиянием поперечной кривизны. В-третьих, анизотропная кривизна поверхности изменяет дифракционную расходимость поверхностных волн. В частности, в линиях задержки в виде пластин со скругленными краями дифракционная расходимость волн Рэлея на закруглении больше, чем на плоской поверхности. Для тел конкретной геометрии можно сформулировать ряд специальных выводов. Отметим особые направления распространения волн Рэлея по поверхности изотропного кругового цилиндра. В направлениях $\theta=0$, $90°$ достигается экстремум фазовой скорости и дифракционной расходимости, а угол ψ отклонения групповой скорости от фазовой обращается в нуль

$$\psi(\theta)=\operatorname{arctg}(v_R^{-1}\partial v_R/\partial\theta)\approx(A_\tau-A_t)\sin(2\theta)/(kR). \qquad (15)$$

Характер дисперсии в этих направлениях прямо противоположен. Изменение характера дисперсии происходит при $\theta_0=\operatorname{arctg}\sqrt{-A_t^i/A_\tau^i}\approx 22°-28°\nu$. Несмотря на то, что для этого направления дисперсия отсутствует, угол $\psi(\theta_0)$ имеет конечную, зависящую от частоты величину, $\psi(\theta_0)=-2\sqrt{-A_t^iA_\tau^i}/(kR)\approx(46°\nu-82°)/(kR)$. Наибольшее значение ψ достигает при $45°$, $\psi(45°)\approx(28°\nu-102°\nu^2-118°)/(kR)$.

Анализ функций A_t, A_τ в анизотропном случае представляет обширную и трудоемкую задачу и поэтому в рамках данной статьи не проводится. Укажем лишь на одно отличие, обусловленное анизотропией, которое легко заметить и не вычисляя конкретных значений A_t, A_τ. Согласно формулам (12), (15), в кристаллах даже изотропная кривизна границы (случай сферы) может изменять угол отклонения групповой скорости от фазовой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуревич А. Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Физматгиз, 1960, с. 167–180.
2. *Auld B. A.* Acoustic fields and waves in solids. V. 2. N. Y.: Interscience, 1973, p. 271–332.
3. *Эш Э.* Устройства для обработки сигналов.– В кн.: Поверхностные акустические волны. М.: Мир, 1981, с. 132–137.
4. *Coldren L. A.* Rayleigh wave guidance using anisotropic topographic structures.– Appl. Phys. Lett., 1974, v. 25, № 7, p. 367–370.
5. *Ван Дюзер.* Линзы и пленки переменной толщины для фокусировки и направленного распространения поверхностных акустических волн.– ТИИЭР, 1970, т. 58, № 8, с. 60–68.
6. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
7. *Викторов И. А.* Волны типа рэлеевских на цилиндрических поверхностях.– Акуст. журн., 1958, т. 4, № 2, с. 131–136.
8. *Бабич В. М.* О распространении волн Рэлея по поверхности упругого тела произвольной формы.– Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6, с. 1263–1266.
9. *Бабич В. М., Русакова Н. Я.* О распространении волн Рэлея по поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 4, с. 652–665.
10. *Кирпичникова Н. Я.* Волны Рэлея, сосредоточенные вблизи луча на поверхности неоднородного упругого тела.– Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1969, т. 15, с. 91–114.
11. *Gregory R. D.* The propagation of Rayleigh waves over curved surfaces at high frequency.– Proc. Cambridge Philos. Soc., 1971, v. 70, № 1, p. 103–121.
12. *Wilson L. O., Morrison J. A.* Propagation of high frequency elastic surface waves along cylinders of general cross section.– J. Math. Phys., 1975, v. 16, № 9, p. 1795–1805.
13. *Morrison J. A.* High frequency approximation for elastic surface waves propagation along cylinders of general cross section.– J. Math. Phys., 1976, v. 17, № 6, p. 958–963.

14. *Morrison J. A., Seery J. B., Wilson L. O.* Propagation of high-frequency elastic surface waves along cylinders with various cross-sectional shapes.– Bell System Techn. J., 1977, v. 56, № 1, p. 77–114.
15. *Петрашень Г. И.* Методы исследования волновых процессов в средах, содержащих сферические и цилиндрические границы раздела.– Уч. зап. ЛГУ, 1953. № 170, сер. матем. наук, вып. 27, с. 96–220.
16. *Гельчинский Б. Я.* Некоторые задачи распространения волн в однородной и изотропной упругой сфере.– Уч. зап. ЛГУ, 1958, № 246, сер. матем. наук, вып. 32, с. 322–344.
17. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н.* Поверхностные волны на сфере с начальными напряжениями.– Прикл. механ., 1978, т. 14, № 1, с. 3–9.
18. *Крылов В. В.* К теории рэлеевских волн на гладких поверхностях.– Вопросы радиоэлектроники. Сер. ОТ, 1976, вып. 11, с. 3–11.
19. *Крылов В. В.* О волнах Рэлея на гладких поверхностях произвольной формы.– Акуст. журн., 1979, т. 25, № 5, с. 754–759.
20. *Молотков И. А.* Возбуждение волн Рэлея и Стонли.– Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1970, т. 17, с. 168–183.
21. *Комарова Л. Н.* Распространение волн по круговой цилиндрической оболочке.– Докл. VI Всесоюз. акуст. конф. Т. 3. М.: АКИН, 1968, секц. Л–О, М118, 3 с.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3.V.1982
после исправления
10.III.1983