

УДК 534.2:532

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩИХ ГРАНИЧНЫХ СЕЧЕНИЙ РАСЧЕТНОГО УЧАСТКА КАНАЛА

Федорченко А. Т.

Рассмотрены некоторые способы задания нелинейных граничных условий на проницаемых концевых сечениях расчетного участка канала с вихревым потоком вязкого или идеального газа, исходя из необходимости поглощения продольных квазиплоских звуковых волн. Даны примеры численных решений.

Проблема задания звукопоглощающих граничных условий весьма актуальна в задачах численного моделирования нелинейных акустических процессов на конечном участке канала (с граничными сечениями Γ_1, Γ_2), который является отдельным фрагментом протяженного газодинамического тракта. Сечения Γ_1, Γ_2 должны обладать свойством максимального поглощения (пропускания) по крайней мере продольных квазиплоских волн (т. е. нормальных волн нулевого порядка) во всем расчетном спектре частот. В противном случае могут развиваться интенсивные резонансные явления, затрудняющие исследование реальных волновых процессов внутри расчетной области газового потока. Известно, что низкочастотные продольные колебания в протяженных каналах нередко являются наиболее интенсивными и наименее затухающими из-за эффектов вязкости, а также концевых потерь.

В последние годы рядом авторов (см., например, [1—4]) были предложены некоторые способы задания звукопоглощающих граничных условий на проницаемой границе расчетной области в основном для случаев квазиодномерного (нормального к границе) безвихревого потока газа. В данной работе, представляющей развитие результатов [5, 6], рассмотрены нелинейные модели звукопоглощающих граничных сечений канала, которые могут обеспечивать эффективное демпфирование продольных акустических колебаний в условиях вихревого газового потока.

Рассмотрим задачу численного моделирования нестационарных дозвуковых течений вязкого или идеального газа в ограниченной пространственной области G . Эта область соответствует участку канала длины L с жесткими непроницаемыми боковыми стенками (граница Γ_w). Для описания процессов в области G используется полная нелинейная система дифференциальных уравнений динамики вязкого теплопроводного газа (либо соответствующая система для частного случая идеального газа), т. е. пять скалярных уравнений в эйлеровой системе координат $\{Ox_1, Ox_2, Ox_3\}$ для пяти независимых параметров потока: u_1, u_2, u_3, p, T . Используется также равновесное (в условиях низкочастотного приближения) уравнение состояния однокомпонентного совершенного газа $p = \rho T / \gamma$. Безразмерные значения координат x_1, x_2, x_3 , компонент скорости u_1, u_2, u_3 , времени t , плотности ρ , давления p , температуры T выражены соответственно в единицах $r_0, c_0, r_0/c_0\rho_0, \rho_0 c_0^2, T_0$. Здесь и далее r_0 — характерная полуширина (радиус) канала; T_0 — характерная температура стенок; $c_0(T_0)$ — адиабатическая скорость звука; $\rho_0, \mu_0, \kappa_0, c_{p0}, c_{v0}$ — плотность, вязкость, теплопроводность и теплоемкости при температуре T_0 и некотором характерном (начальном) давлении в канале. Основные критерии подобия: $Re_c = \rho_0 c_0 r_0 / \mu_0$, $Pr = \mu_0 c_{p0} / \kappa_0$, $\gamma = c_{p0} / c_{v0}$. Для исходной системы уравнений в области G на интервале $\Omega = (0, t_k)$ может быть поставлена некоторая нестационарная краевая задача с начальными данными при $t=0$ и граничными условиями на $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_w \cup \Gamma_2$ (Γ_1, Γ_2 — проницаемые граничные сечения).

Предлагаемые способы задания условий в сечениях Γ_1, Γ_2 изложим на примере одного достаточно гладкого граничного сечения Γ_j , используя ортогональную систему координат $\{Ox_1, Ox_2, Ox_3\}$, в которой ось Ox_1 направлена вдоль внутренней нормали \mathbf{n} к Γ_j ($x_1=0$ на Γ_j , $u_1=(\mathbf{u}, \mathbf{n})$).

Предположим, что вблизи Γ_j течение квазипараллельно ($|\sin(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}})| \ll \ll 1$). Будем рассматривать как доминирующие лишь продольные квазиплоские акустические волны, пренебрегая явлениями рефракции в вихревом потоке и считая, что нелинейные эффекты не приводят к образованию разрывов. В зависимости от знака массового расхода $m_j(t) = \int_{\Gamma_j} \rho u_1 dx_2 dx_3$

сечение Γ_j можно условно считать «входным» ($m_j(t) > 0$) или «выходным» ($m_j(t) < 0$). Обычно при подобном разделении знак $m_j(t)$ соответствует знаку $u_1(\mathbf{r}, t)$ на большей части Γ_j и не изменяется в течение характерного периода колебаний (при наличии среднего потока газа).

В первую очередь рассмотрим проблему постановки граничных условий во входном сечении канала, допуская, что $\Gamma_j = \Gamma_j^+ \cup \Gamma_j^-$ ($u_1 \geq 0$ на Γ_j^+ , $u_1 < 0$ на Γ_j^- , причем по площади Γ_j^- составляет малую часть Γ_j). При этом преследуется цель: обеспечить значительный звукопоглощающий эффект сечения Γ_j во всем расчетном спектре частот продольных колебаний и одновременно задать на Γ_j с некоторой точностью характерные осредненные (во времени по колебаниям) профили $\bar{u}_1(\mathbf{r}, t)$, $\bar{T}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in \Gamma_j$, $t \in \Omega$.

Согласно общим моделям локально реагирующих проницаемых границ [7], на Γ_j^+ зададим четыре независимые функциональные связи между u_1, u_2, u_3, p, T :

$$w_1 - f_1(p, \dots, \mathbf{r}, t) = 0, \quad w_1 = \rho^\sigma u_1^\xi, \quad \xi \neq 0; \quad (1)$$

$$u_2 - f_2(u_1, \dots, \mathbf{r}, t) = 0; \quad (2)$$

$$u_3 - f_3(u_1, \dots, \mathbf{r}, t) = 0; \quad (3)$$

$$T - f_4(p, \dots, \mathbf{r}, t) = 0, \quad (4)$$

где f_i — заданные функции. При $u_1(\mathbf{r}, t) < 0$, т. е. на Γ_j^- , используется лишь одно условие вида (1).

Так как число граничных условий указанного типа $N \leq 4$, то при численном решении задачи пересчет всех пяти параметров потока на Γ_j производится с привлечением дополнительных вычислительных алгоритмов, содержащих элементы пространственной экстраполяции по нормали из внутренних точек области (см. [6]). Эти алгоритмы в случае вязкого газа имеют смысл разностных аналогов краевых условий второго или третьего рода для u_1, u_2, u_3, T .

Пусть $\Gamma_j = \Gamma_f \cup \Gamma_\delta$; Γ_f — большая часть сечения Γ_j , соответствующая «акустическому ядру потока»; Γ_δ — относительно тонкий слой вблизи $\Gamma_w = \Gamma_w \cap \Gamma_j$ с толщиной $\delta_w = O[\omega_m \text{Re}_c/2]^{-1/2}$ ($\text{Pr} = O(1)$, ω_m — основная частота спектра продольных акустических колебаний), где проявляются пристеночные эффекты диссипации акустической энергии вследствие вязкости и теплопроводности. Разумеется, для идеального газа $\delta_w = 0$, $\Gamma_f = \Gamma_j$. В большинстве случаев можно положить, что практически вблизи всего сечения Γ_j доминирующую роль играют локально-гиперболические процессы в переменных x_1, t (см. [8]). Тогда в (1), (4) положим

$$f_4 = g_1(\gamma p)^{(\gamma-1)/\gamma} + g_2, \quad g_i = g_i(\mathbf{r}, t) \geq 0, \quad i=1, 2, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_j; \quad (5)$$

$$g_2 = 0, \quad g_1 > 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in \Gamma_f;$$

$$g_1 \rightarrow 0, \quad g_2 \rightarrow T_w(\mathbf{r}_w, t), \quad f_4 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_w| \rightarrow 0,$$

$$\mathbf{r} \in \Gamma_\delta, \quad \mathbf{r}_w \in \Gamma_w.$$

Таким образом, g_1 определяет заданное распределение энтропии s на Γ_f (далее с s будем отождествлять величину $T(\gamma p)^{(1-\gamma)/\gamma}$, однозначно связанную с энтропией).

Условия (2), (3) вида $u_i - u_1 \eta(\mathbf{r}, t) = 0$, $i=2, 3$ соответствуют заданию

на Γ_j углов θ_i входа потока ($\operatorname{tg} \theta_i = \eta_i$), а при $f_i = f_i(\mathbf{r}, t)$, $i=2, 3$ задаются компоненты скорости u_2, u_3 . Напомним, что в рассматриваемом случае $|\eta_2| \ll 1$, $|\eta_3| \ll 1$ практически во всем сечении Γ_j .

Очевидно, что заранее достаточно сложно задать вид функций f_i, g_1, g_2 (так же как и оценить величину δ_ω). Однако можно в качестве первого приближения задать некоторую величину δ_ω^0 , а также функции f_i^0, g_1^0, g_2^0 , которые затем могут уточняться в процессе численного решения задачи путем использования данных наблюдения за развитием газодинамического процесса на предшествующем (уже рассчитанном) интервале времени (см. [7]).

Если шаги пространственной сетки h_n по нормали к стенке заведомо превышают δ_ω^0 , то фактически Γ_f содержит все точки Γ_j , кроме $\mathbf{r} \in \Gamma_{wj}$. Необходимо, однако, учитывать, что при подобном «упрощении» задачи невозможно рассмотрение пристеночных эффектов поглощения звука вследствие вязкости и теплопроводности, явлений нестационарного отрыва из-за продольных колебаний и т. д.

Считая несущественным воздействие условий (2), (3) на продольные колебания, проанализируем соотношения (1), (4) с учетом следующих предположений: f_i (для $i=1, 4$) имеют непрерывные производные по p, x_h, t ; $\partial f_i / \partial t$ — достаточно гладкие явные функции t (при фиксированных $p, \mathbf{r} \in \Gamma_j$); на исследуемом интервале $\Omega_p(t) \approx (t - t_p/2, t + t_p/2) \subset \Omega$, где t_p — характерный (максимальный) период колебаний, величины $|(\partial f_i / \partial t) t_p / f_i|_{p=\text{const}}$ пренебрежимо малы, а значения σ, ξ, g_1, g_2 практически неизменны во времени. Рассмотрим локальный элемент $d\Gamma_f \in \Gamma_j$, на котором задано условие вида (1) (при $u_1 > 0$ это условие дополнено еще тремя). Вблизи $d\Gamma_f$ $u_1 = \bar{u}_1 + u_1'$, $p = \bar{p} + p'$, $\rho' \approx p'/c^2$, $|u_1'/\bar{u}_1| \ll 1$, $|p'/\bar{p}| \ll 1$. Линеаризуя (1) и полагая $u_1' = u_0 \exp(-i\omega t)$, $p' = p_0' \exp(-i\omega t)$, нетрудно оценить относительную величину нормальной акустической проводимости β и коэффициент отражения ξ для элемента $d\Gamma_f$, не зависящие от частоты:

$$\beta = \frac{u_1' \bar{\rho} \bar{c}}{p'} \approx \frac{\bar{u}_1 \bar{\rho} \bar{c}}{\xi \bar{w}_1} \left[\alpha - \frac{\sigma \bar{w}_1}{\bar{\rho} \bar{c}^2} \right], \quad \bar{w}_1 = \bar{\rho} \bar{u}_1 \xi, \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{\overline{\partial f}}{\partial p} \approx \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_{p=\bar{p}}, \quad \xi \approx \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad \text{для } \beta \neq 1.$$

Здесь черта означает осреднение по характерному (максимальному) периоду колебаний t_p :

$$\bar{f}(t, \dots) \approx \frac{1}{t_p} \int_{t-t_p/2}^{t+t_p/2} f(t, \dots) dt.$$

При $\beta \approx -1$ ($|\xi| \ll 1$) реализуется практически полное (без отражения) прохождение квазиплоской нормальной волны через элемент $d\Gamma_f$. Этой величине β могут соответствовать следующие комплексы значений σ, ξ, α :

$$\{\sigma=0, \xi=1, \alpha \approx -1/(\bar{\rho} \bar{c}) < 0\}, \quad (7)$$

$$\{\sigma=1, \xi=1, \alpha \approx (\bar{u}_1/\bar{c} - 1)/\bar{c} < 0\}, \quad (8)$$

$$\{\sigma=1, \xi=2, \alpha \approx (\bar{u}_1/\bar{c} - 2)\bar{u}_1/\bar{c} < 0\}, \dots \quad (9)$$

Разумеется, величина $\beta \approx -1$ может определяться не только целыми значениями σ, ξ , но и дробными, хотя последнее не всегда удобно в расчетах. Определенный недостаток такого подхода заключается в том, что для обеспечения $\beta \approx -1$ необходимо знать локальные значения $\bar{u}_1, \bar{\rho}, \bar{c}$. Для этого в общем случае требуется анализ волнового процесса на предшествующем интервале времени $\Omega^* = (t_1, t) \subset \Omega$, где $t - t_1 \gg 2\pi/\omega_m$, ω_m — основная (минимальная из спектра) частота колебаний.

В некоторых частных случаях возможны простые предварительные оценки необходимой величины α . Например, пусть средний температурный профиль на Γ_j не содержит значительных градиентов вдоль Ox_2, Ox_3 (т. е. можно положить $\bar{c} = \text{const}$ на Γ_j). В данном классе задач также

можно считать малыми величины $|\partial p/\partial x_i|/p$, $i=2,3$. Тогда $\bar{p}=\text{const}$ на Γ_j , и можно сразу оценить величину $\alpha \approx -1/\bar{p}\bar{c} \approx \text{const}$ в (7), не зависящую от профиля \bar{u}_1 на Γ_j . Если $|\bar{u}_1/\bar{c}| \ll 1$ на Γ_j , то $\alpha \approx -1/\bar{c}$ в (8) практически не зависит от профиля \bar{u}_1 на Γ_j . Заметим, что во всех трех рассмотренных примерах $\alpha \neq 0$ (т. е. $\partial f_1/\partial p \neq 0$).

Используя (6), можно задать (1) таким образом, что $\beta \approx -1$ практически во всех точках Γ_j . Если $S(\Gamma_\delta)/S(\Gamma_j) \ll 1$ ($S(\cdot)$ — площадь), то отличие β от -1 на Γ_δ не играет особой роли.

В ряде задач для $L \gg 1$, $\lambda \gg 1$, по-видимому, можно потребовать выполнения менее жесткого условия $\langle \beta \rangle \approx -1$, где $\langle \cdot \rangle$ — величина, осредненная по сечению Γ_j (см. [5]).

Другой подход к обеспечению звукопоглощающих свойств Γ_j заключается в задании условий вида (1) на основе использования инвариантов Римана. Известно (см. [1, 9]), что лишь для одномерных изэнтропических течений идеального газа допустима запись уравнений динамики с помощью инвариантов Римана $I_1^\pm = u_1 \pm 2c/(\gamma-1)$ в эйлеровой системе координат. Поэтому обобщение результатов теории одномерных смешанных задач динамики идеального газа на пространственные вихревые течения вязкого газа может носить лишь приближенный характер. Тем не менее успешная реализация описанных ниже моделей в ряде тестовых расчетов позволяет говорить о возможности такого подхода для решения достаточно широкого класса нелинейных задач вычислительной газовой динамики.

Допустим, что вблизи малого элемента $d\Gamma_j(\mathbf{r})$ на некотором интервале $(t_1, t_2) \subset \Omega$ имеет место квазиодномерное изэнтропическое течение ($g_2=0$, $g_1=s(\mathbf{r}) > 0$ в (5)). Пусть на $d\Gamma_j$ задано условие (1), которое запишем в виде

$$F_1(u_1, p, T, \mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_j, \quad (10)$$

используя уравнение состояния $p = \rho T/\gamma$. Тогда аналогично одномерным смешанным задачам [9] можно потребовать необходимые условия корректности для (10):

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1} \pm \frac{\gamma p}{c} \frac{\partial F_1}{\partial p} \pm \frac{T(\gamma-1)}{c} \frac{\partial F_1}{\partial T} \neq 0 \quad \text{при} \quad \text{sign}(u_1) = \pm 1. \quad (11)$$

Если (10) представить в виде $F_1^*(I_1^+, I_1^-, s, \mathbf{r}, t) = 0$, то (11) эквивалентно условию $\partial F_1^*/\partial I_1^\pm \neq 0$ при $\text{sign}(u_1) = \pm 1$. Если на $d\Gamma_j^+$ условие (10) будет соответствовать заданию I_1^+ (при $u_1 > 0$), то нелинейная волна, характеризующаяся распределением $I_1^-(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in G$, будет полностью (без отражений) проходить через элемент $d\Gamma_j^+$. Аналогичное рассмотрение можно провести и для сечения $d\Gamma_j^-$ с $u_1 < 0$. Таким образом, можно записать приближенное условие звукопоглощения на $d\Gamma_j$ в виде

$$\partial F_1^*/\partial I_1^\pm = 0 \quad \text{при} \quad \text{sign}(u_1) = \mp 1$$

или эквивалентное условие для F_1

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1} \pm \frac{\gamma p}{c} \frac{\partial F_1}{\partial p} \pm \frac{T(\gamma-1)}{c} \frac{\partial F_1}{\partial T} = 0 \quad \text{при} \quad \text{sign}(u_1) = \mp 1. \quad (12)$$

Рассмотрим некоторые конкретные типы условий (1) с учетом (12) для Γ_j^+ . Полагая $T = s(\gamma p)^{(\gamma-1)/\gamma}$, нетрудно показать, что задание на Γ_j^+ инварианта I_1^+ ($I_1^+ - f(\mathbf{r}, t) = 0$) эквивалентно соотношению

$$u_1 + \frac{2\sqrt{s}}{(\gamma-1)} (\gamma p)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - f = 0. \quad (13)$$

Легко убедиться в том, что линеаризация (13) приведет к величине нормальной проводимости $\beta = u_1' \bar{p}\bar{c}/p' \approx -1$ (полагая $\partial f/\partial t \approx 0$ для достаточно гладких по t функций f). Очевидно, умножение (13) на некоторую дифференцируемую функцию $\psi(u_1, p, T, \mathbf{r}, t)$ также приведет к звукопогло-

щающему граничному условию с $\beta \approx -1$. Например, умножая (13) на $\rho = (\gamma p)^{1/\gamma}/s$, получим граничное соотношение вида

$$\rho u_1 + \frac{2}{\sqrt{s}(\gamma - 1)} (\gamma p)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} - \frac{f}{s} (\gamma p)^{1/\gamma} = 0,$$

которое может оказаться более предпочтительным в задачах, где требуется управление входным профилем ρu_1 . Аналогичные соотношения нетрудно получить и для $d\Gamma_j^-$ с $u_1 < 0$.

Таким образом, проводя предварительные оценки $\bar{p}(\mathbf{r}, t)$ (которые затем могут уточняться в процессе счета), можно задать на Γ_j^+ профили $\bar{u}_1(\rho u_1, \dots)$, s, \bar{T} и одновременно обеспечить значительное поглощение продольных квазиплоских волн, полагая, что и при $\partial s/\partial x_i \neq 0$, $i=2,3$ колебания вблизи каждого элемента $d\Gamma_j$ локально-изэнтропические.

Условие (1) в принципе может быть использовано одновременно с (5), где $g_1=0$, $g_2>0$ на Γ_j^+ . Реальным аналогом подобной модели может быть система вдува вязкого теплопроводного газа через мелкопористую стенку с заданной температурой g_2 . Если $g_2(\mathbf{r}, t)$ — достаточно гладкая явная функция t , практически неизменная в пределах характерного периода колебаний, то на Γ_j^+ при любом условии (1) имеет место частичное поглощение волны из-за теплообмена (слабое для $\lambda \gg \delta_w$). Кроме того, в этом случае возможны эффекты генерации энтропийных волн на Γ_j^+ .

Рассмотрим простейшую квазиодномерную модель течения вязкого газа вблизи элемента входного сечения $d\Gamma_j^+$, на котором задана постоянная температура $T=1$ ($g_1=0$, $g_2=1$). Тогда акустические импульсы давления с характерной амплитудой p_0' вызывают изменения энтропии на $d\Gamma_j^+$ с амплитудой $s_0' \approx p_0'(1-\gamma)(\gamma \bar{p})^{(1-2\gamma)/\gamma}$. Образующаяся таким образом энтропийная волна переносится со средней скоростью потока газа вдоль канала и может вызывать генерацию акустических волн в выходном сечении (например, если в этом сечении $\partial p/\partial t \neq 0$ (см. ниже)).

Отметим особенность задания граничных условий в выходном сечении $(\Gamma_j)_{\text{вых}}$ ($u_1 < 0$ на большей части Γ_j , $m_j(t) < 0$). В этом сечении (для определенности положим $j=2$) не возникает необходимости задания профилей \bar{u}_1, \bar{T} , типичным же является задание характерного (осредненного по сечению и по колебаниям во времени) давления $p_a(t)$. Таким образом, для Γ_2^\pm ($S(\Gamma_2^+) \ll S(\Gamma^-)$), по-видимому, достаточно использование условия

$$p(\mathbf{r}, t) - f(p_a(t), \langle w_1(t-\tau) \rangle, \mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{r} \in \Gamma_2^\pm, \tau \geq 0, \quad (14)$$

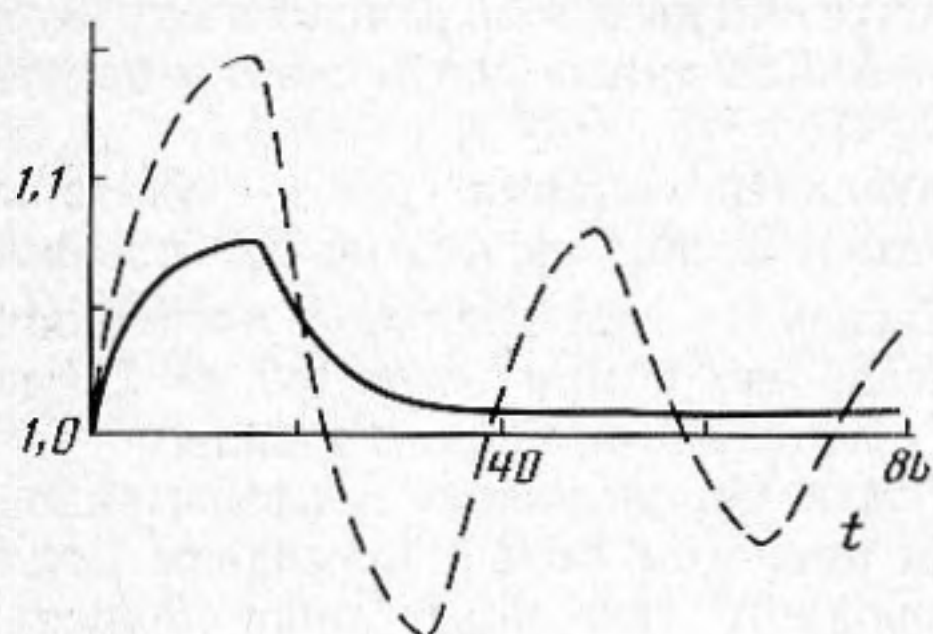
так чтобы $\langle \beta \rangle_2 \approx -1$. В ряде задач может быть предпочтительным применение (14) с $\sigma=1$, $\xi=1$, где $f=f(t)=p_a(t)+\Psi(m_2(t_2)-\bar{m}_2(t_1), t)$, $\Psi(0, t)=0$, причем $\bar{m}_2(t_1) \approx (m_1(t_1)+m_2(t_1))/2$, $t_i=t-\tau_i$, $\tau_i \geq 0$, $i=1, 2$. Задание $\tau_i > 0$ (например, $\tau_i=h_i$, где h_i — временной шаг численной схемы), так же как и использование аналогов (10) вида $F(u_1(\mathbf{r}, t), p(\mathbf{r}, t-\tau), \dots)=0$ с $\tau > 0$, необходимо вызывает появление реактивной составляющей β , зависящей от частоты, однако при $\omega \tau_i \ll 1$ этим эффектом в ряде случаев можно пренебречь.

В случае существенно непараллельных вихревых течений (например, при прохождении через Γ_2 интенсивного вихря, который может играть роль «тромба») вместо (14) необходимо использовать более сложные нелокальные условия.

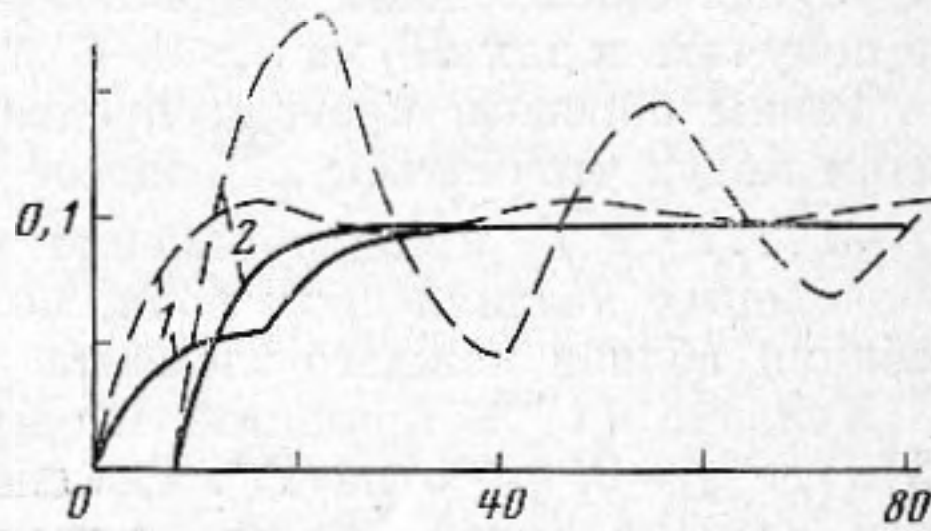
С применением предложенных моделей была решена серия численных задач о развитии осесимметричного (в переменных x, r, t) течения вязкого совершенного газа в области $G=\{x \in (0, L), r \in (0, 1), L=8\}$, соответствующей конечному участку цилиндрического канала постоянного кругового сечения. При этом использовалась полная нелинейная система дифференциальных уравнений динамики вязкого теплопроводного газа для $\mathbf{u}=\{u, v\}$, p, T . Во всех задачах было принято $\mu=\kappa=1$; $\gamma=1,4$; $Pr=1$. Начальное поле задавалось в виде $\mathbf{u}(x, r, 0)=0$, $p(x, r, 0)=p_a=1/\gamma$; $T(x, r, 0)=1$; $x, r \in \bar{G}$. На боковой стенке ($x \in (0, L), r=1$) $\mathbf{u}=0$, $T=1$; на оси ($x \in (0, L), r=0$) — условия симметрии $v=0$, $\partial u/\partial r=\partial p/\partial r=\partial T/\partial r=0$.

Выбор геометрии области G , а также характерных параметров потока ($M_{\max} \approx 0,2$; $Re_c = 10^3$) определялся стремлением сравнить полученные результаты с близкими задачами [6].

Граничные условия во входном сечении Γ_1 ($x=0$) и выходном Γ_2 ($x=L$) задавались специальным образом, чтобы обеспечить быстрое демпфирование квазиплоских акустических волн, генерируемых на Γ_1 из-за



Фиг. 1



Фиг. 2

роста массового расхода в течение начального промежутка времени $t_{in} = 0$ (10), и получить в результате стационарное течение с однородным профилем температуры $\bar{T} \approx 1$ и профилем продольной скорости $\bar{u} \approx 0,2(1-r^2)$ на Γ_1 , а также заданным давлением на Γ_2 . С этой целью на Γ_1^+ были заданы условия

$$T(0, r, t) = \varphi(r) [p(0, r, t)/p_a]^{(\gamma-1)/\gamma} g_1(r, t) + 1 - \varphi(r), \quad (15)$$

$$v(0, r, t) = 0, \quad \varphi(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r \in [0, 1-\delta] \\ 1 - [(r-1+\delta)/\delta]^2 & \text{при } r \in [1-\delta, 1]. \end{cases}$$

В данной серии расчетов $\delta = 0,2$ ($\delta_{\omega} \approx (\omega_{x1} Re_c / 2)^{-1/2} \approx 0,1$ для $\omega_{x1} \approx \pi/2L \approx 0,2$; $Re_c = 10^3$). Кроме того, на Γ_1^{\pm} задавались различные варианты условий (1), которые при $t > t_{in}$ обеспечивали эффективное демпфирование продольных колебаний во всем расчетном спектре частот ω_{xn} с $n \leq 10 \div 20$.

На Γ_2^{\pm} ($S(\Gamma_2^+) \ll S(\Gamma_2^-)$) использовалось условие

$$p(L, r, t) = p_a + a(t) [m_2(t) - \bar{m}_2(t)], \quad p_a = 1/\gamma, \quad \bar{m}_2 \approx (m_1 + m_2)/2.$$

Специальным подбором величины a можно добиться, что $\langle \beta \rangle_2 \approx 1$, $|\xi| \ll 1$ (см. [6]). Однако в представленных ниже вариантах было задано $a = 0$ (т. е. $\langle \beta \rangle_2 = \infty$), так как для эффективного демпфирования колебаний было достаточно звукопоглощающих условий только на Γ_1 .

Все вычисления проводились на ЭВМ БЭСМ-6 с применением численной схемы интегрирования уравнений динамики вязкого газа, описанной в [6]. В одном из вариантов на Γ_1^{\pm} было задано

$$u(0, r, t) = \psi(t) [0,2(1-r^2)] + 5\chi\varphi, \quad (16)$$

$$\psi(t) = 1 - \exp(-0,2t), \quad \chi = 1 - g_1^{1/2} [\gamma p(0, r, t)]^{(\gamma-1)/2\gamma},$$

причем на первом этапе решения ($t \leq 40$) $g_1 = 1$. Это условие на $(\Gamma_1)_1$ эквивалентно соотношению вида (13) $I_1^+(0, r, t) = u_1 + 2c/(\gamma-1) = 0,2(1-r^2)\psi(t) + 5$, причем $\partial I_1^+/\partial t \approx 0$ при $t > t_{in}$. Отметим, что в данной задаче величину p_s (среднее давление на Γ_1 при $t \rightarrow \infty$) нетрудно оценить заранее: $(p_s - p_a)/p_a \approx 4Lu_{\max}/(p_a Re_c) \approx 9 \cdot 10^{-3}$.

Для данного варианта на фиг. 1 сплошной линией представлен график $p(0, 0, t)/p_a$ для $t < 80$. На фиг. 2 сплошными линиями 1, 2 даны кривые $m_1(t)/\pi$, $m_2(t)/\pi$. Выход на стационарный режим течения наблюдается уже практически при $t > 40$. На этом режиме $p(0, r, t)/p_a - 1 \approx 9 \cdot 10^{-3}$, $T(0, r, t) - 1 \approx 2,6 \cdot 10^{-3}$ на $(\Gamma_1)_1$, профиль $u(0, r, t)$ отличается от параболы $0,2(1-r^2)$ менее чем на 10% при $r = 0,8$ и менее 0,7% при $r = 0$. Если подобные отличия превышают необходимую точность задания \bar{u} , \bar{T} на Γ_1 , то возможна дальнейшая коррекция этих профилей. Например, плавно

изменяя g_1 от 1 до $(1,009)^{(1-\gamma)/\gamma} \approx 0,997$ в ядре $(\Gamma_f)_1$, при $t > 40$, удавалось с большей точностью обеспечить профили $T(0, r, t) \approx 1$, $u(0, r, t) \approx 0,2(1-r^2)$.

К аналогичному демпфирующему эффекту приводило условие

$$u(0, r, t) = \psi(t) [0,2(1-r^2) - bq \varphi], \quad q = (p(0, r, t) - p_s) / p_a, \quad (17)$$

где $b \approx 1/\gamma \approx 0,7$; $p_s/p_a \approx 1,009$. Тогда, согласно (6), $\beta \approx -1$, $|\xi| \ll 1$ на $(\Gamma_f)_1$. Для этого варианта графики $p(0, 0, t)/p_a$, $m_1(t)/\pi$, $m_2(t)/\pi$ близки к представленным на фиг. 1,2.

Заметим, что в условиях (16), (17) величина $p(0, r, t)$ иногда может быть заменена средним по сечению Γ_1 давлением $\bar{p}(t)$ (либо $p(0, r_1, t)$, $r_1 = \text{const} \in (0, 1)$), что облегчает коррекцию профиля скорости на квазистационарном режиме.

Для сравнения на фиг. 1,2 штриховыми кривыми даны $p(0, 0, t)/p_a$, $m_1(t)/\pi$, $m_2(t)/\pi$ из решения варианта, в котором использованы условия (17) с $b=0$. Тогда $\beta_1 \approx 0$, $\xi \approx 1$ на $(\Gamma_f)_1$ и затухание колебаний происходит относительно медленно (при $Re_c \geq 10^3$ затухание обеспечивается в основном вязким трением на боковой стенке).

Аналогичные модели звукопоглощающих входных сечений с дозвуковым вихревым потоком были также успешно использованы при расчетах трансзвуковых течений вязкого газа в сопловых каналах, в плоском канале со сложными изломами стенок и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
2. Engquist B., Maida A. Numerical radiation boundary conditions for unsteady transonic flow.— Math. Comput., 1977, v. 31, № 139, p. 629–651.
3. Hedstrom G. W. Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems.— J. Comput. Phys., 1979, v. 30, № 2, p. 222–237.
4. Ruby D. H., Strikwerda J. C. A nonreflecting outflow boundary conditions for subsonic Navier–Stokes calculations.— J. Comput. Phys., 1980, v. 36, № 1, p. 55–70.
5. Федорченко А. Т. О расчетах двумерных нестационарных течений вязкого газа в коротком цилиндрическом канале с торцовым вдувом.— Изв. АН СССР. Механ. жидк. и газа, 1979, № 1, с. 9–17.
6. Федорченко А. Т. О методике численного исследования нестационарных дозвуковых течений вязкого газа в каналах — ЖВМ и МФ, 1981, т. 21, № 5, с. 1215–1232.
7. Федорченко А. Т. Модели проницаемых границ для нестационарных задач вычислительной газовой динамики.— Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 4, с. 826–830.
8. Thomas P. D. Boundary conditions for implicit solutions to the compressible Navier–Stokes equations in finite computational domains.— AIAA Comput. Fluid Dynamics Conf., Williamsburg, Va., 1979, p. 14–26.
9. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
15.II.1983