АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 1

УДК 534.24

МНОГОКРАТНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ЛУЧА ОТ ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА

Фролов В. М.

Исследована двумерная задача определения статистических свойств угла прихода, времени распространения и интенсивности звука при многократном отражении луча от взволнованной поверхности слоистого океана. В качестве примеров рассмотрены случаи однородного слоя и среды с постоянным градиентом скорости звука.

В океанических экспериментах при приеме отраженных от взволнованной поверхности звуковых лучей следящими направленными антеннами наблюдаются флуктуации углов прихода этих лучей [1], флуктуации времени распространения сигнала по ним [1, 2], а также изменение во времени интенсивности звука. Теоретические оценки флуктуаций угла прихода луча, отраженного от неровной границы однородной среды, для различных моделей неровной поверхности можно найти, например, в работах [3–5]. Здесь будет рассмотрена двумерная задача определения статистических свойств угла прихода, времени распространения и интенсивности звука зависит только от глубины, поверхность неровная, а дно плоское ницы слоистой среды. Предполагается, что поверхность имеет малый средний квадратичный угол наклона неровностей и равные нулю средние значения смещений и наклонов.

Рассмотрим горизонтально стратифицированный океан, где скорость звука зависит только от глубины, поверхность неровная, а дно плоское и горизонтальное. На глубине h расположен точечный источник звуковых волн, а на расстоянии r по горизонтали от него на глубине z — направленный приемник. Предполагается, что приемник находится не в зоне тени или около ее границ и не на каустике или вблизи нее. Пусть приемник следит за одним из попадающих в него лучей, который отражается N раз от поверхности, поворачивая при этом в толще среды или отражаясь от дна. Поставим задачу определения статистических характеристик сигнала, приходящего по этому лучу: флуктуаций угла прихода, времени распространения, амплитуды и интенсивности.

Обозначим углы скольжения невозмущенного луча (т. е. луча, попадающего в приемник в случае ровной поверхности) у источника, поверхности и приемника через χ, α и ψ соответственно. Для какого-либо экземпляра неровной поверхности этот луч в общем случае не попадет в приемник, а туда придет луч, вышедший из источника под близким к χ углом. Горизонтальное расстояние, проходимое таким лучом от источника до приемника при N-кратном отражении от неровной поверхности, должно быть равно r. Этот луч будет отражаться уже от возмущенных точек поверхности, расстояния которых до невозмущенных обозначим через δx_i, $i=1, \ldots, N$. В этих точках смещения ζ_i' и наклоны ζ_{ix}' поверхности представим в виде разложений в ряд Тейлора с точностью до линейных по δx_i членов:

$$\zeta_i'=\zeta_i+\zeta_{ix}\delta x_i, \quad \zeta_{ix}'=\zeta_{ix}+\zeta_{ixx}\delta x_i, \tag{1}$$

где ζ_i обозначает смещение в невозмущенной точке отражения, индекс x — производную по x, а штрих всюду будет обозначать, что берется возмущенное значение. Такое представление ζ_i' и ζ_{ix}' учитывает только первые и вторые степени смещений, наклонов и кривизны (δx_i пропорционально им). В дальнейшем с такой же точностью будут проводиться и разложения других величин.

Рассмотрим вначале флуктуации угла прихода луча. Введем обозначения: $\delta\psi=\psi'-\psi$ для искомого изменения угла, а также $\varkappa_i=2\sum_{j=1}^{i}\zeta_{jx}'$ и $\eta_i=\varkappa_N-\varkappa_i$. Запишем некоторые соотношения, справедливые для углов скольжения луча α_i и β_i соответственно до и после i-го отражения:

$$\beta_i=\alpha_i+2\zeta_{ix}', \quad \alpha_i=\beta_{i-1}, \quad \beta_i=\alpha_1+\varkappa_i,$$
$$\cos\alpha_1=n_1\cos\chi', \quad \cos\beta_N=n_2\cos\psi', \tag{2}$$

где $n_{1,2}=c_0/c_{1,2}$ — показатель преломления на горизонтах источника и приемника. Уравнение для $\delta\psi$ будем искать из условия постоянства расстояния, проходимого лучом по горизонтали от источника до приемника. Для ровной поверхности это расстояние представим как сумму $r=r_h+(N-1)D+r_z$, где r_h, r_z и D — соответственно расстояния по горизонтали от источника до первого отражения, от последнего отражения до приемника и длина цикла. В случае неровной поверхности первое из этих расстояний, например, для случая, когда оно меньше $D/2$, равно $\cos\alpha_1\int_{\zeta_1'}^{h}dz(n^2-\cos^2\alpha_1)^{-1/2}$ [6]. Представим его как $r_h'\to\zeta_1'\operatorname{ctg}\alpha_1$, где $r_h'=\cos\alpha_1\int_0^h dz(n^2-\cos^2\alpha_1)^{-1/2}$ — возмущенное (по отношению к углу скольжения у поверхности) расстояние, проходимое лучом по горизонтали от источника до плоскости $z=0$. Ясно, что если r_h больше $D/2$, то для неровной поверхности оно также запишется в виде $r_h'-\zeta_1'\operatorname{ctg}\alpha_1$, где r_h' — возмущенное расстояние. Аналогично выразятся и другие слагаемые в r. В результате r будет равно (условимся сумму от 1 до N везде писать без индексов)

$$r=r_h'+\sum_{i=1}^{N-1}D_i'+r_z'-\sum\zeta_i'(\operatorname{ctg}\alpha_i+\operatorname{ctg}\beta_i). \tag{3}$$

Возмущенное расстояние r_h' разложим в ряд Тейлора: $r_h'=r_h+\delta\alpha_1 r_{h\alpha}+\delta\alpha_1^2 r_{h\alpha\alpha}/2$, где $\delta\alpha_1=\alpha_1-\alpha$, а α как индекс означает дифференцирование по α. Выразив $\delta\alpha_1$ через $\delta\psi$ с учетом соотношений (2), r_h' запишем в виде $r_h'=r_h+r_{h\alpha}[\delta\psi\nu-\varkappa_N+\delta\psi^2(1-\nu^2)\operatorname{ctg}\alpha/2]+r_{h\alpha\alpha}(\delta\psi\nu-\varkappa_N)^2/2$, где $\nu=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\psi$.

Аналогично выразим и другие возмущенные расстояния. Входящая в последнее слагаемое уравнения (3) сумма котангенсов равна $\operatorname{ctg}\alpha_i+\operatorname{ctg}\beta_i=2(\operatorname{ctg}\alpha-\delta\psi\nu/\sin^2\alpha)+(\eta_i+\eta_{i-1})/\sin^2\alpha$.

Перед тем, как подставить полученные величины в уравнение (3), заметим, что все смещения и наклоны до сих пор рассматривались в возмущенных точках отражения. Чтобы привязать их к невозмущенным точкам, найдем δx_i:

$$\delta x_i=-\delta\psi\nu a_i+2D_\alpha\sum_{j=i+1}^{N}(j-i)\zeta_{jx}+\operatorname{ctg}\alpha\left(\zeta_i+2\sum_{j=i+1}^{N}\zeta_j\right), \tag{4}$$

где $a_i=r_{z\alpha}+(N-i)D_\alpha$. Предполагая, что поверхность статистически однородна и что отражения происходят в точках, расстояния между которыми намного превышают радиус корреляции неровностей l, заметим, что из всевозможных произведений величин ζ_i, ζ_{jx} и ζ_{hxx} после усреднения (обозначается угловыми скобками) останутся только $\langle\zeta_i^2\rangle=\sigma^2$ (дисперсия смещений поверхности), $\langle\zeta_{ix}^2\rangle=\gamma_x^2\equiv\gamma^2$ (дисперсия наклонов) и $\langle\zeta_i\zeta_{ixx}\rangle=-\gamma^2$, остальные равны нулю. Принимая это во внимание и подставляя выражение (4) в разложения (1), найдем: $\zeta_i'=\zeta_i-\zeta_{ix}\delta\psi\nu a_i$, $\zeta_{ix}'=\zeta_{ix}-\zeta_{ixx}\delta\psi\nu a_i+\zeta_i\zeta_{ixx}\operatorname{ctg}\alpha$.

С учетом всего сказанного из уравнения (3) получим квадратное урав-

нение относительно $\delta\psi$, решая которое найдем

$$\delta\psi=\frac{2}{r_\alpha\nu}\Big\{\operatorname{ctg}\alpha\sum\zeta_i+\sum b_i\zeta_{ix}-\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{r_\alpha^2\nu^2}\left(A+\frac{4r_\alpha\nu^2}{\sin 2\alpha}\right)\times$$
$$\times\sum\zeta_i^2-\sum\zeta_{ix}^2\left[b_{i\alpha}+\frac{Ab_i^2}{r_\alpha^2\nu^2}+\frac{2b_i}{r_\alpha}(a_i\operatorname{ctg}\alpha-b_{i\alpha})\right]+$$
$$+\operatorname{ctg}\alpha\sum\zeta_i\zeta_{ixx}b_i\left(1-\frac{2a_i}{r_\alpha}\right)\Big\}, \tag{5}$$

где $A=(1-\nu^2)\operatorname{ctg}\alpha r_\alpha+\nu^2 r_{\alpha\alpha}$, $b_i=r_{h\alpha}+(i-1)D_\alpha$. Усредняя $\delta\psi$ и $\delta\psi^2$ по ансамблю реализаций поверхности, получим искомые среднее значение и средний квадрат флуктуаций угла прихода луча:

$$\langle\delta\psi\rangle=-\frac{2N}{r_\alpha^3\nu^3}\Big\{\sigma^2\operatorname{ctg}^2\alpha\left(A+\frac{4r_\alpha\nu^2}{\sin 2\alpha}\right)+\gamma^2[A(r_{2\alpha}^2+Mr_{N\alpha}^2)+$$
$$+r_\alpha\nu^2(r_{1\alpha}r_{2\alpha\alpha}+r_\alpha r_{2\alpha}\operatorname{ctg}\alpha-2Mr_{N\alpha}r_{N\alpha\alpha})]\Big\}, \tag{6}$$

$$\langle\delta\psi^2\rangle=\frac{4N}{r_\alpha^2\nu^2}[\sigma^2\operatorname{ctg}^2\alpha+\gamma^2(r_{2\alpha}^2+Mr_{N\alpha}^2)], \tag{7}$$

где $r_N=(N-1)D/2$, $r_1=r_2-z_h$, $r_2=r_h+r_N$, $M=(N+1)/3(N-1)$. Заметим, что в данной постановке задачи средний квадрат флуктуаций какой-либо величины равен дисперсии, так как среднее значение выражается через σ^2 и γ^2.

Рассмотрим некоторые частные случаи, когда выражения (6), (7) заметно упрощаются. Например, при распространении луча в однородном слое толщины H имеем

$$\langle\delta\psi\rangle=-\frac{2N\operatorname{ctg}\alpha}{z_0^2}[2\sigma^2\sin^4\alpha+\gamma^2(2Mz_N^2-z_1z_2)],$$
$$\langle\delta\psi^2\rangle=\frac{N}{z_0^2}[\sigma^2\sin^2 2\alpha+4\gamma^2(z_2^2+Mz_N^2)],$$

где $z_N=(N-1)H$, $z_1=z-h$, $z_2=h+z_N$, $z_0=h+2z_N+z$.

Для случая однократного отражения формула (7) дает $\langle\delta\psi^2\rangle=4(\sigma^2\operatorname{ctg}^2\alpha+\gamma^2 r_{h\alpha}^2)/\nu^2(r_{h\alpha}+r_{z\alpha})^2$. Допустим, что смещениями поверхности можно пренебречь. Тогда $\langle\delta\psi^2\rangle$ будет определяться отношением $r_{h\alpha}/(r_{h\alpha}+r_{z\alpha})$. Посмотрим, каким оно может быть для различных сред. Рассмотрим, например, однородную среду и среду с постоянным относительным градиентом скорости звука a. В первом случае горизонтальное расстояние R, проходимое лучом от поверхности до горизонта z, равно $z\operatorname{ctg}\alpha$, а производная $R_\alpha=-z/\sin^2\alpha=-2R/\sin 2\alpha$. Для второй среды длина цикла $D=2\operatorname{tg}\alpha/a$ [6], а $D_\alpha=2/a\cos^2\alpha=2D/\sin 2\alpha$, т. е. производные отличаются знаком. Следовательно, если взять однородный слой, лежащий на полупространстве с постоянным a, то при условии, что расстояния, проходимые лучом по горизонтали в слое и полупространстве, равны, будем иметь $(R+D)_\alpha=0$. Это значит, что если источник расположен на границе слоя и полупространства и $r_h=R+D$, то $\langle\delta\psi^2\rangle=0$. Если же и приемник расположен на этой границе, то при равенстве расстояний, проходимых лучом от источника до приемника в слое и полупространстве, будет равна нулю сумма $r_{h\alpha}+r_{z\alpha}$. И хотя в этом случае из-за ограничений, которые накладывает метод расчета и которые приведены в конце статьи, непосредственно полученными формулами пользоваться нельзя, этот пример показывает, что флуктуации угла прихода луча могут быть и велики.

Ситуации, в которых флуктуации углов прихода луча малы или велики, легко понять из следующих рассуждений. Пусть $r_{h\alpha}=0$. Это значит, что лучи всегда попадают в невозмущенную точку отражения, откуда в приемник могут прийти только под невозмущенным углом ψ. Пусть теперь $r_{h\alpha}+r_{z\alpha}=0$. Это значит, что под каким бы (в пределах ограничения ме-

тода) углом ни выходил луч, он все равно придет в приемник и его отклонение от невозмущенного значения может быть велико.

Рассмотрим теперь пространственную корреляцию флуктуаций углов прихода лучей. Пусть координаты второго приемника будут $\{r+\Delta x,\ z+\Delta z\}$, а угол скольжения у поверхности невозмущенного луча, попадающего в него, $\beta=\alpha+\Delta\alpha$, причем $\Delta\alpha$ зависит от Δx и Δz. Если пренебречь изменением показателя преломления в слое $\{z,\ z+\Delta z\}$, то в линейном приближении

$$\Delta\alpha=(\Delta x-\Delta z\operatorname{ctg}\psi)/r_\alpha. \tag{8}$$

Для второй точки приема флуктуации угла прихода луча выражаются аналогично формуле (5): $\delta\psi_2=2(\operatorname{ctg}\beta\Sigma\zeta_{i2}+\Sigma b_{i2}\zeta_{ix2})/r_\beta\nu_2$, где индекс 2 означает, что соответствующая величина берется для второго луча. Разложим в ряд по $\Delta\alpha$ стоящие здесь величины (кроме ζ_{i2} и ζ_{ix2}) и учтем, что для статистически однородных поверхностей справедливы соотношения [7]: $\langle\zeta_i\zeta_{ix2}\rangle=-\langle\zeta_{i2}\zeta_{ix}\rangle=\sigma^2w'(\Delta x_i)$ и $\langle\zeta_{ix}\zeta_{ix2}\rangle=-\sigma^2w''(\Delta x_i)$, где $\Delta x_i=\Delta\alpha b_i$, а $w(\Delta x_i)$ — коэффициент корреляции смещений поверхности. Усредняя произведение $\delta\psi$ и $\delta\psi_2$, получим пространственную функцию корреляции углов:

$$\langle\delta\psi\delta\psi_2\rangle=\frac{4\sigma^2}{r_\alpha^2\nu^2}\left[1+\Delta\alpha\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\psi}-\frac{r_{\alpha\alpha}}{r_\alpha}\operatorname{ctg}\alpha\right)\right]\times$$
$$\times\left[\operatorname{ctg}^2\alpha\left(1-\frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha}\right)\sum w(\Delta x_i)+\Delta\alpha\operatorname{ctg}\alpha\sum\left(\frac{2b_i}{\sin 2\alpha}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+b_{i\alpha}\right)w'(\Delta x_i)-\sum b_i(b_i+\Delta\alpha b_{i\alpha})w''(\Delta x_i)\right]. \tag{9}$$

Чтобы сделать оценку радиуса корреляции флуктуаций углов прихода лучей, пренебрежем в формуле (9) слагаемыми с $\Delta\alpha$ и предположим, что источник находится на поверхности, характеризующейся гауссовым коэффициентом корреляции $\exp[-(\Delta x_j/l)^2]$. Нормируя выражение (9) на (7) и учитывая, что в этом случае $r_h=D$, $b_j=jD_\alpha$, $\Delta x_j=j\Delta\alpha D_\alpha$, получим коэффициент корреляции

$$K_{\delta\psi}\simeq\frac{\sum\exp[-(\Delta x_j/l)^2]+(2D_\alpha^2/l^2)\operatorname{tg}^2\alpha\sum j^2\exp[-(\Delta x_j/l)^2]}{N[1+D_\alpha^2\operatorname{tg}^2\alpha(N+1)(2N+1)/3l^2]}.$$

Определив радиус корреляции по уменьшению $K_{\delta\psi}$, например, в e раз, можно найти соответствующую этому величину $\Delta\alpha_0$.

Рассмотрим в качестве примера однородный слой и среду с постоянным a. В этих случаях $K_{\delta\psi}$ описывается функцией $K_{\delta\psi}=\Sigma j^2e^{-j^2\varepsilon}/\Sigma j^2$, где для однородного слоя (при $H\gg l$) $\varepsilon=(2\Delta\alpha H/l\sin^2\alpha)^2$, а для среды с градиентом скорости звука (при $D\gg l$) $\varepsilon=(2\Delta\alpha D/l\sin 2\alpha)^2$. Учитывая, что, согласно соотношению (8), горизонтальный радиус корреляции $\rho_г$ равен $\Delta\alpha_0|r_\alpha|$, для слоя получим независящую от α величину $\rho_г=l\sqrt{\varepsilon_N}(N+z/2H)$, а для среды с постоянным a — $\rho_г=l\sqrt{\varepsilon_N}(N-r_z\sin\alpha/D\sin\psi)$, где ε_N — значение ε, при котором $K_{\delta\psi}(N)$ спадает в e раз. Если точки наблюдения находятся недалеко от точки последнего отражения ($z\ll H$ и $r_z\ll D$), то в обоих случаях $\rho_г$ выражается одинаковой формулой: $\rho_г\simeq N\sqrt{\varepsilon_N}l$. Любопытно, что, вычислив множитель $N\sqrt{\varepsilon_N}$ обнаружим, что он растет с увеличением числа отражений: 1; 1,13; 1,18; 1,23 (соответственно для $N=1$, 2, 3, 4). Увеличение радиуса корреляции с ростом N (при фиксированных корреспондирующих точках длина цикла луча при этом уменьшается) объясняется уменьшением расстояний Δx_j между невозмущенными точками отражений лучей, приходящих в разнесенные по горизонтали точки наблюдения, что приводит к росту корреляции смещений поверхности в этих точках.

Заканчивая рассмотрение углов прихода, заметим, что выражение (8) позволяет сделать вывод о соотношении между горизонтальным и вертикальным радиусами корреляции любой характеристики лучей (необязательно флуктуаций углов). Действительно, радиус корреляции определя-

ется неким значением $\Delta\alpha_0$. При этом, как уже отмечалось, $\rho_г$ равен $\Delta\alpha|r_\alpha|$, а вертикальный радиус корреляции $\rho_в=\Delta\alpha_0|r_\alpha|\operatorname{tg}\psi$, откуда отношение $\rho_в/\rho_г=\operatorname{tg}\psi$, что в случае однородной среды совпадает с оценкой этого отношения, данной в работе [8].

Перейдем к расчету флуктуаций времени распространения звука по лучу. Аналогично тому, что было написано для расстояния r в случае неровной поверхности, можно найти и для возмущенного времени распространения t':

$$t'=t_h'+\sum_{i=1}^{N-1}\Delta t_i'+t_z'-\frac{1}{c_0}\sum\zeta_i\left(\frac{1}{\sin\alpha_i}+\frac{1}{\sin\beta_i}\right), \tag{10}$$

где $\Delta t_i'$ — возмущенное время пробега i-го цикла. Раскладывая возмущенные времена, стоящие в выражении (10), в ряды Тейлора, найдем, что флуктуации времени распространения звука зависят от производных по углу α времен пробега и расстояний, проходимых лучом по горизонтали. Посмотрим, как связаны эти величины в плоско-слоистой среде. Если луч не поворачивает в среде, то расстояние r и время пробега t определяются формулами [6]:

$$r=\cos\chi\int_h^z dz\,(n^2-\cos^2\chi)^{-1/2},\quad t=c_1^{-1}\int_h^z dz\,n^2(n^2-\cos^2\chi)^{-1/2}.$$

Продифференцировав r и t по χ, увидим, что отношение r_χ/t_χ равно $c_1/\cos\chi$ и не зависит от положения точки наблюдения. В том случае, когда луч поворачивает, т. е. когда существует отрезок луча, на котором $z=z_m$, где $n(z_m)=\cos\chi$, после дифференцирования получаем то же соотношение между r_χ и t_χ. Ясно также, что отражения от поверхности и дна не изменят это соотношение. Таким образом, для любого луча, распространяющегося в плоско-слоистой среде, существует инвариант: $r_\chi/t_\chi=c_1/\cos\chi$. С учетом этого

$$\delta t=-\frac{2\sin\alpha}{c_0r_\alpha}\left(r_\alpha\sum\zeta_i+\operatorname{ctg}^2\alpha\sum\zeta_i^2-\sum a_ib_i\zeta_{ix}^2\right). \tag{11}$$

Усредняя это выражение и его квадрат, найдем

$$\langle\delta t\rangle=-\frac{2N\sin\alpha}{c_0r_\alpha}[\sigma^2\operatorname{ctg}^2\alpha+\gamma^2(Mr_{N\alpha}^2-r_{2\alpha}r_{3\alpha})], \tag{12}$$

$$\langle\delta t^2\rangle=4N\sigma^2c_0^{-2}\sin^2\alpha, \tag{13}$$

где $r_3=z_z+r_N$.

Интересно, что дисперсия флуктуаций времени распространения (13) зависит лишь от смещений поверхности, из чего можно сделать следующее заключение. Известно [9], что для пологих крупномасштабных неровностей с нормальным распределением смещений в приближении Кирхгофа среднее поле равно $p_0\exp(-2\omega^2c_0^{-2}\sigma^2\sin^2\alpha)$, где p_0 — поле волны, отраженной от ровной поверхности. В нашем случае, если считать, что флуктуации поля определяются в основном флуктуациями фазы, то среднее поле можно представить как $p_0\langle\exp(-i\omega\delta t)\rangle=p_0\exp(-\omega^2\langle\delta t^2\rangle/2)=$ $=p_0\exp(-2N\omega^2c_0^{-2}\sigma^2\sin^2\alpha)$, т. е. многократность отражения приводит к появлению множителя N в экспоненте.

Посмотрим теперь, с запаздыванием или с опережением приходит звук по сравнению со случаем ровной поверхности. Для однородного слоя из формулы (12) следует

$$\langle\delta t\rangle=\frac{2N}{c_0z_0\sin\alpha}\left\{\frac{\sigma^2\sin^2 2\alpha}{4}-\gamma^2\left[z_2z_3+\frac{2(N-2)}{3(N-1)}z_N^2\right]\right\},\qquad z_3=z+z_N$$

откуда видно, что из-за смещений звук приходит позднее, а из-за наклонов — раньше, общее же среднее изменение времени распространения определяется соотношением между ними. Аналогичная ситуация будет и

для лучей, отраженных от дна слоистого океана, так как знак производных $r_{j\alpha}$ в этом случае тот же, что и в однородном слое. Иное дело, если лучи поворачивают в среде. Рассмотрим, например, среду с постоянным градиентом скорости звука, в которой пусть для простоты источник и приемник находятся у поверхности. Тогда получим $\langle\delta t\rangle=-(2/c_0D)[\sigma^2\cos^3\alpha-(N^2-1)\gamma^2D^2/6\cos\alpha]$, т. е. зависимость флуктуаций времени распространения от смещений и наклонов поверхности противоположна их зависимости в случае однородной среды.

Рассмотрим пространственную корреляцию флуктуаций времени распространения звука по близким лучам, равную согласно формуле (11)

$$\langle\delta t_1\delta t_2\rangle\simeq 4\sigma^2c_0^{-2}\sin^2\alpha\Sigma w(\Delta x_i), \tag{14}$$

где, как и раньше, $\Delta x_i=\Delta\alpha b_i$. Коэффициент корреляции выразится формулой $K_{\delta t}=N^{-1}\Sigma w(\Delta x_i)$, которая в случае, когда источник находится на поверхности, описываемой гауссовым коэффициентом корреляции смещений, преобразуется в $K_{\delta t}=N^{-1}\Sigma\exp(-j^2\varepsilon)$, где $\varepsilon=(\Delta\alpha D_\alpha/l)^2$. Формулы для определения радиусов корреляции $\rho_г$ и $\rho_в$ те же, что были для радиусов корреляции флуктуаций углов прихода лучей, но, естественно, с другими значениями ε_N. Но и в этом случае множитель $N\sqrt{\varepsilon_N}$ растет с увеличением числа отражений: 1; 1,41; 1,64; 1,79 (для N=1, 2, 3, 4), что также объясняется уменьшением расстояний Δx_i между невозмущенными точками отражений лучей.

Используя формулы (5), (7), (11) и (13), легко найти коэффициент взаимной корреляции флуктуаций угла прихода и времени распространения:

$$K_{\delta\psi,\delta t}=\frac{\langle\delta\psi\,\delta t\rangle}{(\langle\delta\psi^2\rangle\langle\delta t^2\rangle)^{1/2}}=[1+\gamma^2\sigma^{-2}\operatorname{tg}^2\alpha(r_{2\alpha}^2+Mr_{N\alpha}^2)]^{-1/2}.$$

До сих пор считалось, что прием осуществляется в одной точке. Полученными для флуктуаций времени распространения звука формулами можно воспользоваться, чтобы найти флуктуации угла прихода сигнала на линейную антенну длины L. В этом случае имеем дело уже с семейством лучей, а среднее по длине антенны отклонение луча определяется разностью времен распространения сигнала по лучам, приходящим на крайние приемники антенны [10], координаты которых пусть будут $\{r, z\}$ и $\{r+\Delta x, z+\Delta z\}$, причем $L=(\Delta x^2+\Delta z^2)^{1/2}$. Будем считать, что углы скольжения крайних лучей семейства одинаковы и пренебрежем в расчетах изменением на длине антенны скорости звука и производных горизонтальных расстояний по углу α, что можно сделать, когда антенна имеет не слишком большие размеры и расположена вдали от каустик. Тогда для ровной поверхности имеем $\sin(\psi+\varphi)=c_2(t_2-t_1)/L$, а для неровной — $\sin(\psi'+\varphi)=c_2(t_2'-t_1')/L$, где $\varphi=\operatorname{arctg}(\Delta x/\Delta z)$. Отсюда, разлагая $\sin(\psi'+\varphi)$ в ряд Тейлора, получим:

$$\delta\psi_a=\frac{c_2(\delta t_2-\delta t_1)}{L\cos(\psi+\varphi)}\left[1+\frac{c_2\sin(\psi+\varphi)}{2L\cos^2(\psi+\varphi)}(\delta t_2-\delta t_1)\right].$$

Усредняя $\delta\psi_a$ и его квадрат с учетом выражений (13) и (14), найдем

$$\langle\delta\psi_a\rangle=\frac{4N\sigma^2\sin^2\alpha\sin(\psi+\varphi)}{L^2n_2^2\cos^3(\psi+\varphi)}\left[1-\frac{1}{N}\sum w(\Delta x_i)\right],$$

$$\langle\delta\psi_a^2\rangle=2\langle\delta\psi_a\rangle\operatorname{ctg}(\psi+\varphi).$$

Наконец, рассмотрим флуктуации интенсивности приходящего по данному лучу звука. Если поверхность ровная, то в исследуемом здесь двумерном случае излучаемая в телесный угол $\Delta\chi$ мощность $\Delta W=W\Delta\chi/2\pi$ (W — полная излучаемая мощность) протекает через площадку единичной длины в направлении оси y $\Delta S=|dr/d\chi|\Delta\chi\sin\alpha$. Интенсивность при этом равна $I=W/2\pi\sin\psi|dr/d\chi|$. В случае неровной поверхности интенсивность запишется так: $I'=W/2\pi\sin\psi'|dr/d\chi'|$. Учитывая, что $|dr/d\chi'|=\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{tg}\chi'|dr/d\alpha_1|$, разложим входящие в I' величины в ряд теории возмущений. В результате получим формулу для вычисления относи-

тельных флуктуаций интенсивности $\delta I/I$, в которую будут входить уже и третьи производные горизонтальных расстояний и которую не будем выписывать из-за ее громоздкости. Приведем лишь среднее значение этих флуктуаций и их дисперсию:

$$\frac{\langle\delta I\rangle}{I}=\frac{2N\sigma^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{r_\alpha^2}\left\{\frac{2}{\cos^2\alpha}+\frac{6}{\sin^2\alpha}-s[1+3(q+\mu)\operatorname{ctg}^2\alpha]-\right.$$

$$\left.-4q\mu\operatorname{ctg}^2\alpha+3b\left(\frac{4}{\sin 2\alpha}+\frac{r_{\alpha\alpha}}{r_\alpha}\right)-\frac{r_{\alpha\alpha\alpha}}{r_\alpha}\right\}+\frac{2N\gamma^2}{r_\alpha^2}\left\{r_{2\alpha\alpha}r_{3\alpha\alpha}+\right.$$

$$+r_{2\alpha}r_{3\alpha}[1+(q+\mu-2q\mu)\operatorname{ctg}^2\alpha]+r_{2\alpha}^2(1-\mu)[1+(1-3\mu)\operatorname{ctg}^2\alpha]+$$

$$+r_{3\alpha}^2(1-q)[1+(1-3q)\operatorname{ctg}^2\alpha]+s\operatorname{ctg}\alpha\frac{r_{2\alpha}^2r_{3\alpha\alpha}+r_{3\alpha}^2r_{2\alpha\alpha}}{r_\alpha}+$$

$$+\frac{f}{r_\alpha}[(1-2\mu)r_{2\alpha}-(1-2q)r_{3\alpha}]\operatorname{ctg}\alpha+3\frac{f^2}{r_\alpha^2}-\frac{r_{2\alpha}^2r_{3\alpha\alpha\alpha}+r_{3\alpha}^2r_{2\alpha\alpha\alpha}}{r_\alpha}+$$

$$+Mr_{N\alpha}^2\left[2q(q-1)+2\mu(\mu-1)+s\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+b\operatorname{ctg}\alpha\right)+\left(2b+\frac{r_{\alpha\alpha}}{r_\alpha}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{r_{\alpha\alpha}}{r_\alpha}-2\frac{r_{N\alpha\alpha}}{r_{N\alpha}}\right)+2\frac{r_{N\alpha\alpha}^2}{r_{N\alpha}^2}+2\frac{r_{N\alpha\alpha\alpha}}{r_{N\alpha}}-\frac{r_{\alpha\alpha\alpha}}{r_\alpha}\right]\right\}, \tag{15}$$

$$\frac{\langle\delta I^2\rangle}{I^2}=\frac{4N\sigma^2}{r_\alpha^2}\left(b\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)^2+\frac{4N\gamma^2}{r_\alpha^2}\left\{\left[\frac{f}{r_\alpha}+(qr_{3\alpha}-\mu r_{2\alpha})\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\operatorname{ctg}\alpha\right]^2+M[(\operatorname{ctg}\alpha-b)r_{N\alpha}+r_{N\alpha\alpha}]^2-2\left(b\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)(r_{2\alpha}r_{3\alpha}-Mr_{N\alpha}^2)\right\}+$$

$$+\frac{4N}{R^2r_\alpha^2}\left[r_{2\alpha}^2r_{3\alpha}^2+Mr_{N\alpha}^2\left(r_\alpha^2-6r_{2\alpha}r_{3\alpha}+\frac{3N^2-7}{20}D_\alpha^2\right)\right], \tag{16}$$

где $q=1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\chi$, $\mu=1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\psi$, $s=1-\mu-q$, $b=s\operatorname{ctg}\alpha+\frac{r_{\alpha\alpha}}{r_\alpha}$, $f=$ $=r_{2\alpha}r_{3\alpha\alpha}-r_{3\alpha}r_{2\alpha\alpha}$, а R – среднеквадратичный радиус кривизны поверхности. Для однородного слоя формулы (15), (16) преобразуются в следующие:

$$\frac{\langle\delta I\rangle}{I}=\frac{2N\sigma^2\sin^2\alpha}{z_0^2}(3\sin^2\alpha-1)+\frac{2N\gamma^2}{\sin^2\alpha}\left[1+3(1+\cos^2\alpha)\frac{Mz_N^2-z_2z_3}{z_0^2}\right],$$

$$\frac{\langle\delta I^2\rangle}{I^2}=\frac{4N}{z_0^2}\left\{\sigma^2\sin^4\alpha+2\gamma^2(Mz_N^2-z_2z_3)+\frac{1}{R^2\sin^4\alpha}\times\right.$$

$$\left.\times\left[z_2^2z_3^2+Mz_N^2z_0^2\left(1-6\frac{z_2z_3}{z_0^2}+\frac{(3N^2-7)D_\alpha^2}{20z_0^2}\right)\right]\right\}.$$

В заключение сделаем оценку области применимости данного метода расчета, исходя из условия, что возмущенные точки отражения не должны отстоять от невозмущенных на расстояния, превышающие радиус корреляции неровностей ($\sqrt{\langle\Delta x_i^2\rangle}<l$), так как только в этом случае справедливы разложения (1). Это условие приводит к неравенству

$$l^2>\frac{\sigma^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{r_\alpha^2}[4b_i^2(N-i)+(b_i-a_i)^2+4a_i^2(i-1)]+4\gamma_i^2\left\{N\frac{a_i^2}{r_\alpha^2}(r_{2\alpha}^2+Mr_{N\alpha}^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{D_\alpha}{r_\alpha}(N-i)(N-i+1)\left[\frac{2(N-i)+1}{6}D_\alpha(b_i-a_i)-a_ib_i\right]\right\}.$$

Кроме того, лучевой метод расчета накладывает ограничение на частоту звука. В работе рассматривались лучи математические, а не физические, которые имеют «конечную толщину», определяемую френелевским объемом [11]. Физический же луч, приходящий в точку наблюдения, не должен захватывать более одной неоднородности поверхности. Попереч-

ный размер френелевского объема этого луча после последнего отражения равен [11, с. 150].

$$b_f=\left\{\lambda\frac{d}{ds^0}\int\limits_0^z\frac{s^0\,dz}{\sqrt{n^2-(s^0)^2}}\right\}^{1/2}, \qquad (17)$$

где λ — длина звуковой волны, а $s^0=\cos\alpha$. Если переписать формулу (17) в используемых нами терминах, то получим $b_f=(\lambda|r_{z\alpha}|/\sin\alpha)^{1/2}$. Ясно, что в случае многократного отражения $b_f=(\lambda|2r_{N\alpha}+r_{z\alpha}|/\sin\alpha)^{1/2}$. Следовательно, длина волны должна удовлетворять условию $\lambda<l^2\sin\alpha/|2r_{N\alpha}+r_{z\alpha}|$.

Автор выражает благодарность Ю. П. Лысанову за интерес к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams R. E., Wei C. H.* Spatial and temporal fluctuations of acoustic signals propagated over long ocean paths.— J. Acoust. Soc. Amer., 1976, v. 59, № 6, p. 1299–1309.
2. *Панкова С. Д., Тужилкин Ю. И.* Измерение флуктуаций времени распространения широкополосного сигнала, отраженного от волнующейся поверхности.— Тр. IX Всесоюз. акуст. конф., Д $III_у$ – 2. М.: Акуст. ин-т, 1977.
3. *Фролов В. М.* Флуктуации направления луча, отраженного от статистически неровной поверхности.— В кн.: Вопросы судостроения. Сер. Акустика, 1977, вып. 8, с. 74–80.
4. *Фролов В. М.* Флуктуации угла прихода луча при отражении от статистически неровной поверхности.— В кн.: Комплексные исследования в Мировом океане, т. 2, вып. 2. М.: Ин-т океанологии АН СССР. 1979, с. 226–229.
5. *Елисеевнин В. А.* Флуктуации угла прихода на линейную антенну плоской волны, распространяющейся в морской среде.— Акуст. журн., 1979, т. 25, № 4, с. 625–628.
6. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
7. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972, с. 46.
8. Акустика океана. / Под ред. Бреховских Л. М. М.: Наука, 1974, с. 351.
9. *Исакович М. А.* Рассеяние волн от статистически шероховатой поверхности.— ЖЭТФ, 1952, № 3(9), с. 305–314.
10. *Кузнецова Н. Г., Чернов Л. А.* Флуктуации угла прихода луча и времени распространения сигнала по лучу в случайно-неоднородной среде.— В кн.: Вопросы судостроения. Сер. Акустика, 1982, вып. 15, с. 5–13.
11. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4.IV.1983