АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 1

УДК 534.222.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ТВЕРДОЙ СРЕДЕ С МЕЛКОМАСШТАБНЫМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Чарная Е. В., Шутилов В. А.

Рассмотрена возможность генерации акустической второй «запрещенной» сдвиговой гармоники в изотропной среде со случайным распределением микронеоднородностей линейной и нелинейной упругости. Проведен расчет эффективных модулей упругости 2-го и 3-го порядков в неоднородных средах.

Как следует из классической нелинейной акустики, при распространении упругих волн конечной амплитуды в однородном изотропном твердом теле или вдоль акустических солей монокристаллов может генерироваться только продольная вторая гармоника, независимо от поляризации основной волны [1, 2]. Однако в реальных твердых телах экспериментально наблюдается «запрещенная» вторая сдвиговая гармоника [3], которая по предположению, впервые высказанному в работах [4, 5], обусловлена неоднородностью среды. В [6, 7] рассмотрена генерация второй сдвиговой гармоники для частного случая твердого тела с остаточными сдвиговыми деформациями, порождающими «запрещенную» гармонику. Между тем, по-видимому, наиболее характерными для реальных сред являются пространственные микронеоднородности модулей упругости. Действительно, в стеклах, например, структурная неоднородность которых является хорошо установленным фактом, существование мелкомасштабных неоднородностей модулей 2-го порядка заметно влияет на скорость звука и даже позволяет объяснить ее аномальную температурную зависимость [8]. Мелкомасштабная структурная неоднородность присуща также и другим твердым телам: ситаллам, металлам, полимерам, твердым растворам и электролитам, сегнетоэлектрикам и магнетикам в области фазовых переходов, кристаллам с дефектами структуры и др., что должно отражаться на наблюдаемых в них нелинейных акустических эффектах. Поскольку же нелинейные свойства среды коррелируют с линейными, то следует ожидать, что в неоднородном твердом теле существует неоднородность и нелинейных модулей упругости. В связи с этим представляется интересным проанализировать нелинейные акустические свойства твердых тел, обладающих пространственными неоднородностями модулей упругости различных порядков. В данной работе приводится расчет эффективных модулей упругости 3-го порядка в неоднородных средах и рассматривается вопрос о возможности генерации второй сдвиговой гармоники при прохождении акустической волны в изотропном твердом теле с мелкомасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями модулей упругости 2-го и 3-го порядков.

Компоненты тензоров этих модулей для неоднородной среды можно записать в виде разложений Фурье по волновым векторам k:

$$c_{ijln}=\overset{0}{c}_{ijln}+\sum_{\mathbf{k}}\overset{\mathbf{k}}{c}_{ijln}\exp(i\mathbf{kr});\qquad c_{ijlnmp}=\overset{0}{c}_{ijlnmp}+\sum_{\mathbf{k}}\overset{\mathbf{k}}{c}_{ijlnmp}\exp(i\mathbf{kr}),\quad (1)$$

где $\overset{0}{c}_{ijln}$ и $\overset{0}{c}_{ijlnmp}$ — модули упругости однородного тела. Подставляя выражения (1) в обобщенный закон Гука

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r})=c_{ijln}(\mathbf{r})\cdot u_{ln}+c_{ijlnmp}(\mathbf{r})\cdot u_{ln}\cdot u_{mp}\quad (2)$$

и учитывая, что деформации u_{ln} также должны быть неоднородными, т. е.

$$u_{ln}(\mathbf{r})=u_{ln}{}^{0}+\sum_{\mathbf{k}} u_{ln}{}^{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{kr}), \tag{3}$$

получим средние по кристаллу значения компонент тензора напряжений $\langle\sigma_{ij}\rangle$, отличающиеся от соответствующих компонент в однородном материале:

$$\langle\sigma_{ij}\rangle=\overset{0}{c}_{ijln}u_{ln}{}^{0}+\sum_{\mathbf{k}} \langle c_{ijln}, u_{ln}\rangle_{\mathbf{k}}+\overset{0}{c}_{ijlnmp}u_{ln}{}^{0}u_{mp}{}^{0}+$$

$$+2\sum_{\mathbf{k}} \langle c_{ijlnmp}, u_{ln}\rangle_{\mathbf{k}}u_{mp}{}^{0}+\overset{0}{c}_{ijlnmp}\sum_{\mathbf{k}} \langle u_{ln}, u_{mp}\rangle_{\mathbf{k}}. \tag{4}$$

Здесь введены обозначения: $\langle c_{ijln}, u_{ln}\rangle_{\mathbf{k}}=\overset{\mathbf{k}}{c}_{ijln}\,\overline{u_{ln}^{\mathbf{k}}}$, ... С помощью уравнения равновесия $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j=0$, используя соотношения (1)—(3), нетрудно выразить корреляторы $\langle c_{ijln}, u_{ln}\rangle_{\mathbf{k}}$, $\langle c_{ijlnmp}, u_{ln}\rangle_{\mathbf{k}}$ и $\langle u_{ln}, u_{mp}\rangle_{\mathbf{k}}$ через корреляторы $\langle c_{ijln}, c_{ij'l'n'}\rangle_{\mathbf{k}}$ и $\langle c_{ijln}, c_{ij'l'n'mp}\rangle_{\mathbf{k}}$, отражающие свойства среды. Тогда уравнение (4) преобразуется к виду $\langle\sigma_{ij}\rangle=\tilde{c}_{ijln}u_{ln}{}^{0}+\tilde{c}_{ijlnmp}u_{ln}{}^{0}u_{mp}{}^{0}$, где $\tilde{c}_{ijlm}$ и $\tilde{c}_{ijlnmp}$ — эффективные модули упругости 2-го и 3-го порядка. Для частного случая слоисто-неоднородного изотропного твердого тела модули упругости, входящие в уравнение $\langle\sigma_{xx}\rangle=\tilde{c}_{11}u_{xx}{}^{0}+\tilde{c}_{111}(u_{xx}{}^{0})^2$, равны:

$$\tilde{c}_{11}=M^0-\sum_{\mathbf{k}} \langle M, M\rangle_{\mathbf{k}}/M^0, \tag{5}$$

$$\tilde{c}_{111}=N^0-\sum_{\mathbf{k}} 3[\langle M, N\rangle_{\mathbf{k}}/M^0+N^0\langle M, M\rangle_{\mathbf{k}}/(M^0)^2], \tag{6}$$

где $M\equiv K+4\mu/3$, $N\equiv 2\mu+3K/2+A+3B+C$, μ, K, A, B, C — коэффициенты в разложении энергии упругой деформации по степеням инвариантов тензора u_{il} [2].

Формула (5) совпадает с соответствующими выражениями, полученными в работе [8], и означает, что в упругонеоднородной среде эффективный линейный модуль упругости равен некоторому среднему значению M^0, из которого вычитается сугубо положительная величина, пропорциональная среднему квадрату амплитуды пространственных флуктуаций упругости. Изменение этой величины, например вследствие отжига, заметно отражается на измеряемых в кварцевом стекле значениях скорости звука и температурного коэффициента скорости [9].

Аналогично из формулы (6) следует, что эффективный модуль упругости третьего порядка $\tilde{c}_{111}$ в неоднородной среде также существенно зависит от флуктуационной добавки, которая по своему смыслу может быть весьма значительной в стеклах, что, по-видимому, проявляется в большом разбросе измеряемых в них нелинейных модулей упругости [10].

Рассмотрим теперь вопрос о возможности генерации «запрещенной» сдвиговой второй гармоники в неоднородном изотропном твердом теле. Уравнение движения, как обычно, запишем в виде

$$\rho\partial^2u_{ij}/\partial t^2=\partial^2\sigma_{il}/\partial x_l\partial x_j, \tag{7}$$

где ρ — плотность тела, u_{ij} — деформации в акустической волне. Для изотропной среды в квадратичном по деформациям приближении тензор σ_{ij} имеет вид [2]

$$\sigma_{ij}=\mu(u_{ij}+u_{ji})+(K-2\mu/3)u_{ll}\delta_{ij}+(\mu+A/4)(u_{li}u_{lj}+$$

$$+u_{il}u_{jl}+u_{li}u_{jl})+{}^1/_2(K-{}^2/_3\mu+B)[(u_{lm})^2\delta_{ij}+2u_{ij}u_{ll}]+$$

$$+B/2(u_{lm}u_{ml}\delta_{ij}+2u_{ji}u_{ll})+A/4u_{li}u_{jl}+C(u_{ll})^2\delta_{ij}. \tag{8}$$

Решение уравнения (7) будем искать в виде суммы $\overset{(1)}{u}_{ij}+\overset{(2)}{u}_{ij}+\overset{(3)}{u}_{ij}$, где $\overset{(1)}{u}_{ij}$ — решение волнового уравнения для однородной среды в линейном

приближении, $u_{ij}^{(2)}$ — дополнительные деформации среды, обусловленные неоднородностью модулей 2-го порядка, $u_{ij}^{(3)}$ — вторые гармоники. Наиболее интересным является случай, когда основная волна имеет поперечную поляризацию, поскольку при этом, как показывает анализ, амплитуда «запрещенной» сдвиговой гармоники монотонно возрастает. Предположим поэтому, что в плоскости $x=0$ на границе среды возбуждаются деформации $u_{yx}(x=0)=u_{yx}^0 \exp(i\omega t)$. Тогда в однородной среде в линейном приближении в направлении оси x будет распространяться сдвиговая волна, поляризованная вдоль оси y:

$$u_{yx}^{(1)}=u_{yx}^0 \exp[i(\omega t-qx)], \tag{9}$$

где $q=\omega\sqrt{\rho/\mu^0}$ — ее волновой вектор.

Дальнейшее рассмотрение проведем на примере двумерной среды, что позволяет, не теряя общности, существенно упростить расчет. В неоднородной среде при прохождении волны (9) возникают дополнительные деформации $u_{ij}^{(2)}$, уравнения для которых можно получить из выражений (7) и (8):

$$\begin{gathered}
\rho\frac{\partial^2 u_{yx}^{(2)}}{\partial t^2}=\mu^0\frac{\partial^2 u_{yx}^{(2)}}{\partial x^2}+\mu^0\frac{\partial^2 u_{xy}^{(2)}}{\partial x^2}+\left(K^0+\frac{4}{3}\mu^0\right)\frac{\partial^2 u_{yy}^{(2)}}{\partial x\,\partial y}+\\
+\left(K^0-\frac{2}{3}\mu^0\right)\frac{\partial^2 u_{xx}^{(2)}}{\partial x\,\partial y}-\sum_{\mathbf{k}} k_x^2\mu^{\mathbf{k}}u_{yx}^0 e^{i\mathbf{kr}}e^{i(\omega t-qx)},\\
\rho\frac{\partial^2 u_{xy}^{(2)}}{\partial t^2}=\mu^0\frac{\partial^2 u_{yx}^{(2)}}{\partial y^2}+\mu^0\frac{\partial^2 u_{xy}^{(2)}}{\partial y^2}+\left(K^0-\frac{2}{3}\mu^0\right)\frac{\partial^2 u_{yy}^{(2)}}{\partial x\,\partial y}+\\
+\left(K^0+\frac{4}{3}\mu^0\right)\frac{\partial^2 u_{xx}^{(2)}}{\partial x\,\partial y}-\sum_{\mathbf{k}} k_y^2\mu^{\mathbf{k}}u_{yx}^0 e^{i\mathbf{kr}}e^{i(\omega t-qx)},\\
\rho\frac{\partial^2 u_{yy}^{(2)}}{\partial t^2}=\mu^0\frac{\partial^2 u_{yx}^{(2)}}{\partial x\,\partial y}+\mu^0\frac{\partial^2 u_{xy}^{(2)}}{\partial x\,\partial y}+\left(K^0+\frac{4}{3}\mu^0\right)\frac{\partial^2 u_{yy}^{(2)}}{\partial y^2}+\\
+\left(K^0-\frac{2}{3}\mu^0\right)\frac{\partial^2 u_{xx}^{(2)}}{\partial y^2}-\sum_{\mathbf{k}} k_x k_y\mu^{\mathbf{k}}u_{yx}^0 e^{i\mathbf{kr}}e^{i(\omega t-qx)},\\
\rho\frac{\partial^2 u_{xx}^{(2)}}{\partial t^2}=\mu^0\frac{\partial^2 u_{yx}^{(2)}}{\partial x\,\partial y}+\mu^0\frac{\partial^2 u_{xy}^{(2)}}{\partial x\,\partial y}+\left(K^0-\frac{2}{3}\mu^0\right)\frac{\partial^2 u_{yy}^{(2)}}{\partial x^2}+\\
+\left(K^0+\frac{4}{3}\mu^0\right)\frac{\partial^2 u_{xx}^{(2)}}{\partial x^2}-\sum_{\mathbf{k}} k_x k_y\mu^{\mathbf{k}}u_{yx}^0 e^{i\mathbf{kr}}e^{i(\omega t-qx)}.
\end{gathered} \tag{10}$$

При выводе соотношений (10) предполагалось, что размеры неоднородностей меньше длины акустической волны, т. е. $q\ll k$, где $\mathbf{k}$ — волновые векторы в разложении Фурье (1). Решение системы (10) имеет следующий вид: $u_{ij}^{(2)}=\sum_{\mathbf{k}} u_{ij,\mathbf{k}}^{(2)}\exp(i\mathbf{kr})\exp i(\omega t-qx)$,

$$u_{yi,\mathbf{k}}^{(2)}=\frac{\mu^{\mathbf{k}}u_{yx}^0 k_x k_i(k_y^2 d-k_x^2)}{k^4\mu^0},\quad u_{xi,\mathbf{k}}^{(2)}=\frac{\mu^{\mathbf{k}}u_{yx}^0 k_y k_i(k_x^2 d-k_y^2)}{k^4\mu^0}$$

$$d=(K^0-2\mu^0/3)/(K^0+4\mu^0/3),\ i=x,\ y. \tag{11}$$

Аналогичным образом из выражений (7) и (8) могут быть получены и уравнения для $u_{ij}^{(3)}$. Однако если учесть, что интерес представляют толь-

ко те решения, в которых амплитуды вторых гармоник не являются быстроосциллирующими функциями и, следовательно, не равны нулю при усреднении по элементам объема, малым по сравнению с длиной акустической волны, но содержащим большое число неоднородностей, то в неоднородной части системы уравнений для $u_{ij}^{(3)}$ следует оставить слагаемые, зависящие только от x по закону $\exp(-2iqx)$. Тогда $u_{xy}^{(3)}=u_{yy}^{(3)}=0$, а уравнения для $u_{yx}^{(3)}$ и $u_{xx}^{(3)}$ оказываются независимыми:

$$\rho\frac{\partial^2 u_{yx}^{(3)}}{\partial t^2}=\mu^0\frac{\partial^2 u_{yx}^{(3)}}{\partial x^2}-$$
$$-4q^2u_{yx}{}^0\exp[2i(\omega t-qx)]\sum_{\mathbf{k}}\left\langle\left(K+\frac{4\mu}{3}+\frac{A}{2}+B\right),(u_{xx}^{(2)}+u_{yy}^{(2)})\right\rangle_{\mathbf{k}},$$
$$\rho\frac{\partial^2 u_{xx}^{(3)}}{\partial t^2}=\left(K^0+\frac{4}{3}\mu^0\right)\frac{\partial^2 u_{xx}^{(3)}}{\partial x^2}-4q^2u_{yx}{}^0\exp[2i(\omega t-qx)]\times$$
$$\times\sum_{\mathbf{k}}\left[\frac{1}{2}\left\langle\left(K+\frac{4\mu}{3}+\frac{A}{2}+B\right),u_{yx}^{(2)}\right\rangle_{\mathbf{k}}+\left\langle\left(\frac{A}{2}+B\right),u_{xy}^{(2)}\right\rangle_{\mathbf{k}}\right]. \tag{12}$$

Уравнения (12) при очевидных граничных условиях $u_{yx}^{(3)}|_{x=0}=u_{xx}^{(3)}|_{x=0}=0$ приводят к следующим выражениям для деформаций в волне удвоенной частоты:

$$u_{yx}^{(3)}=-\frac{iqu_{yx}{}^0}{\mu^0}x\sum_{\mathbf{k}}\left\langle\left(K+\frac{4\mu}{3}+\frac{A}{2}+B\right),(u_{xx}^{(2)}+u_{yy}^{(2)})\right\rangle_{\mathbf{k}}\times$$
$$\times\exp[2i(\omega t-qx)],$$
$$u_{xx}^{(3)}=-\frac{2iq^2u_{yx}{}^0}{\left(K^0+\frac{4}{3}\mu^0\right)}\frac{\sin[(q-q_l)x]}{q^2-q_l{}^2}\sum_{\mathbf{k}}\left[\frac{1}{2}\left\langle\left(K+\frac{4\mu}{3}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{A}{2}+B\right),u_{yx}^{(2)}\right\rangle_{\mathbf{k}}+\left\langle\left(\frac{A}{2}+B\right),u_{xy}^{(2)}\right\rangle_{\mathbf{k}}\right]\exp\{i[2\omega t-(q+q_l)x]\}+u_{xx,0}^{(3)}, \tag{13}$$

где $q_l=\omega[\rho/(K^0+{}^4/_3\mu^0)]^{1/2}$ — волновое число продольной акустической волны, $u_{xx,0}^{(3)}$ — вторая гармоника, генерируемая в однородной среде. Как видно из соотношений (13), амплитуда второй сдвиговой гармоники линейно растет с увеличением x, а добавка к амплитуде второй продольной гармоники, обусловленная неоднородностью твердого тела, осциллирует с ростом x аналогично амплитуде второй продольной гармоники, возбуждаемой в однородном теле. Если бы основная акустическая волна была продольной, то зависимость типа $\sin[(q-q_l)x]$ описывала бы изменение амплитуды сдвиговой второй гармоники.

Нетрудно однако видеть, что для случайного распределения неоднородностей в отсутствие каких-либо избранных направлений, т. е. когда коэффициенты Фурье $\mu^{\mathbf{k}}$, $A^{\mathbf{k}}$ и т. п. зависят только от величины вектора $\mathbf{k}$, но не от его ориентации, усреднение суммы $u_{yy,\mathbf{k}}^{(2)}+u_{xx,\mathbf{k}}^{(2)}$ по возможным ориентациям вектора $\mathbf{k}$ дает ноль. К такому же результату приводит учет в уравнениях (12) тройных корреляторов типа $\langle u_{yx,\mathbf{k}_1}^{(2)}, u_{xx,-\mathbf{k}_2}^{(2)}, \mu^{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}\rangle$. Следовательно, как показывает проведенное рассмотрение, в изотропной среде с изотропными же мелкомасштабными неоднородностями модулей упругости второго и третьего порядка «запрещенная» вторая

сдвиговая гармоника может генерироваться только при условии регулярного распределения этих неоднородностей.

Для того чтобы в изотропном твердом теле возбуждалась «запрещенная» гармоника при случайном распределении неоднородностей, необходимо, чтобы эти неоднородности представляли собой анизотропные образования. (Наличие анизотропных мелкомасштабных образований в изотропной среде отмечается, например, даже в стеклах, где оно регистрируется по интенсивности центральной компоненты деполяризованного рассеянного света [11]). Так, если отлично от нуля локальное значение модуля упругости c_{666}, то выражение для второй сдвиговой гармоники (после суммирования по всем ориентациям вектора $\mathbf{k}$) принимает вид

$$u_{yx}^{(3)} = -iqx(u_{yx}^{0})^2\left(2K^0 + \frac{14}{3}\mu^0\right)\sum_{\mathbf{k}}\langle c_{666}, \mu\rangle_{\mathbf{k}} \Big/ \left[4(\mu^0)^2\left(K^0 + \frac{4}{3}\mu^0\right)\right] \times$$
$$\times \exp[2i(\omega t - qx)].$$

Полученный результат показывает таким образом, что неоднородности модулей упругости в изотропном теле приводят к генерации «запрещенной» гармоники либо в случае регулярного распределения изотропных неоднородностей, либо для случайного распределения анизотропных неоднородностей. При этом интенсивность сдвиговой гармоники зависит от степени неоднородности среды, так что отношение амплитуд «запрещенной» и разрешенной гармоники пропорционально квадрату величины относительной неоднородности модулей упругости.

Авторы благодарят В. П. Романова за обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдберг З. А.* О взаимодействии плоских продольных и поперечных волн.– Акуст. журн., 1960, т. 6, № 2, с. 307–311.
2. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
3. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах.– УФН, 1970, т. 102, № 4, с. 549–586.
4. *Гедройц А. А., Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Сдвиговые волны конечной амплитуды в поли- и монокристаллах металлов.– Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 3, с. 515–518.
5. *Зарембо Л. К., Шкловская-Корди В. В.* О генерации гармоник при распространении ультразвуковых продольных и сдвиговых волн в твердых телах.– Физ. тв. тела, 1970, т. 12, № 12, с. 3637–3639.
6. *Зарембо Л. К., Прохоров В. М.* Генерация второй сдвиговой гармоники в средах с остаточными внутренними деформациями.– Акуст. журн., 1975, т. 21, № 2, с. 198–202.
7. *Зарембо Л. К., Суховцев В. В.* К вопросу об акустических пространственных нелинейных резонансах в нелинейно-неоднородных средах.– Акуст. журн., 1982, т. 28, № 2, с. 212–215.
8. *Кульбицкая М. Н., Романов В. П., Шутилов В. А.* Об аномалии температурной зависимости скорости звука в стенках.– Акуст. журн., 1973, т. 19, № 4, с. 628–630.
9. *Недбай А. И., Шутилов В. А.* Влияние отжига на температурную зависимость скорости звука в кварцевых стеклах.– Физ. тв. тела, 1981, т. 23, № 1, с. 320–322.
10. *Кульбицкая М. Н., Шутилов В. А.* Ультразвуковые исследования стекол (обзор)– Акуст. журн., 1976, т. 22, № 6, с. 793–811.
11. *Кульбицкая М. Н., Романов В. П., Чернышева Е. О., Шутилов В. А.* О температурной зависимости рассеяния света в стеклах.– Физ. и хим. стекла, 1976, т. 2, № 2, с. 183–184.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
6.IV.1983