АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 1

УДК 534.832

ВЛИЯНИЕ ОБЛИЦОВКИ ИЗ ВОДОПОДОБНОГО МАТЕРИАЛА НА ЗАТУХАНИЕ ЗВУКА В ТРУБАХ, ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Дулов В. А.

Рассмотрено затухание звука в заполненной жидкостью трубе, которое обусловлено слоем водоподобного материала, наносимого на внутреннюю поверхность трубы. Установлена зависимость затухания от свойств материала и от толщины слоя.

Как известно, для поглощения шума, распространяющегося по воздуховодам, широко применяют звукопоглощающую облицовку их стенок изнутри. Ввиду простоты такого способа глушения желательно было бы применить его и для труб, заполненных жидкостью. В этом случае в качестве звукопоглощающей облицовки можно использовать слой «водоподобного материала» — резины или мягкой пластмассы, приклеивая его к внутренней поверхности трубы. Надеяться на сильное поглощение звука при этом позволяют следующие рассуждения. Звуковые колебания в жидкости легко возбуждают звуковые колебания в слое, поскольку его плотность и модуль объемного сжатия близки к соответствующим величинам в жидкостях, а модуль сдвига мал по сравнению с модулем объемного сжатия (эти свойства и называют водоподобностью). Далее энергия продольных волн в слое благодаря граничному условию на стенке трубы (приклейке) эффективно преобразуется в сдвиговые волны [1]. А их энергия в свою очередь переходит в тепло из-за сильного сдвигового трения в материале слоя. Наличие поглощающей облицовки таким образом, приводит к затуханию звука вдоль трубы. В данной работе проведен оценочный расчет величины этого затухания для практически важного случая малой толщины слоя по сравнению с радиусом трубы.

Нахождение затухания сводится к решению задачи о распространении звука в цилиндрическом волноводе, образованном жидкостью в трубе с облицовкой: обозначая через ξ_{nm} волновое число нормальной волны с радиальным n и угловым m номерами, найдем «затухание на калибр» по формуле $\delta_{nm}=2R\,\mathrm{Im}\,\xi_{nm}$, где R — радиус трубы. Поскольку основной вклад в поглощение звука внесут потери в слое, вязкостью жидкости можно пренебречь, что позволяет разбить поставленную задачу на две: определение входной проводимости водоподобного слоя и нахождение нормальных волн в волноводе с известной входной проводимостью стенок.

Ввиду малости толщины слоя по сравнению с радиусом его кривизны в задаче определения проводимости можно считать слой плоским. Расположим начало прямоугольной системы координат (x, y, z) на стенке трубы, ось z направим перпендикулярно стенке в сторону облицовки. Обозначая компоненты смещений частиц слоя и компоненты напряжений в слое соответственно буквами u_i и σ_{ij}, граничные условия для упругих волн в слое можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered} u_x=u_y=u_z=0 \quad \text{при } z=0 \\ \sigma_{zx}=\sigma_{zy}=0, \quad \sigma_{zz}=-p \quad \text{при } z=h. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь p — давление в плоскости $z=h$. Пусть колебания в слое возбуждаются волной давлений

$$p=\exp(i\xi x-i\omega t). \tag{2}$$

Опишем поле смещений в слое скалярным и векторным потенциалами Φ

и ψ. Согласно формулам (1) и (2), потенциалы можно записать в виде $\Phi=(\sin\zeta_l z+B\cos\zeta_l z)\exp(i\xi x-i\omega t)$; $\psi_y=(C\sin\zeta_t z+D\cos\zeta_t z)\exp(i\xi x-i\omega t)$; $\psi_z=\psi_x=0$; где B, C, D – константы; $\zeta_l^2=k_l^2-\xi^2$; $\zeta_t^2=k_t^2-\xi^2$; k_l и k_t – волновые числа (комплексные) соответственно продольной и поперечной волн в слое. Тогда имеем [2, § 141]:

$$u_x=i\xi(\sin\zeta_l z+B\cos\zeta_l z)-\zeta_t(C\cos\zeta_t z-D\sin\zeta_t z), \tag{3}$$

$$u_z=\zeta_l(\cos\zeta_l z-B\sin\zeta_l z)+i\xi(C\sin\zeta_t z+D\cos\zeta_t z). \tag{4}$$

$$\sigma_{zx}=-\mu^*[-\varkappa^2(C\sin\zeta_t z+D\cos\zeta_t z)-2i\xi\zeta_l(\cos\zeta_l z-B\sin\zeta_l z)], \tag{5}$$

$$\sigma_{zz}=-\mu^*[\varkappa^2(\sin\zeta_l z+B\cos\zeta_l z)-2i\xi\zeta_t(C\cos\zeta_t z-D\sin\zeta_t z)]. \tag{6}$$

Здесь μ^* – комплексный модуль сдвига материала слоя, $\varkappa^2=k_t^2-2\xi^2$; множитель $\exp(i\xi x-i\omega t)$ опущен. Подставляя выражения (3), (4), (5) в граничные условия, получим систему уравнений для констант B, C и D, разрешая которую найдем: $B=-\zeta_l\zeta_t b/\xi^2$; $C=-i\zeta_l b/\xi$; $D=i\zeta_l/\xi$, где введены обозначения $b=(\varkappa^2\cos\alpha+2\xi^2\cos\gamma)/(\varkappa^2\sin\alpha-2\zeta_l\zeta_t\sin\gamma)$; $\alpha=\zeta_t h$; $\gamma=\zeta_l h$. Подставляя найденные значения B, C и D в формулы (4) и (6), найдем искомую входную проводимость слоя

$$Z=\left.\frac{i\omega u_z}{\sigma_{zz}}\right|_{z=h}=$$

$$=\frac{-i\omega\zeta_l k_t^2(\xi^2\cos\gamma\sin\alpha+\zeta_l\zeta_t\sin\gamma\cos\alpha)}{\mu^*[4\zeta_l\zeta_t\varkappa^2\xi^2+\zeta_l\zeta_t(\varkappa^4+4\xi^4)\cos\alpha\cos\gamma-\xi^2(\varkappa^4+4\zeta_l^2\zeta_t^2)\sin\alpha\sin\gamma}. \tag{7}$$

Охарактеризуем водоподобный слой плотностью ρ, константами Ламе λ и μ и углом потерь при сдвиговых колебаниях φ. Через ρ_0 и c_0 обозначим плотность и скорость звука в жидкости, заполняющей волновод. Для реальных сред всегда оказываются выполненными приближенные равенства $\rho/\rho_0\approx1$ и $\lambda/(\rho_0c_0^2)\approx1$. Отношение параметров Ламе μ/λ по порядку величины составляет $(1\div5)\cdot10^{-3}$. Величина $\operatorname{tg}\varphi$ может колебаться в зависимости от вида материала слоя, температуры и частоты в пределах 0,1–1. Наличие потерь в слое можно формально учитывать добавлением к модулю сдвига мнимого слагаемого: $\mu^*=\mu(1-i\operatorname{tg}\varphi)$. Тогда волновые числа продольной и поперечной волн запишутся в виде $k_t=(\omega^2\rho/\mu^*)^{1/2}$, $k_l=[\omega^2\rho/(\lambda+2\mu^*)]^{1/2}$. Если принять, что волна давлений (2) создается звуковой волной, падающей на слой из жидкости, то по порядку величины отношения $|\xi/k_t|$, $|\zeta_l/k_t|$, $|\mu^*/\lambda|$ – одинаковы (угол скольжения считается не слишком большим). Тогда с точностью до членов порядка малой величины $|\mu^*/\lambda|$ можно приближенно положить $\zeta_l\approx k_l$, $\cos\gamma\approx1$, $\sin\gamma\approx\gamma$, $\varkappa^2\approx k_t^2$, $\cos\alpha\approx\cos(k_t h)$, $\sin\alpha\approx\sin(k_t h)$. Используя эти соотношения, можно с той же точностью переписать выражение (7) в виде $Z\approx-i\omega(\xi^2\operatorname{tg}(k_t h)+\zeta_l^2k_t h)/\mu^*k_t^3$ и считать $k_l=(\omega^2\rho/\lambda)^{1/2}$. Относительную проводимость слоя можно привести к виду

$$\rho_0c_0Z=-i\nu\left[\left(\frac{\xi}{k_0}\right)^2(X+iY)+X_1\right], \tag{8}$$

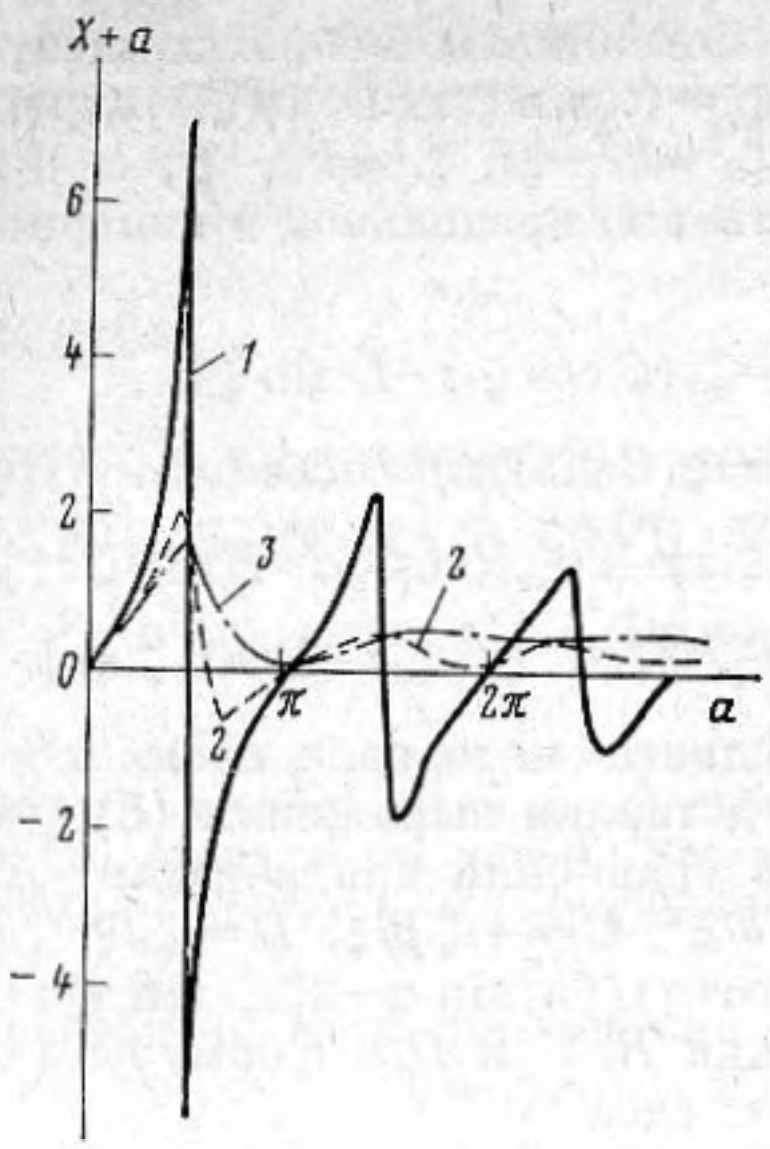
где введены обозначения $\nu=(\rho_0/\rho)^{1/2}(\mu/\rho_0c_0^2)^{1/2}$; $k_0=\omega/c_0$; $X_1=a(k_l/k_0)^2$; величина $a=\omega h(\rho/\mu)^{1/2}$ имеет смысл $k_t h$ при отсутствии затухания:

$$k_t h=a(1-i\operatorname{tg}\varphi)^{-1/2};\qquad X=a\left(\sin\varphi\frac{d^{-1}\sin c+c^{-1}\operatorname{sh}d}{\cos c+\operatorname{ch}d}-1\right);$$

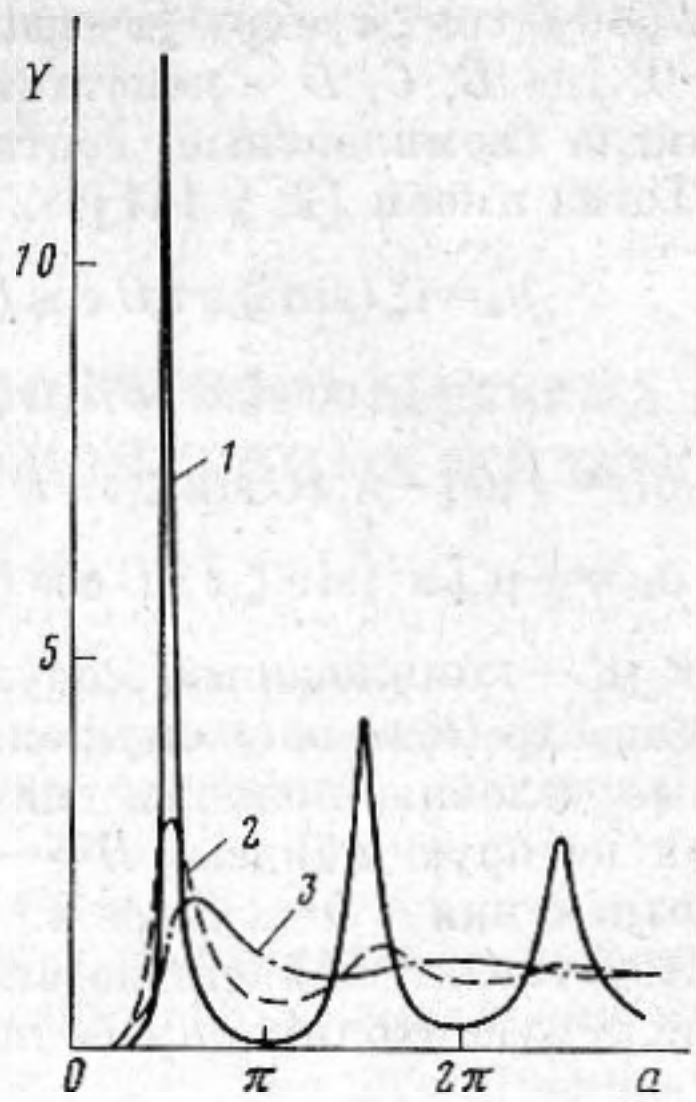
$$Y=a\sin\varphi\frac{d^{-1}\operatorname{sh}d-c^{-1}\sin c}{\cos c+\operatorname{ch}d};\qquad c=2\operatorname{Re}k_t h=2a\sqrt{\cos\varphi}\cos(\varphi/2);$$

$$d=2\operatorname{Im}k_t h=2a\sqrt{\cos\varphi}\sin(\varphi/2).$$

На фиг. 1, 2 даны графики зависимости величин $X+a$ и Y от a для различных значений $\operatorname{tg}\varphi$. Ниже подробно будет рассмотрен случай, когда мнимая часть ξ мала по сравнению с действительной, для этого случая



Фиг. 1. Зависимость $X+a$ от a при разных значениях $\operatorname{tg}\varphi$: *1* – $\operatorname{tg}\varphi=0{,}1$; *2* – $\operatorname{tg}\varphi=0{,}5$; *3* – $\operatorname{tg}\varphi=1$



Фиг. 2. Зависимость Y от a при разных значениях $\operatorname{tg}\varphi$: (значения $\operatorname{tg}\varphi$ – см. к фиг. 1)

график Y передает зависимость действительной части проводимости слоя от его толщины и частоты, входящих в параметр a линейно. Резонансному характеру графика Y можно дать следующее объяснение. Как известно, в узкой трубе, ограниченной жесткой и мягкой крышками, имеют место резонансы звуковых колебаний (максимумы действительной части проводимости трубы со стороны мягкой крышки) при частотах, когда на длине трубы укладывается нечетное число четвертей длин волн. В водоподобном слое ситуация аналогична, но речь идет о сдвиговых волнах, которые в указанном выше приближении распространяются перпендикулярно границам слоя: при резонансных значениях параметра $a_{\text{рез}}=\pi(2n+1)\times\times[\sqrt{\cos\varphi}\,\cos(\varphi/2)]^{-1}$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$, т. е. когда длина сдвиговой волны $\Lambda=2\pi/(\operatorname{Re} k_t)$ удовлетворяет соотношению $h/\Lambda=(2n+1)/4$, величина Y достигает максимумов. Как это обычно имеет место в колебательных системах, резонанс в данном случае проявляется тем сильнее, чем меньше потери в слое.

Перейдем теперь к нахождению нормальных волн в жидком волноводе, ограниченном стенками с входной проводимостью, определяемой соотношением (8). Направим ось x цилиндрической системы координат (x, r, θ) вдоль оси волновода. Давление в нормальной волне номера (nm) можно записать в виде $p=J_m(\zeta_{nm}r)\exp(i\xi_{nm}x+im\theta-i\omega t)$, где $\zeta_{nm}^2=k_0^2-\xi_{nm}^2$, а J_m – функция Бесселя порядка m. Относительную проводимость на стенке волновода при выбранном типе падающей волны можно записать в виде $\rho_0c_0Z=\rho_0c_0v_r/p|_{r=R}=\zeta_{nm}J_m'(\zeta_{nm}R)/(ik_0J_m(\zeta_{nm}R))$, где штрихом обозначено дифференцирование по аргументу. Подставляя это выражение в формулу (8) и учитывая соотношение $\xi^2=\xi_{nm}^2+m^2/R^2$, получим следующее уравнение для определения ξ_{nm}:

$$\nu\left\{\left[\left(\frac{\xi_{nm}}{k_0}\right)^2+\left(\frac{m}{k_0R}\right)^2\right](X+iY)+X_1\right\}=\frac{\zeta_{nm}J_m'(\zeta_{nm}R)}{k_0J_m(\zeta_{nm}R)}. \qquad (9)$$

Ограничимся нахождением ξ_{nm} для случая, когда справедливо разложение ξ_{nm} по степеням малого параметра $\nu(\nu\sim|k_0/k_t|)$: $\xi_{nm}=\xi_{nm0}+\nu\xi_{nm1}+\ldots$, где $\xi_{nm0}=(k_0^2-\mu_{nm}^2/R^2)^{1/2}$ – волновое число соответствующей нормальной волны в трубе с жесткими стенками, μ_{nm} – корни уравнения $J_m(\mu)=0$. Этот случай, как будет видно из дальнейшего, включает многие практически важные ситуации. По отношению к другим случаям такой расчет можно полагать оценочным, поскольку, как показано в работах [3, с. 406 и 4,

с. 509–511] путем численного решения уравнения, подобного (9), но с левой частью, не зависящей от ξ_{nm}, порядок величины затухания в общем случае оказывается не ниже, чем в рассматриваемом. Чтобы найти ξ_{nm} с точностью до множителя $1+O(\nu^2)$, соответствующей точности формулы (8), достаточно в левой части (9) сохранить лишь члены порядка ν. Тогда она принимает вид $\nu\eta_{nm}$, где $\eta_{nm}=\{[1-\mu_{nm}^2(k_0R)^{-2}+m^2(k_0R)^{-2}]\times\times(X+iY)+X_1\}$ не зависит от ξ_{nm}, а уравнение (9) сводится к уравнению, приближенные решения которого известны [3, с. 337]: для нулевой моды $\xi_{00}\approx k_0+\nu\eta_{00}/R$; для высших мод — $\xi_{nm}\approx\xi_{nm0}[1+\nu\eta_{nm}k_0R(1-m^2/\mu_{nm}^2)^{-1}\times\times(k_0^2R^2-\mu_{nm}^2)^{-1}]$ (при очевидном обобщении результата работы [3] на случай $m\neq0$ использована формула $d/dz(J_m'(z)/J_m(z))=m^2/\mu_{nm}^2-1$ при $z=\mu_{nm}$, которая следует из рекуррентных соотношений для функций Бесселя — см., например, [5, с. 242]). Откуда $\delta_{00}=2\nu Y$ и $\delta_{nm}=\mu_{nm}^2[(k_0R)^2--\mu_{nm}^2+m^2][k_0R(\mu_{nm}^2-m^2)\sqrt{(k_0R)^2-\mu_{nm}^2}]^{-1}2\nu Y$.

Приведенный расчет применим при условиях, когда справедливо решение [3]: для нулевой моды — $(2\nu|\eta_{00}|k_0R)^{1/2}\ll\mu_{01}$ и $k_0R\gg\nu|\eta_\infty|$ (например, при $\operatorname{tg}\varphi=0{,}5$ — $(k_0R)^{1/2}\ll4$ и $k_0R\gg8\cdot10^{-2}$), при $n^2+m^2\neq0$ — $\nu|\eta_{nm}|k_0R\ll\ll\mu_{nm}(1-m^2/\mu_{nm}^2)$ и $\nu|\eta_{nm}|k_0R\ll(k_0^2R-\mu_{nm}^2)(1-m^2/\mu_{nm}^2)$.

Величины δ_{nm} отличаются от δ_{00} множителем, который при перечисленных условиях имеет порядок единицы, с частотой же он меняется медленно по сравнению с Y. Таким образом, «затухание на калибр» для различных нормальных волн по порядку величины одинаково, а его график повторяет график величины Y (фиг. 2). Для примера на фиг. 2 нанесена шкала затухания нулевой волны в дБ на калибр для слоя с характеристиками $\mu/(\rho_0c_0^2)=5\cdot10^{-3}$ и $\rho_0/\rho=1$ и шкала частот для $h=1$ см и $\mu=2\cdot10^6$ кГ/м с при разных $\operatorname{tg}\varphi$. Как видно из графика, при использовании облицовки с $\operatorname{tg}\varphi>0{,}5$ резонансные явления выражены настолько слабо, что практически получается примерно равномерное затухание в широкой полосе частот. В области значений a, бóльших $0{,}4\pi$, затухание существенно выше, чем при меньших значениях. Частоту, соответствующую $a=0{,}4\pi$, можно считать нижней границей области эффективного поглощения звука облицовкой. Для понижения граничной частоты следует либо увеличивать толщину слоя, либо понижать модуль сдвига материала слоя. Сильно же выраженный первый резонанс при облицовке материалом с малым значением $\operatorname{tg}\varphi$ можно использовать в случае необходимости получить большое затухание в узкой полосе частот. Чтобы получить большое затухание в окрестности данной частоты ω_1, толщину слоя следует выбрать равной $h=a_{\text{рез}}\mu^{1/2}/(\omega_1\rho^{1/2})$.

Автор хотел бы отметить, что настоящая работа была выполнена под руководством проф. М. А. Исаковича и тем самым почтить его память.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дулов В. А.* Эффект Брюстера в акустике и эффект Константинова.— Акуст. журн., 1980, т. 26, № 5, с. 808–809.
2. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
3. *Морз Ф.* Колебания и звук. М.: ГИТТЛ, 1949.
4. *Morse P. M., Ingard K. U.* Theoretical acoustics, N. Y.: McGraw Hill. 1968.
5. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977.

Морской гидрофизический институт
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
17.X.1983