АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 1

УДК 534.832:62–523.8

АДАПТИВНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Мальцев А. А., Позументов И. Е.

Для пространственной фильтрации отдельных нормальных волн предлагается использовать вертикальную адаптивную антенную решетку, максимизирующую отношение сигнал/шум. Найдено аналитическое выражение для ошибки измерения амплитуд мод. Проведено сравнение с обработкой по методу согласованной пространственной фильтрации.

Проблема изучения модовой структуры поля и выделения отдельных нормальных волн возникает в целом ряде акустических задач. Например, анализ модовой структуры поля может служить инструментом исследования подводных каналов распространения звука в океане [1]. К настоящему времени имеется ряд методов выделения и измерения амплитуд отдельных нормальных волн. Среди них отметим следующие: метод сканирования диаграмм направленности горизонтальных или вертикальных антенных решеток [2–4]; метод пространственной (согласованной) фильтрации мод, основанный на свойстве ортогональности собственных функций волновода [1, 4, 5]; частотно-временные методы селекции нормальных волн [6]. В последнее время для пространственной обработки сигналов все более широкое применение находят адаптивные антенные системы [7–10]. В работе [11] рассматривался вопрос о применении адаптивной системы для гашения шумовых полей в многомодовом волноводе. В настоящей работе предлагается использовать адаптивную антенную решетку для пространственной селекции нормальных волн. Показано, что вертикальная адаптивная антенная решетка может выделять измеряемую «полезную» моду, подавляя все остальные «помеховые» моды и аддитивные шумы, автоматически максимизируя при этом отношение сигнал/шум на выходе системы. Заметим, что в отличие от перечисленных выше методов для оптимальной работы адаптивной системы необходима минимальная априорная информация — знание пространственной структуры одной «полезной» моды. В работе находятся основные характеристики адаптивной антенной решетки и проводится их сравнение с обработкой по методу пространственной согласованной фильтрации [4, 5].

Пусть $p(r, z, t)$ — комплексная амплитуда акустического давления, создаваемого стационарным случайным источником в двумерном волноводе с продольной координатой r и поперечной z. Будем полагать, что ширина полосы сигнала источника достаточно мала и практически не влияет на поперечную структуру мод [5]. Для рассматриваемой задачи поле в волноводе удобно представить в виде суперпозиции нормальных волн следующего вида:

$$p(r, z\ t) = \sum_m a_m(r, t)\, q_m(z), \tag{1}$$

где m — номер нормальной волны, $a_m(r, t)$ — комплексная амплитуда m-й моды, $q_m(z)$ — собственные функции волновода.

Рассмотрим задачу выделения сигнала s-й моды с помощью вертикальной адаптивной антенной решетки, в которой сигналы с N элементарных измерителей поля обрабатываются путем умножения на соответствующие комплексные весовые коэффициенты $w_1, w_2, \ldots, w_N$ и последующего суммирования. Примем за критерий качества работы системы величину от-

ношения сигнал/шум на выходе антенны. При этом под полезным сигналом будем подразумевать суммарный отклик от s-й измеряемой моды, а под шумом — сигналы остальных мод и аддитивный шум. Тогда градиентный адаптивный алгоритм настройки весовых коэффициентов будет иметь вид (см., например, [7]):

$$\tau \frac{d\mathbf{W}(t)}{dt} + \gamma \mathbf{V}^{*}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(t) = \gamma \mathbf{S}^{*}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{W} \equiv \{w_1, w_2, \ldots, w_N\}^{\mathrm{T}}$ — вектор весовых коэффициентов (верхний индекс T обозначает операцию транспонирования), $\mathbf{V} \equiv \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}^{\mathrm{T}}$ — вектор комплексных огибающих давления акустического поля на элементах решетки; $\mathbf{S}$ — вектор «желаемого» сигнала, компоненты которого представляют собой значения s-й собственной функции волновода в точках z_n расположения элементарных приемников; τ и γ — постоянная времени и коэффициент усиления электронной части системы, регулирующей весовые коэффициенты. Уравнение (2) определяет структуру обработки сигналов в адаптивном процессоре, который используется для настройки вектора весовых коэффициентов $\mathbf{W}$. Проанализируем эффективность выделения сигнала s-й моды в стационарном режиме работы адаптивной антенны после окончания процесса адаптации.

Несложно показать, что при выполнении условия малости флуктуаций весовых коэффициентов стационарное решение уравнения (2) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{W}_{\text{ст}} = \langle \mathbf{V}^{*}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \rangle^{-1} \mathbf{S}^{*}. \tag{3}$$

Заметим, что в этом выражении усреднение проводится по ансамблю случайных источников, однако для принятой модели сигнала средние статистические величины равны соответствующим средним по времени. Для определенности предположим, что элементы решетки расположены на вертикальной линии на достаточном удалении $r = r_0$ от источника. В этом случае можно принимать во внимание только конечное число M распространяющихся мод. Сигнал v_n на выходе n-го приемного элемента антенны представим в виде суперпозиции сигналов мод и аддитивного шума η_n:

$$v_n = \eta_n + \sum_{m=1}^{M} a_m(r_0, t)\, q_m(z_n). \tag{4}$$

Считая, что на расстоянии r_0 сигналы, соответствующие разным нормальным модам, из-за разницы в групповых скоростях становятся некоррелированными, а аддитивные шумы в различных приемных элементах решетки некоррелированы и имеют одинаковые мощности $\langle |\eta_n|^2 \rangle = \eta^2$, получим для элементов матрицы корреляции входных сигналов антенны следующее представление:

$$\langle v_i^{*} v_j \rangle = \eta^2 \left[\delta_{ij} + \sum_{m=1}^{M} \nu_m q_m(z_i)\, q_m(z_j) \right], \tag{5}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\nu_m \equiv \langle |a_m(r_0, t)|^2 \rangle / \eta^2$ — относительная мощность m-й моды. В матричной форме выражение (5) запишется в виде

$$\langle \mathbf{V}^{*}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \rangle = \eta^2 \left(I + \sum_{m=1}^{M} \nu_m Q_m Q_m^{\mathrm{T}} \right), \tag{6}$$

где $Q_m \equiv \{q_m(z_1), q_m(z_2), \ldots, q_m(z_N)\}^{\mathrm{T}}$, I — единичная матрица. Для возможности сопоставления результатов при различном числе измерителей N будем полагать, что за счет соответствующего выбора амплитуд $a_m(r_0, t)$ векторы Q_m удовлетворяют условию нормировки

$$Q_m^{\mathrm{T}} Q_m = N. \tag{7}$$

Поскольку матрица корреляции входных сигналов антенной решетки представляется в виде суммы факторизованных матриц (6), то для ее обращения и нахождения стационарных весовых коэффициентов (3) можно

воспользоваться известным матричным тождеством Вудбари [12]:

$$(A+BCD^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(C^{-1}+D^{\mathrm{T}}A^{-1}B)^{-1}D^{\mathrm{T}}A^{-1}, \tag{8}$$

где A, B, C, D — произвольные прямоугольные матрицы согласованной размерности. Например, чтобы пояснить механизм выделения измеряемой s-й моды, задаваемой вектором полезного сигнала $\mathbf{S}=\mathbf{Q}_s$ и подавления всех остальных мод, найдем, как изменяется вектор весовых коэффициентов адаптивной антенны при увеличении числа помеховых мод на единицу.

Стационарный вектор весовых коэффициентов при $M-1$ распространяющейся моде (отсутствует l-я помеховая мода) в соответствии с (3), (6) запишем в виде

$$\mathbf{W}_{\text{ст}}^{(M-1)}=A_{(l)}^{-1}\mathbf{S}^{*}, \tag{9}$$

где

$$A_{(l)}=\eta^2\left(I+\sum_{m=1,m\neq l}^{M}\nu_m\mathbf{Q}_m\mathbf{Q}_m^{\mathrm{T}}\right).$$

При появлении помеховой моды с номером l матрицу корреляции входных сигналов, очевидно, можно будет записать в виде

$$\langle\mathbf{V}^{*}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\rangle=A_{(l)}+\eta^2\nu_l\mathbf{Q}_l\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

Используя (3), (10) и матричное тождество (8) (для $A=A_{(l)}$, $B=\eta^2\nu_l\mathbf{Q}_l$, $C=1$, $D=\mathbf{Q}_l$), получим следующее выражение для установившегося значения вектора весовых коэффициентов в присутствии M распространяющихся мод:

$$\mathbf{W}_{\text{ст}}^{(M)}=A_{(l)}^{-1}\mathbf{S}^{*}-\mu A_{(l)}^{-1}\mathbf{Q}_l, \tag{11}$$

где скалярная величина μ равна

$$\mu=\frac{\eta^2\nu_l\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}A_{(l)}^{-1}\mathbf{S}^{*}}{1+\eta^2\nu_l\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}A_{(l)}^{-1}\mathbf{Q}_l}.$$

Выражения (9) и (11) определяют диаграммы направленности адаптивной антенны в присутствии M-1 и M мод. Из их сравнения видно, что диаграмма направленности решетки в присутствии M мод формируется из диаграммы направленности (9), согласованной с измеряемой модой $\mathbf{S}=\mathbf{Q}_s$ в присутствии M-1 моды, путем вычитания с соответствующим множителем «парциальной» диаграммы направленности, согласованной с новой l-й помеховой модой. Таким образом, происходит оптимальная компенсация вклада в суммарный сигнал когерентных сигналов помеховых мод. Отклик адаптивной антенной решетки на l-ю моду равен $\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{\text{ст}}$ и может быть легко найден из выражения (11)

$$\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{\text{ст}}=\frac{\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}A_{(l)}^{-1}\mathbf{S}^{*}}{1+\eta^2\nu_l\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}A_{(l)}^{-1}\mathbf{Q}_l}. \tag{12}$$

Отклик адаптивной антенны на полезный сигнал $\mathbf{S}=\mathbf{Q}_s$ при $\nu_s\gg1$ будет равен

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{\text{ст}}=1/\eta^2\nu_s=1/\langle|a_s(r_0,\ t)|^2\rangle. \tag{13}$$

Таким образом, адаптивная антенная решетка, максимизирующая отношение сигнал/шум, наряду с подавлением помеховых мод несколько уменьшает сигнал полезной s-й моды, причем тем сильнее, чем больше ее мощность. Данные результаты согласуются с хорошо известными свойствами адаптивных антенн, работающих в свободном пространстве, если модами свободного пространства считать плоские волны.

Известно [8—10], что для устранения эффекта уменьшения полезного сигнала в системах, работающих по критерию максимизации отношения сигнал/шум, используются адаптивные алгоритмы с ограничениями на усиление адаптивной антенны в заданном направлении. Здесь можно, на-

пример, задать ограничение на коэффициент усиления заданной пространственной структуры измеряемой моды уравнением

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{\mathrm{ст}}^{\mathrm{огр}}=1. \tag{14}$$

Следуя [10], легко показать, что стационарное значение вектора весовых коэффициентов для адаптивного алгоритма с ограничениями $\mathbf{W}_{\mathrm{ст}}^{\mathrm{огр}}$ отличается от (3) на скалярный множитель, пропорциональный мощности полезного сигнала:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{ст}}^{\mathrm{огр}}=\langle\mathbf{V}^{*}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\rangle^{-1}\mathbf{S}^{*}/\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\langle\mathbf{V}^{*}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\rangle^{-1}\mathbf{S}^{*}. \tag{15}$$

Подставляя это выражение в (14), легко увидеть, что, максимизируя отношение сигнал/шум, вектор весовых коэффициентов (15) одновременно удовлетворяет и ограничению (14), т. е. стабилизирует на уровне, равном единице, коэффициент усиления измеряемой моды.

В простейшем случае выделения одной полезной s-й моды из аддитивного некогерентного шума из (6), (15) несложно найти выражение для оптимального весового вектора:

$$W_{\mathrm{ст}}^{\mathrm{огр}}=\mathbf{Q}_s/N \tag{16}$$

и мощности сигнала на выходе антенны, которая представляет собой оценку мощности s-й моды:

$$\langle|\hat{a}_s|^2\rangle=\langle|V^{\mathrm{T}}W_{\mathrm{ст}}^{\mathrm{огр}}|^2\rangle=\langle|a_s(r_0,t)|^2\rangle+\eta^2/N. \tag{17}$$

В данном случае обработка (16), согласованная с одной измеряемой модой, является оптимальной и подавляет мощность аддитивного шума в N раз.

Рассмотрим задачу измерения амплитуды s-й моды ($\mathbf{S}=\mathbf{Q}_s$) в присутствии одной помеховой моды с номером l. В этом случае, используя (8), (9), найдем аналитическое выражение для матрицы $A_{(l)}^{-1}$, входящей в (11):

$$A_{(l)}^{-1}=\frac{1}{\eta^2}\left(I-\frac{\nu_s\mathbf{Q}_s\mathbf{Q}_s^{\mathrm{T}}}{1+\nu_s\mathbf{Q}_s^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_s}\right). \tag{18}$$

При условии, что мощность аддитивных шумов много меньше мощности распространяющихся мод (ν_s, $\nu_l\gg1$), используя (11), (18), можно получить следующее выражение для мощности сигнала на выходе адаптивной антенной решетки

$$\langle|\hat{a}_s|^2\rangle=\langle|a_s(r_0,t)|^2\rangle+\eta^2/N+\frac{1}{\nu_l^2}\langle|a_l(r_0,t)|^2\rangle\left[\frac{\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_s}{N^2-(\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_s)^2}\right]^2. \tag{19}$$

Таким образом, ошибка измерения s-й моды складывается из двух слагаемых, одно из которых обусловлено действием аддитивного шума, а другое — помеховой l-й модой.

Альтернативным и широко используемым в настоящее время методом выделения нормальных волн является метод согласованной пространственной фильтрации, основанный на свойстве ортогональности собственных решений волнового уравнения [1, 4, 5]. Согласно этому методу, оценка амплитуды измеряемой моды при дискретных измерениях суммарного волнового поля находится путем умножения вектора сигналов $\mathbf{V}$ на весовой вектор, согласованный с собственной функцией s-й измеряемой моды $\mathbf{W}_{\mathrm{пф}}=\beta\mathbf{Q}_s$. Выбирая постоянную β из условия выполнения нормировок (7), (14) $\beta=1/\mathbf{Q}_s^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_s=1/N$, получим

$$\mathbf{W}_{\mathrm{пф}}=\mathbf{Q}_s/N, \tag{20}$$

что совпадает с частным выражением (16) для оптимального весового вектора адаптивной антенной решетки. Используя (4), (20), выражение для мощности оценки сигнала s-й моды на выходе системы пространственной фильтрации можно записать следующим образом

$$\langle|\hat{a}_s|^2\rangle=\langle|a_s(r_0,t)|^2\rangle+\eta^2/N+\langle|a_l(r_0,t)|^2\rangle[\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_s/N]^2. \tag{21}$$

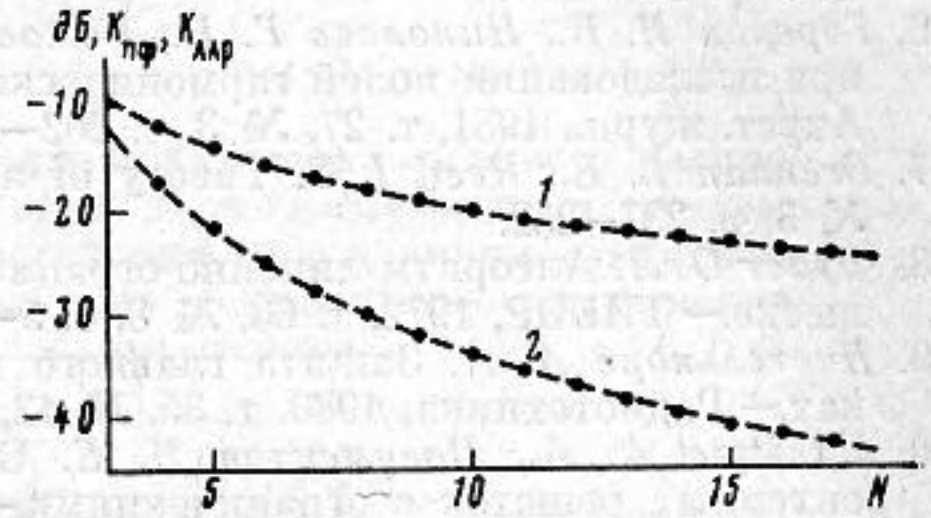
Сравнивая выражения для оценок (19) и (21), заметим, что уровень подавления аддитивного шума на выходе адаптивной антенны и системы

пространственной фильтрации одинаков. Более того, при ортогональных векторах s-й измеряемой и l-й помеховой мод

$$\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_s=0 \tag{22}$$

обе системы полностью эквивалентны (как и в случае измерения одной распространяющейся моды). Условие (22) может быть реализовано специальным расположением небольшого числа дискретных измерителей [1] или при непрерывном заполнении апертуры антенны [4]. Анализ выражений (19), (21) в общем случае дискретных измерений — когда $\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_s\neq0$, показывает, что адаптивный алгоритм приводит к более сильному подавлению помеховой моды. Соответствующий выигрыш K (отношение последних слагаемых в (21) и (19)) будет равен

$$K=\nu_l^2\left[\frac{N^2-(\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_s)^2}{N}\right]^2,\quad \mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_s\neq0. \tag{23}$$



Выигрыш адаптивной обработки по сравнению с методом пространственной фильтрации тем больше, чем больше мощность помеховой моды.

Рассмотрим более подробно полученные выражения на примере измерения амплитуд нормальных волн в однородном водном слое глубиной h с абсолютно жестким дном и свободной поверхностью. Звуковое поле в слое на достаточно большом расстоянии от источника представим в виде конечной суммы незатухающих нормальных волн (1). При эквидистантном расположении N элементов антенной решетки (первый на дне, N-й на поверхности) элементы вектора $\mathbf{Q}_m$ будут равны

$$q_m(z_n)=(-1)^m\sqrt{2}\cos\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(n-1)}{N-1}\right],\quad m=1,2,\ldots,N. \tag{24}$$

Используя (24), непосредственной подстановкой убеждаемся, что условие нормировки (7) выполняется, а для скалярных произведений векторов, отвечающих различным модам рассматриваемого волновода, получаем следующие выражения:

$$\mathbf{Q}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_m=\begin{cases}1, & \dfrac{(m-l)\pi}{N-1}\neq2\pi k,\quad \dfrac{(m+l-1)\pi}{N-1}\neq2\pi k,\quad k=0,1,2,\ldots\\[2ex] N, & \dfrac{(m-l)\pi}{N-1}=2\pi k \text{ или } \dfrac{(m+l-1)\pi}{N-1}=2\pi k.\end{cases} \tag{25}$$

Анализ выражений (19), (21) с учетом (25) показывает, что при $(m-l)\pi/(N-1)=2\pi k$ или $(m+l-1)\pi/(N-1)=2\pi k$ обе измерительные системы практически не подавляют помеховую моду. Это связано с тем, что при этих условиях эквидистантно расположенные элементы антенной решетки попадают в пучности и нули l-й и m-й нормальных волн и не «различают» их поперечную пространственную структуру. При $(m-l)\pi/(N-1)\neq2\pi k$, $(m+l-1)\pi/(N-1)\neq2\pi k$ адаптивный алгоритм приводит к более сильному подавлению l-й мешающей моды. Так, на фигуре приведены графики $K_{пф}$ и $K_{ааР}$ значения коэффициентов подавления величин $\langle|a_l(r_0,\ t)|^2\rangle$ в методе пространственной фильтрации (кривая *1*) и $\langle|a_l(r_0,\ t)|^2\rangle/\nu_l^2$ при использовании адаптивной антенной решетки (кривая *2*). Графики построены для задачи выделения первой моды ($s=1$) в присутствии мешающей нормальной волны с номером $l=2$, т. е. волновод предполагался двухмодовым. Из сравнения кривых видно, что использование адаптивной антенны для измерения отдельных мод волновода приводит к значительно более сильному подавлению мешающих нормальных волн по сравнению с методом согласованной фильтрации.

В заключение авторы выражают благодарность А. Н. Малахову за интерес к работе и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клей К., Медвин Г.* Акустическая океанография. М.: Мир, 1980.
2. *Елисеевнин В. А.* О работе горизонтальной линейной антенны в водном слое.— Акуст. журн., 1979, т. 25, № 2, с. 227—233.
3. *Елисеевнин В. А.* О работе вертикальной линейной антенны в водном слое.— Акуст. журн., 1981, т. 27, № 2, с. 228—233.
4. *Hamson R. M.* The theoretical gain limitations of a passive vertical line array in shallow water.— J. Acoust. Soc. Amer., 1980, v. 68, № 1, p. 156—164.
5. *Gazanhes C., Garnier J. L., Sessarego J. P.* Beam forming and frequency dependence of mode identification in shallow water propogation.— J. Sound and Vibr., 1979, v. 65, № 2, p. 165—176.
6. *Горская Н. В., Николаев Г. Н., Рычова Т. А., Салин Б. М.* Спектральный анализ при исследовании полей гармонических источников в акустических волноводах.— Акуст. журн., 1981, т. 27, № 3, с. 202—205.
7. *Brennan L. E., Reed I. S.* Theory of adaptive radar.— IEEE Trans., 1973, v. AES-9, № 3, p. 237—252.
8. *Фрост О. Л.* Алгоритм линейно-ограниченной обработки сигналов в адаптивной решетке.— ТИИЭР, 1972, т. 60, № 8, с. 5—16.
9. *Пистелькорс А. А.* Защита главного максимума в адаптивных антенных решетках.— Радиотехника, 1980, т. 35, № 12, с. 8—19.
10. *Мальцев А. А., Позументов И. Е.* Статистические характеристики адаптивных антенных решеток с ограничениями.— Изв. вузов. Радиофизика, 1981, т. 24, № 5, с. 577—585.
11. *Арзамасов С. Н., Малахов А. Н., Мальцев А. А.* Адаптивная система активного гашения шумовых полей в многомодовом волноводе.— Акуст. журн., 1982, т. 28, № 5, с. 583—587.
12. *Ширман Я. Д., Манжос В. Н.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981.

Горьковский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
27.VI.1983