

УДК 534.231.1

**КОРОТКОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА
В ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОТОКАХ ГАЗА В КАНАЛАХ**

Осипов А. А.

В рамках коротковолнового приближения решена задача о распространении трехмерных акустических волн в осесимметричных каналах медленно изменяющегося поперечного сечения при наличии стационарного потенциального потока газа. Получено асимптотическое решение, справедливое при частотах, близких к частоте отсечки.

Коротковолновое приближение является основой весьма развитого аппарата, применяемого в различных областях физики для решения задач линейной теории распространения волн [1, 2]. В сочетании с модовым представлением волновых полей [3] оно оказалось весьма эффективным и при решении задач аэроакустики каналов (см. работы [4, 5], где коротковолновый анализ сводится к двухмасштабному разложению акустических возмущений параметров слабонеоднородного течения). Указанный подход позволяет использовать аппарат теории квазиклассического (ВКБ) приближения [6] и свести задачу о распространении нормальных волн в каналах к исследованию одномерной системы, содержащей совокупность различного числа точек поворота, которые определяют отражение волн вблизи частоты отсечки (критической частоты) [7]. Однако ВКБ-решение неприменимо около самих точек поворота, что существенно ограничивает возможности предложенного в работе [7] метода. Асимптотические методы, развитые в лучевой теории для описания отражения волн вблизи каустик [8], также недостаточно эффективны, и решение с их помощью задач аэроакустики, особенно в случаях, соответствующих системам двух и более точек поворота [7], представляется весьма затруднительным.

В настоящей работе предложен асимптотический метод, позволяющий расширить возможности развитого в работах [5, 7] подхода и предназначенный для описания распространения звука в слабонеоднородных потенциальных потоках газа в каналах. С его помощью исследованы особенности отражения и взаимодействия нормальных акустических волн вблизи частоты отсечки и, в частности, при наличии системы двух или четырех точек поворота. Искомые соотношения, полученные на основании вариационного принципа [9], имеют весьма простой и компактный вид и позволяют путем несложных расчетов определять с хорошей точностью акустические характеристики газодинамических волноводов.

Рассмотрим распространение трехмерных линейных акустических возмущений в неоднородном стационарном потоке идеального газа в осесимметричном канале. Пусть $r_w(x)$ — ордината канала в плоскости (x, r) цилиндрической системы координат x, r, θ . Ограничимся случаем, когда стационарный поток безвихревой и изоэнтропический, а поперечное сечение канала медленно изменяется по его длине, так что $dr_w/dx \sim \varepsilon \ll 1$. Как показано в работе [5], в этом случае с точностью до ε в качестве параметров стационарного потока можно взять их одномерные значения с учетом малой поперечной составляющей вектора скорости газа, линейно распределенной по радиусу канала. Рассмотрим далее гармонические по времени t и углу θ колебания акустического потенциала, которые будем описывать функцией $\varphi' = \varphi(x, r) \exp(-im\theta - i\omega t)$, где ω — частота колебаний, а m — целое число. Здесь и далее все параметры будем считать нормированными

ми по некоторым характерным значениям плотности, скорости звука в газе и радиуса канала.

Воспользуемся далее вариационным принципом, сформулированным в работе [9], а приближенное решение φ , доставляющее стационарное значение вариационному функционалу, будем искать с помощью коротковолнового асимптотического разложения вида [5]

$$\varphi = (a + \varepsilon b + \dots) \exp(i\vartheta). \quad (1)$$

Здесь a, b, \dots — функции «медленной» продольной координаты $\xi \equiv \varepsilon x$ и r , а фаза ϑ предполагается быстро изменяющейся функцией x , так что осевое волновое число $k \equiv d\vartheta/dx$ является величиной порядка единицы, причем $dk/dx \sim \varepsilon$. Разложение (1) надо подставить в выражение для функционала и проварьировать его. В результате для вариации δI получим разложение $\delta I = (\delta I)^{(0)} + \varepsilon (\delta I)^{(1)} + \dots$. Как показано в работе [9], из условия $(\delta I)^{(0)} = 0$ решение в первом приближении находится в виде $a_n = A_n(\xi) J_m(\Lambda_n r/r_w)$, где собственные значения Λ_n находятся из уравнения $J_m'(\Lambda_n) = 0$. Фаза ϑ определяется по формуле

$$\vartheta = \sigma + \vartheta_n, \quad \sigma \equiv - \int \frac{\eta M}{1 - M^2} dx, \quad \vartheta_n \equiv \Lambda_n \int \frac{\mu_n dx}{r_w (1 - M^2)}. \quad (2)$$

Здесь M — число Маха стационарного потока газа, вычисленное в одномерном приближении, $\eta \equiv \omega/c$, где c — скорость звука в том же приближении, $\mu_n \equiv (\Omega_n^2 r_w^2/c^2 + M^2 - 1)^{1/2}$, где $\Omega_n \equiv \omega/\Lambda_n$. Будем считать, что индекс n может принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем положительным (отрицательным) значениям n соответствуют возмущения, распространяющиеся или затухающие в положительном (отрицательном) направлении оси x . Соответственно этому условию выбирается знак перед корнем в формуле для μ_n .

Записав выражение для I в найденном классе функций a_n , амплитуду $A_n(\xi)$ можно найти из условия $(\delta I)^{(1)} = 0$. Как показано в работе [9], в результате получается конечное соотношение

$$A_n^2 \rho r_w \mu_n = \text{const}, \quad (3)$$

где ρ — плотность газа в одномерном приближении.

Применимость асимптотического разложения вида (1) определяется, как показано в работах [5, 7], значениями безразмерного параметра Ω_n . Данный коротковолновый анализ справедлив, если значения Ω_n являются величинами порядка единицы, а погрешность первого приближения (3) составляет величину порядка ε . Заметим здесь, что при больших Λ_n более аккуратное рассмотрение задачи требует введения еще одного малого параметра $(h_n)^{-1} \equiv \varepsilon/\Lambda_n$. Вблизи частоты отсечки, которой отвечает значение $\mu_n = 0$, амплитуда A_n неограниченно возрастает, что говорит о неприменимости решения (3) в этом случае. Кроме того, на высоких частотах ω необходимо учитывать перетрансформацию мод [10]. Поэтому решение задачи в общем случае будем искать в виде

$$\varphi = \exp(i\sigma) \sum_n (a_n + \varepsilon b_n + \dots) \exp(i\vartheta_n). \quad (4)$$

Здесь суммирование производится как по положительным, так и по отрицательным индексам n , каждому из которых соответствует функция a_n найденного выше вида, что обеспечивает выполнение условия $(\delta I)^{(0)} = 0$. Для определения неизвестных пока амплитуд $A_n(\xi)$ следует рассмотреть условие стационарности функционала в следующем приближении. Для проведения такого анализа необходимо установить асимптотический вид первых и вторых производных от функций $A_n(\xi)$. В силу линейности задачи естественно искать такое решение (4), в котором функция A_n , как

и в методе поперечных сечений [3], удовлетворяют соотношениям вида

$$dA_n/d\xi = \sum_j \alpha_{nj} A_j \exp(i\vartheta_j - i\vartheta_n), \quad (5)$$

где α_{nj} — неизвестные пока коэффициенты. Исключим сначала из рассмотрения те случаи, когда какая-либо функция μ_j является величиной порядка ε . Тогда производные $d\alpha_{nj}/d\xi$ можно считать величинами порядка единицы, а вторые производные $d^2 A_n/d\xi^2$ будут содержать слагаемые порядка $1/\varepsilon$, которые появляются из-за быстро осциллирующих экспонент в формуле (5). С учетом сказанного из условия $(\delta I)^{(1)} = 0$ можно получить уравнение и граничное условие на стенке канала, определяющие функции b_n . Условие их совместности дает соотношение $\alpha_{nn} = (-1/2) d \ln(\rho r_w \mu_n)/d\xi$, которое согласуется с формулой (3). Остальные коэффициенты α_{nj} остаются неопределенными, что говорит о допустимости их произвольного задания в рамках используемого асимптотического подхода. Наличие указанного произвола связано с тем, что из-за быстрых осцилляций экспоненциальных множителей в соотношениях (5) при $j \neq n$ вклад соответствующих слагаемых при интегрировании системы (5) оказывается величиной порядка ε и в рамках первого приближения несуществен. Следует заметить, что в неоднородной среде разделение колебаний любой данной моды на распространяющиеся во взаимно противоположных направлениях волны условно и поэтому неоднозначно. Неоднозначность, как и в методе вариации произвольных постоянных, является следствием введения двух неизвестных амплитуд A_n и A_{-n} вместо одной амплитуды суммарного возмущения n -й моды. Способ разделения возмущений на распространяющиеся волны в неоднородной среде оказывается, таким образом, произвольным, однако естественно потребовать, чтобы он оставался справедливым и при переходе к однородному потоку, в котором это разделение однозначно. Сказанному выше соответствует и подход, используемый в методе поперечных сечений [3] и методе волновой огибающей [11]. В настоящей работе для однозначного определения α_{nj} воспользуемся следующим приемом. Подставим выражение для первого приближения $\varphi^{(0)}$ потенциала вида
$$\varphi^{(0)} = \sum_n A_n J_m(\Lambda_n r/r_w) \exp(i\sigma + i\vartheta_n)$$

в функционал, который после интегрирования по частям слагаемых, содержащих ε^0 , можно привести к виду $I = \varepsilon I^{(1)} + \varepsilon^2 I^{(2)} + \dots$. Искомые соотношения для α_{nj} получим теперь из условия $\delta I^{(1)} = 0$

$$\begin{aligned} \alpha_{n-n} &= -\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \ln(\rho r_w \mu_{-n}) + \frac{G_n}{1-M^2} \frac{d \ln r_w}{d\xi}, \\ \alpha_{nj} &= \frac{K_n \Lambda_n^3 P_{jn} - K_j \Lambda_j^3 P_{nj}}{\mu_n \Lambda_n^3 \Lambda_j^2 Q_n} \frac{d \ln r_w}{d\xi} \quad (n \neq \pm j), \\ K_n &\equiv \frac{-M \Omega_n r_w / c + \mu_n}{1-M^2}, \quad G_n \equiv \frac{m^2}{\Lambda_n^2} \left/ \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda_n^2} \right) \right., \\ Q_n &\equiv \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda_n^2} \right) J_m^2(\Lambda_n), \quad P_{nj} \equiv \int_0^{\Lambda_n} J_m \left(\frac{\Lambda_j}{\Lambda_n} \Lambda \right) J_m'(\Lambda) \Lambda^2 d\Lambda. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что параметры Λ_n , G_n , Q_n и P_{nj} являются универсальными константами, зависящими только от номеров m , n и j , и могут быть затабулированы. Итак, формулы (6) вместе с выражением для α_{nn} полностью определяют систему (5), описывающую изменение амплитуд волн различных мод вдоль канала. Можно показать, что полученные соотношения обеспечивают постоянство по длине канала потока акустической энергии через его поперечное сечение в среднем за период колебаний, причем указанное свойство сохраняется для любого конечного числа слагаемых под знаком суммирования в правой части равенства (5). Заметим, что

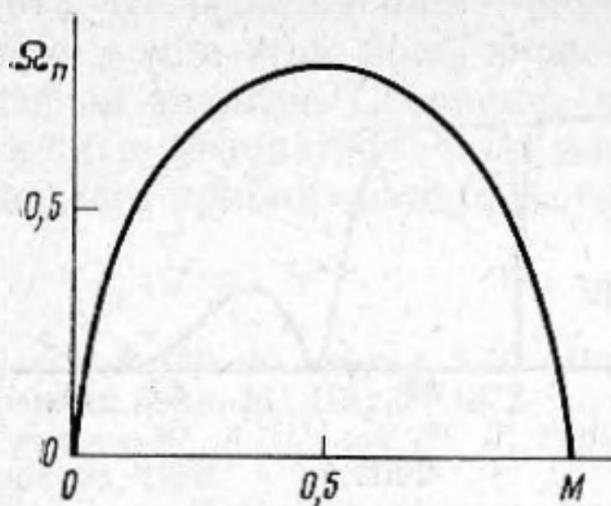
существенным моментом настоящего анализа, обусловившим компактность формул (6) по сравнению с формулами метода взвешенных невязок [3, 11], является использование вариационного принципа вместо исходных дифференциальных уравнений.

Вблизи тех течений канала, где $\mu_n=0$, данный асимптотический анализ и, в частности, соотношения (5) становятся несправедливыми из-за неограниченного возрастания производной $d \ln \mu_n / d\xi$, что в свою очередь приводит к неограниченному росту $A_{\pm n}$. Данное обстоятельство говорит о том, что разделение возмущений n -й моды на волны, распространяющиеся по потоку газа и навстречу ему, теряет смысл, если разность $k_n - k_{-n}$ становится сравнимой с градиентами параметров среды. Другими словами, при малых значениях μ_n имеется интенсивное взаимодействие между указанными волнами, что соответствует наличию интенсивного отражения. Рассмотрим величину $\Phi_n^{(0)} \equiv A_n \exp(i\vartheta_n) + A_{-n} \exp(i\vartheta_{-n})$, характеризующую суммарное возмущение n -й моды. При распространении волны n -й моды возбуждение других мод описывается, вообще говоря, величинами порядка ε , что в свою очередь приводит к изменению амплитуды колебаний n -й моды на величину порядка ε^2 . Пренебрегая этим изменением, для $\Phi_n^{(0)}$ из уравнений (5) можно получить соотношение

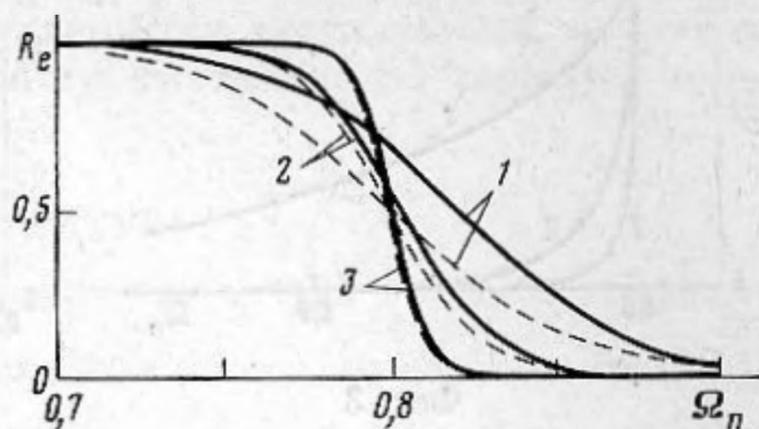
$$d^2 \Phi_n^{(0)} / d\xi^2 + h_n^2 q_n(\xi) \Phi_n^{(0)} = 0 \quad (h_n \equiv \Lambda_n / \varepsilon), \quad (7)$$

где $q_n(\xi) \equiv (\mu_n \rho r_w)^2$. Уравнение (7) получено заменой $d\xi = r_w^2 \rho (1 - M^2) d\xi$ и с учетом того, что $h_n \gg 1$. Решение $\Phi_n^{(0)}$ данного уравнения ограничено вблизи частоты отсечки и удовлетворяет условию $(\delta I)^{(1)} = 0$. Поэтому функцию $\Phi_n^{(0)} J_m(\Lambda_n r / r_w)$ можно рассматривать как первый член асимптотического разложения $\varphi_n = \varphi_n^{(0)} + \varepsilon \varphi_n^{(1)} + \dots$, которое, как можно надеяться, остается справедливым и вблизи частоты отсечки. Соотношения (1)–(3) определяют ВКБ-решение уравнения (7), а $q_n = 0$ соответствует точке поворота этого решения. Если q_n имеет в точке поворота простой нуль, то, как известно, решение уравнения (7), имеющее равномерную погрешность порядка $1/h$, может быть выражено через функции Эйри [12]. При наличии двух близких точек поворота решение с той же точностью можно выразить через функции параболического цилиндра. В случае совершенного газа с показателем адиабаты κ для производной $q_n'(\xi)$ в точке поворота можно записать формулу $q_n'(\xi) = 2r_w^3 \rho^3 [M^4 - (3 + \kappa)M^2 + 1] dr_w / d\xi$. Видно, что в отличие от случая покоящейся среды ($M=0$), где двукратная точка поворота возникает только при $dr_w / d\xi = 0$, при наличии потока газа такая точка поворота может возникнуть в сужающемся или расширяющемся канале, когда равно нулю выражение в квадратных скобках. Выберем характерные параметры, используемые для нормировки так, чтобы значения радиуса канала r_w , скорости звука c и плотности газа ρ при $M=1$ обращались в единицу. Тогда распространение волны любой моды и частоты в рамках приближения, описываемого уравнением (7), определяется значениями параметров Ω_n , h_n и распределением $M(\xi)$, соответствующим рассматриваемому участку канала. Как показано в работе [5], в точках поворота имеется универсальная связь $\Omega_n = \Omega_n(M)$, справедливая для любых n , m и представленная кривой на фиг. 1 для случая $\kappa=1,4$. В области под кривой $\mu_n^2 < 0$, что соответствует классически запрещенной области. Распространяющейся в канале волне n -й моды соответствует отрезок прямой $\Omega_n = \text{const}$, заключенный в заданном диапазоне значений числа Маха M стационарного потока газа. Вершине кривой $\Omega_n(M)$ соответствует упомянутая выше двукратная точка поворота. В этой точке $\Omega_n \simeq 0,798$, $M \simeq 0,491$. Рассматриваемая точка поворота становится четырехкратной, если производная $dr_w / d\xi$ в ней имеет простой нуль. По опубликованным работам аналитическое решение, справедливое в случае четырех близких точек поворота, автору неизвестно.

Для иллюстрации особенностей отражения волн вблизи частоты отсечки приведем некоторые результаты расчета. Рассмотрим переходный участок канала длины l по переменной ξ , заключенный между двумя полу-



Фиг. 1. Зависимость $\Omega_n(M)$ в точках поворота

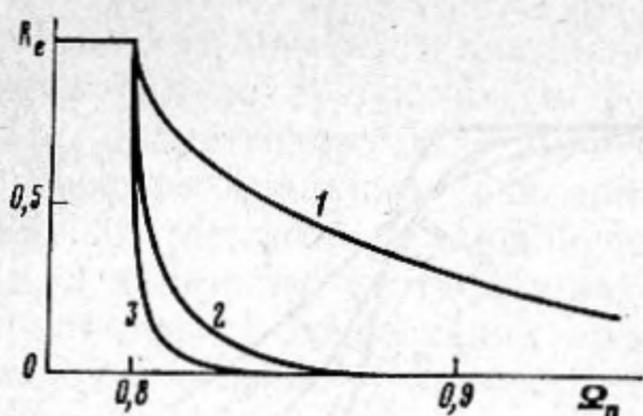


Фиг. 2. Зависимость коэффициента отражения потока акустической энергии R_e от Ω_n в сужающемся канале: $l=1$, $M_1=0,1$, $M_2=0,7$. 1 — $h_n=10$, 2 — $h_n=20$, 3 — $h_n=50$. — точное решение уравнения (7), - - - ВКБ-решение по методике работы [7]

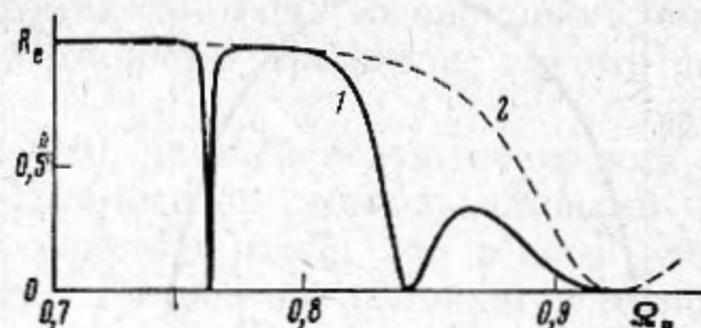
бесконечными цилиндрами. Пусть стационарный поток газа в канале течет слева направо, а монотонное распределение $M(\xi)$ от M_1 на входе до M_2 на выходе задано в виде отрезка синусоиды. Будем исследовать распространение волн, приходящих слева, а их отражение описывать величиной коэффициента отражения потока акустической энергии R_e . Как было показано, зависимость R_e от частоты, моды колебаний и длины канала сводится к зависимости от параметров Ω_n и h_n . Значения R_e рассчитывались путем численного интегрирования уравнения (7). На фиг. 2 приведены результаты расчета для сужающегося канала. С помощью диаграммы на фиг. 1 можно установить, что при $\Omega_n < 0,71$ в канале имеется одно сечение, соответствующее точке поворота, а на выходе реализуется «акустическое запираение», что соответствует частоте ниже частоты отсечки. При $0,71 < \Omega_n < 0,8$ имеются две точки поворота, обуславливающие наличие в канале зоны акустического запираения с просачиванием. При $\Omega_n > 0,8$ действительных точек поворота нет, но наличие в канале участка, где частота близка к частоте отсечки, приводит к эффекту, аналогичному так называемому надбарьерному отражению [7]. На фиг. 3 приведены результаты аналогичного расчета. При $\Omega_n < 0,8$ на выходе из канала имеет место акустическое запираение, а при $\Omega_n > 0,8$, минуя «акустическое просачивание», реализуется надбарьерное отражение, что и приводит к резкому изменению R_e .

Интересно отметить следующую особенность рассматриваемого явления. Расчеты показали, что при фиксированном распределении числа Маха стационарного потока по длине канала коэффициент отражения R_e в данном приближении не зависит ни от направления стационарного дозвукового потока газа, ни от направления распространения падающей волны.

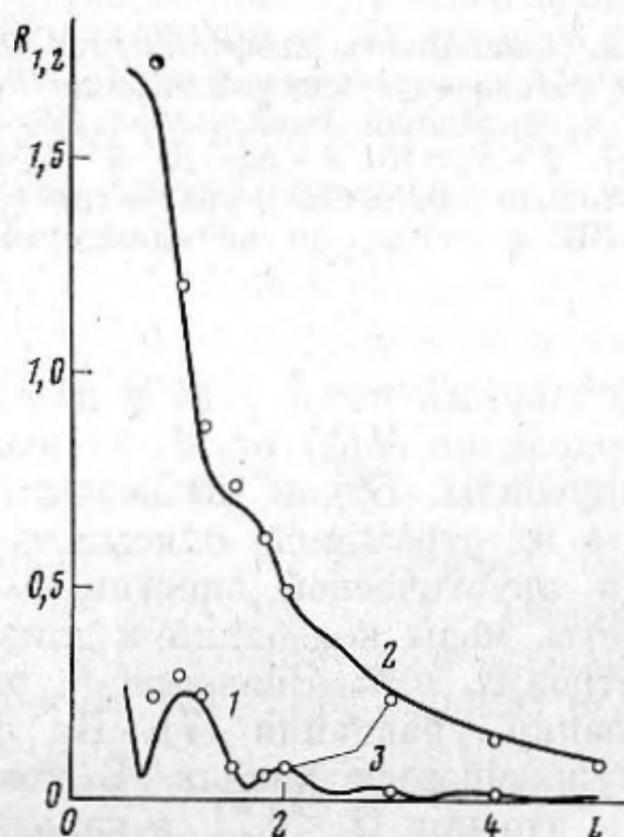
На фиг. 4 представлены результаты расчета для канала с немонотонным распределением $M(\xi)$, в котором M изменяется от значения M_1 на входе до значения M_0 в горле и затем до значения $M_2=M_1$ на выходе. Рассмотрен случай $M_1=0,1$, $l=2$. Немонотонная зависимость $R_e(\Omega_n)$ связана с наличием в этом случае системы четырех точек поворота [7] и возникающими вследствие этого резонансными свойствами канала вблизи частоты отсечки. Дело в том, что в рассматриваемом случае в канале могут возникать две зоны акустического запираения и, если просачивание через них мало, между ними могут существовать почти незатухающие «собственные» колебания. На частотах, близких к «собственным» частотам такого резонатора, отражение падающей волны становится малым. Необходимо заметить, что на резонансных режимах амплитуда колебаний внутри резонатора многократно превышает амплитуду падающей волны, поэтому к результатам линейной теории в этом случае следует относиться с осторожностью. Отметим еще, что резонансные свойства могут возник-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 3. Зависимость коэффициента отражения потока акустической энергии R_e от Ω_n в сужающемся канале: $l=0,5$, $M_1=0,1$, $M_2=0,5$. 1, 2, 3 — соответствуют тем же значениям h_n , что и на фиг. 2

Фиг. 4. Зависимость коэффициента отражения потока акустической энергии R_e от Ω_n в сужающемся — расширяющемся канале: $l=1$, $M_1=M_2=0,1$, $h_n=10$. 1 — $M_0=0,7$, 2 — $M_0=0,5$

Фиг. 5. Зависимость коэффициентов отражения R_1 и R_2 от l для сужающегося канала: $r_{w1}=1$, $r_{w2}=0,5$, $M=0$. Падающая волна: $m=1$, $n=1$, $\omega=5,34$. 1 — R_1 , 2 — R_2 , 3 — метод конечных элементов

как при наличии локального сужения, так и при наличии расширения канала.

Приведенные примеры расчета демонстрируют особенности, возникающие при распространении волны вблизи ее частоты отсечки. При рассмотрении волн других мод, возбуждаемых волной данной моды, на частотах отсечки возбуждаемых мод, как видно из анализа формул (6), также возникают особенности. Автором были проведены расчеты, иллюстрирующие такое возбуждение, и дано сравнение с «точными» результатами, полученными прямым численным интегрированием исходных уравнений в частных производных. Указанные «точные» результаты были получены Ширковским [13] с помощью схемы метода конечных элементов, разработанной применительно к расчету акустических полей в однородном покоящемся газе. При учете лишь двух взаимодействующих мод с нормами n и j система (5) в этом случае может быть сведена к двум уравнениям второго порядка для $\Phi_n^{(0)}$ и $\Phi_j^{(0)}$, которые, как и уравнение (7), не имеют особенности на частоте отсечки.

Рассмотрим сужающийся переходный участок канала с контуром в виде отрезка синусоиды и радиусом 1 на входе и 0,5 на выходе. При нормировке за характерную скорость примем скорость звука в газе. Пусть на вход в канал приходит волна первой тангенциальной ($m=1$) первой радиальной ($n=1$, $\Lambda_1=1,84$) моды на частоте $\omega=5,34$. Данная частота чуть выше частоты отсечки второй моды ($n=2$, $\Lambda_2=5,33$), ближайшей к основной, в результате чего происходит интенсивное возбуждение отраженной волны этой моды. На фиг. 5 приведена зависимость коэффициентов отражения $R_1=|A_{-1}/A_{+1}|$ и $R_2=|A_{-2}/A_{+1}|$ на входе в канал от длины l переходного участка. Хотя амплитуда A_{-2} составляет значительную величину, поток акустической энергии в этой волне не превышает нескольких процентов от потока энергии в падающей волне. На выходе из канала

частота оказывается ниже частоты отсечки второй моды, поэтому прошедшая волна этой моды экспоненциально затухает и не переносит акустической энергии. Сравнение с численными результатами, полученными с помощью метода конечных элементов, указывает на хорошую точность найденного приближенного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
2. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Физматгиз, 1980.
3. Шевченко В. В. Неоднородные акустические волноводы.— Акуст. журн., 1961, т. 7, № 4, с. 484—491.
4. Nayfeh A. H., Kaiser J. E., Telionis D. P. Transmission of sound through annular ducts of varying cross sections.— AIAA Journal, 1975, v. 13, № 1, p. 60—65.
5. Осипов А. А. Распространение трехмерных акустических возмущений в осесимметричных каналах медленно изменяющегося поперечного сечения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 5, с. 124—132.
6. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. М.: Мир, 1965.
7. Осипов А. А. Распространение трехмерных акустических возмущений в каналах переменной площади поперечного сечения при частотах, близких к частоте отсечки.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 149—159.
8. Кравцов Ю. А. О двух новых асимптотических методах в теории распространения волн в неоднородных средах.— Акуст. журн., 1968, т. 14, № 1, с. 1—24.
9. Осипов А. А. Вариационный принцип для задач акустики неоднородных потоков газа.— Акуст. журн., 1983, т. 29, № 5, с. 666—672.
10. Боровиков В. А. Высшие типы волн в плавнонерегулярных волноводах.— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 7, с. 1365—1376.
11. Nayfeh A. H., Shaker B. S., Kaiser J. E. Transmission of sound through nonuniform circular ducts with compressible mean flows.— AIAA Journal, 1980, v. 18, № 5, p. 515—525.
12. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978.
13. Левин М. П., Осипов А. А., Ширковский И. А. Использование метода конечных элементов для расчета двумерных акустических полей, излучаемых из открытого конца канала.— Акуст. журн., 1982, т. 28, № 2, с. 250—257.

Поступила в редакцию
1.VII.1983