АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 2

УДК 534.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ИЗОЭНТРОПИЧЕСКИМ ПОТОКОМ

Гладенко А. Ф., Леонтьев Е. А.

Методом эталонных функций решена задача о распространении акустических возмущений в плавно неоднородном канале с потенциальным стационарным потоком. Получены аналитические выражения для акустического потенциала в случае жестких и податливых стенок в предположении, что в сечении канала не образуется поперечная каустика.

В настоящей работе рассматривается задача о распространении акустических возмущений в цилиндрическом канале с потенциальным стационарным потоком в предположении о медленном изменении импеданса стенок и сечения канала вдоль оси. Эта задача представляет интерес, например, с точки зрения оценки уровня шума, излучаемого газотурбинным двигателем через воздухозаборник. При решении задачи используется метод эталонных функций, приспособленный к решению задач акустики каналов. В качестве эталонных функций выбираются функции Бесселя и их производные.

Отметим, что эталонные функции такого рода использовались в работах [1, 2]. Теоретические исследования распространения акустических возмущений в плавно неоднородных каналах проводились ранее на основе метода многих масштабов [3]. В частности, в работе [4] с использованием этого метода был построен главный член асимптотики нормальной моды для цилиндрического канала переменного сечения с жесткими стенками и потенциальным основным потоком. Однако к недостаткам полученного решения следует отнести то, что решение содержит только главный член асимптотики без учета поправочных членов порядка ε. Поэтому трудно судить об области применимости этого решения. Преимущество предлагаемого метода перед методом многих масштабов состоит в построении регулярной процедуры получения решения, что позволяет, используя только нулевое и первое приближение геометрической акустики, получить бóльшее число членов асимптотического решения. Построенное таким способом решение дает возможность как оценить его область применимости, так и более детально учесть изменения геометрии и импеданса стенок канала.

Рассмотрим распространение акустических возмущений в цилиндрическом канале с потоком, предполагая, что сечение канала медленно изменяется вдоль его оси. Поток будем считать стационарным безвихревым и изоэнтропическим. В этом случае потенциал акустических возмущений B удовлетворяет конвективному волновому уравнению Блохинцева [5]

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c^2}\frac{DB}{Dt}\right)+\frac{1}{2c^2}(\nabla V^2\,\nabla B)-\nabla^2 B=0, \tag{1}$$

где $\mathbf{V}$ — скорость основного стационарного потока, который в силу симметрии канала предполагается аксиально симметричным, c — скорость звука в безвихревом изоэнтропическом основном потоке, которая связана со скоростью звука c_0 в покоящейся среде соотношением $c^2=c_0^2-V^2(\gamma-1)/2$, γ — отношение удельных теплоемкостей идеального газа, $D/Dt=\partial/\partial t+(\mathbf{V}\nabla)$. Скорость основного потока $\mathbf{V}$ удовлетворяет уравнению [6]

$$c^2\operatorname{div}\mathbf{V}-\mathbf{V}(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}=0. \tag{2}$$

Граничное условие для акустического потенциала B в предположении, что стенки канала облицованы и имеют некоторую акустическую проводимость Y, имеет вид

$$\frac{\partial B}{\partial n}=-\frac{i}{\omega}\left\{\frac{D_\tau}{Dt}\left(\rho Y\frac{D_\tau B}{Dt}\right)-\rho Y\mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{V}\frac{D_\tau B}{Dt}\right\}, \tag{3}$$

где ρ — плотность движущегося газа, $D_\tau/Dt=\partial/\partial t+V_\tau\partial/\partial\tau$, $\boldsymbol{\tau}$ — касательный вектор, а вектор $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности стенки. Граничное условие (3) является обобщением обычно употребляемого граничного условия для податливой поверхности на случай неоднородной движущейся среды. Оно выводится в предположении о непрерывности давления и полной нормальной скорости на подвижной границе.

Граничным условием для основного стационарного потока является обычное условие непротекания через стенку

$$(\mathbf{Vn})=0. \tag{4}$$

Предположение о медленности изменения сечения канала подразумевает, что углы наклона стенок канала к оси всюду малы. Формально это условие можно записать, задав уравнение стенки канала в виде $r=$ $=r_0(\varepsilon z)$, где ε — малый параметр, характеризующий угол наклона стенки к оси, r_0 — функция, производные которой ограничены.

Аналогичное предположение о медленности изменения вдоль оси канала сделаем и относительно акустической проводимости $Y=Y(\varepsilon z)$.

Сформулируем процедуру нахождения решения уравнения Блохинцева (1) в предположении, что скорость основного потока $\mathbf{V}$ известна из решения уравнения (2). Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$B=[gJ_m(\varphi)-iJ_m'(\varphi)]\exp[i(\theta-\omega t)], \tag{5}$$

где ω — циклическая частота, J_m — функция Бесселя, m-го порядка, удовлетворяющая уравнению

$$J_m''+(1/\varphi)J_m'+(1-m^2/\varphi^2)J_m=0, \tag{6}$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу. Неизвестные функции g, h, φ и θ требуется определить. Будем предполагать, что φ обращается в нуль при $r=0$. Подставляя выражение (5) в уравнение (1), заменяя возникающие вторые производные функции Бесселя через саму функцию Бесселя и ее первую производную и используя уравнение (6), получим выражение, имеющее первоначальный функциональный вид. В силу линейной независимости J_m и J_m' приравняем к нулю выражение, стоящее при них. В результате получим два уравнения относительно четырех неизвестных функций g, h, φ, θ. Получить недостающие два уравнения можно, используя неопределенность выбора функций φ и θ. Потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли системе уравнений

$$(\hat F_2\theta)\nabla\theta+(s^2/\varphi^2)(\hat F_1\varphi)\nabla\varphi+\omega^2/c^2-(\omega^2/c^2)(\mathbf{V}\nabla\theta)=0,\ (\hat F_2\theta)\nabla\varphi=0, \tag{7}$$

где $\hat F_1=\mathbf{V}(\mathbf{V}\nabla)/c^2-\nabla$, $\hat F_2=\mathbf{V}[(\mathbf{V}\nabla)/c^2-\omega/c^2]-\nabla$. Тогда функции g и h будут определяться из решения системы

$$\begin{gathered}2(\hat F_2\theta)\nabla g+2\frac{s^2}{\varphi^2}(\hat F_1\varphi)\nabla h+K_2g+\left[\frac{s^2}{\varphi^2}K_1+\frac{2m^2}{\varphi^3}(\hat F_1\varphi)\nabla\varphi\right]h=i(\hat L g),\\ 2(\hat F_1\varphi)\nabla g+2(\hat F_2\theta)\nabla h+K_1g+K_2h=\\ =i\left[(\hat L h)-\frac{2}{\varphi}(\hat F_1\varphi)\nabla h+\frac{(\hat L\varphi)-2K_1}{\varphi}h\right],\end{gathered} \tag{8}$$

где $\hat L=(\mathbf{V}\nabla)^2/c^2-\nabla^2+(\mathbf{V}\nabla 1/c^2)(\mathbf{V}\nabla)+(1/2c^2)(\nabla V^2\nabla)$, $K_1=(\hat L\varphi)-$ $-(\hat F_1\varphi)\nabla\varphi/\varphi$, $K_2=(\hat L\theta)-\omega(\mathbf{V}\nabla 1/c^2)$, $s=(\varphi^2-m^2)^{1/2}$.

Система уравнений (8) получается из условия равенства нулю выражений, стоящих при J_m и J_m' с учетом уравнений системы (7).

Граничное условие (3) будет удовлетворено, если на границе положить

$$\varphi=\zeta, \tag{9}$$

где ζ — корень уравнения

$$J_m'(\zeta)+(\Gamma_2/f_0)J_m(\zeta)=0, \tag{10}$$

в котором $\Gamma_2=-ik\beta E^2$, $E=1-\alpha M_0/k\sigma$, $k=\omega/c_0$, $\sigma=[1+M_0^2(\gamma-1)/2]^{1/2}$, $f_0=\zeta/r_0$, $\alpha=(-k\sigma M_0+q)/((1-M_0^2)$, $q=[k^2\sigma^2-(1-M_0^2)f_0^2]^{1/2}$, $\beta=c_0Y\rho_0\sigma^{-\frac{2}{(\gamma-1)}}$, ρ_0 — плотность покоящегося газа, M_0 — осевое число Маха, которое находится из уравнения

$$[M_0r_0^2]^{2(\gamma-1)/(\gamma+1)}/\sigma^2=\mathrm{const}, \tag{11}$$

а для амплитуд g и h потребовать удовлетворения следующему граничному условию:

$$\begin{gathered}(\hat{T}g)+2iR_1\left[\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial g}{\partial\tau}+\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial h}{\partial\tau}\frac{s^2}{\varphi^2}\right]+N_1g+\\
+\left[\frac{s^2}{\varphi^2}N_2+R_1\frac{2m^2}{\varphi^3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2\right]-\frac{\Gamma_2}{f_0}\Big[N_2g-i(\hat{T}h)+\\
+2R_1\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial g}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial h}{\partial\tau}+\frac{i}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial h}{\partial\tau}\right]+\\
+ih\left[\frac{N_2}{\varphi}-N_1-\frac{R_1}{\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2\right]\Big]\Big\}=0.\end{gathered} \tag{12}$$

Это уравнение получается в результате подстановки выражения (5) в граничное условие (3) с учетом формул (9) и (10). Оператор $\hat{T}$ и функции N_1, N_2, R_1, входящие в уравнение (12), имеют следующий вид:

$$\hat{T}=R_1\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{\partial}{\partial n}+R_2\frac{\partial}{\partial\tau},\quad R_1=i\frac{Y\rho V^2}{\omega},$$

$$R_2=\frac{i}{\omega}\left[V^2\frac{\partial\rho V}{\partial\tau}-2i\omega\rho Y+\rho V\frac{\partial V}{\partial\tau}Y-\rho Y\left(\mathbf{n}\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial n}\right)\right],$$

$$N_1=i(\hat{T}\theta)+R_3-R_1\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)^2+\frac{s^2}{\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2\right],$$

$$N_2=(\hat{T}\varphi)+R_1\left[2i\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2\right],\quad R_3=-i\omega Y\rho.$$

Здесь ρ — плотность движущегося газа.

Для решения системы (8) представим функции g и h в виде

$$g=\sum_n g_n,\quad h=\sum_n h_n,\quad n=0,1,\ldots \tag{13}$$

Тогда функции g и h будут удовлетворять системе уравнений (8), если функции g_n и h_n будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{gathered}2(\hat{F}_2\theta)\nabla g_n+2\frac{s^2}{\varphi^2}(\hat{F}_1\varphi)\nabla h_n+K_2g_n+\left[\frac{s^2}{\varphi^2}K_1+\frac{2m^2}{\varphi^3}(\hat{F}_1\varphi)\nabla\varphi\right]h_n=i(\hat{L}g_{n-1}),\\
2(\hat{F}_1\varphi)\nabla g_n+2(\hat{F}_2\theta)\nabla h_n+K_1g_n+K_2h_n=\\
=i\left[(\hat{L}h_{n-1})-\frac{2}{\varphi}(\hat{F}_1\varphi)\nabla h_{n-1}+\frac{(\hat{L}\varphi)-2K_1}{\varphi}h_{n-1}\right].\end{gathered} \tag{14}$$

Введем в рассмотрение функции $\Phi^{\pm}$, которые будем называть эйконалами

$$\Phi^{\pm}=\theta\pm s\mp m\arccos(m/\varphi). \tag{15}$$

В силу уравнений системы (7) функции $\Phi^{\pm}$ удовлетворяют уравнениям эйконала движущейся неоднородной среды

$$c^2(\nabla\Phi^{\pm})^2=[(\mathbf{V}\nabla\Phi^{\pm})-\omega]^2. \tag{16}$$

Справедливо и обратное: если функции $\Phi^{\pm}$ удовлетворяют уравнению (16), то φ и θ удовлетворяют системе уравнений (7). Представим функции $\Phi^{\pm}$ в виде $\Phi^{\pm}=\psi^{\pm}+m\vartheta$, где ϑ – азимутальный угол в цилиндрической системе координат. С точки зрения решения (5) это соответствует зависимости от угла в виде $\exp(im\vartheta)$. Ввиду аксиальной симметрии задачи вполне естественно рассматривать частные решения с данной зависимостью от угла ϑ, которые соответствуют определенным азимутальным модам. Поэтому φ, g, h не должны зависеть от ϑ. Положим в системе (14) $n=0$ и введем в рассмотрение функции $A_0^{\pm}$ связанные с функциями g_0 и h_0 соотношениями

$$A_0^{\pm}=(\varphi g_0\pm sh_0)/\varphi s^{1/2}. \tag{17}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функции $A_0^{\pm}$ в силу уравнений системы (14) при $n=0$ будут удовлетворять однородному уравнению переноса геометрической акустики неоднородной движущейся среды

$$2(\hat{F}_2\Phi^{\pm})\nabla A_0^{\pm}+K_2A_0^{\pm}=0. \tag{18}$$

Аналогично, если ввести функции

$$A_1^{\pm}=\frac{\varphi g_1\pm sh_1}{\varphi s^{1/2}}+\frac{\pm(3s^2+5m^2)\varphi g_0-s(9s^2+7m^2)h_0}{24i\varphi s^{7/2}}, \tag{19}$$

в силу уравнений системы (14) при $n=1$, функции $A_1^{\pm}$ удовлетворяют неоднородному уравнению переноса

$$2(\hat{F}_2\Phi^{\pm})\nabla A_1^{\pm}+K_2A_1^{\pm}=i(\hat{L}A_0^{\pm}). \tag{20}$$

И вообще, системе уравнений (8) можно сопоставить общее уравнение переноса, для которого уравнения (18) и (20) являются нулевым и первым приближениями. Таким образом, используя соотношения, связывающие функции θ, φ, g, h с функциями $\Phi^{\pm}$, $A^{\pm}$, можно сопоставить уравнениям системы (7) и (14) уравнения геометрической акустики, а именно уравнения эйконала и уравнения переноса. Решения уравнений для основного стационарного потока и уравнений геометрической акустики находятся при помощи метода малого параметра путем разложения искомых функций в асимптотические ряды по степеням ε. Результатом подстановки этих рядов в уравнения (2), (16), (18), (20) и приравнивая нулю выражений, стоящих при одинаковых степенях ε, являются рекуррентные последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений. Ввиду их громоздкости они здесь не приводятся. Ограничимся лишь кратким объяснением решения задачи и полученных выражений для искомых функций. Сначала из уравнения (2) с точностью ε^2 определяется скорость основного стационарного потока. Составляющие этой скорости вдоль оси z и радиуса r имеют вид:

$$M_z=M_0+\frac{M_0}{2}(M_1^{(2)}r^2+M_2^{(2)})\varepsilon^2,\quad M_r=\varepsilon M_0\frac{r_0'}{r_0}r,$$

$$M_1^{(2)}=\frac{3-M_0^2}{M_0^2-1}\frac{r_0'^2}{r_0^2}+\frac{r_0''}{r_0},$$

$$M_2^{(2)}=\frac{1}{2(1-M_0^2)}[3r_0'^2+(M_0^2-1)r_0''r_0+\mathrm{const}].$$

а функция M_0 определяется из уравнения (11).

Константы, входящие в выражение для $M_2^{(2)}$ и в уравнение (11), определяются в некотором заданном сечении канала. После того как выражение для скорости основного потока с заданной точностью получено, находится решение уравнения эйконала (16) – функции $\Phi^{\pm}$. Затем, используя соотношения (11), определяются функции θ и φ. Последние содержат произвольную функцию f, которую определяем из граничного условия, предварительно представив ее в виде разложения в ряд по степеням ε. Как показывают вычисления, чтобы определить θ и φ с точностью до ε, необходимо определить f с точностью до ε^2. Вычисленные с точностью ε функции θ и φ имеют вид $\theta=(\theta_0/\varepsilon)+\varepsilon\theta_1$, $\varphi=f_0r+O(\varepsilon^2)$, где

$$\theta_0=\int\alpha d\xi,\quad \theta_1=(Q_1^{(1)}/2)r^2-\int(f_0f_1/q)\,d\xi,\quad Q_1^{(1)}=\alpha r_0'/r_0-q\zeta'/\zeta,\quad f_0=\zeta/r_0,$$

$$f_1=\frac{1}{2}\left[(Q_1^{(2)}/f_0^3)(s_0^2/3+m^2)+Q_2^{(2)}/f_0\right],\quad s_0^2=\zeta^2-m^2,$$

$$Q_1^{(2)}=Q_1^{(1)}(Q_1^{(1)}-2M_0P_1r_0'/r_0)-P_0^{(2)}f_0^{(2)}+q(Q_1^{(1)})'-$$

$$-M_1^{(2)}P_2-(1-\sigma^2)P_1^2r_0'^2/r_0^2,\quad Q_2^{(2)}=m^2P_0^{(2)}-M_2^{(2)}P_2,$$

$$P_1=\alpha M_0-k\sigma,\quad P_2=P_1\sigma(k+\sigma P_1),\quad P_0^{(2)}=M_0^2\zeta'^2/\zeta^2-f_0'^2/f_0^2.$$

Функции f_0, σ, M_0, $M_1^{(2)}$ и $M_2^{(2)}$ определены выше. При известных функциях $\Phi^\pm$ из однородного уравнения переноса (14) определяются амплитуды $A_0^\pm$. Далее, используя соотношения (13), получаем функции g_0, h_0. Произвольная функция ν, содержащаяся в g_0, h_0, находится из граничного условия (12), в котором вместо функций g и h стоят функции g_0 и h_0, являющиеся первыми членами разложений в ряды функции g и h (13).

Представив функцию ν в виде ряда $\sum\limits_{n=0}\varepsilon^n\nu_n$, из граничного условия (12) получим рекуррентную последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций ν_n. Вычисления показывают, что достаточно вычислить функции ν_0 и ν_1, чтобы получить g_0 и h_0 с точностью до ε. Вычисленные с точностью до ε функции g_0 и h_0 имеют следующий вид: $g_0=\nu_0+\varepsilon\nu_1$, $h_0=\varepsilon H_0^{(1)}r$, где

$$\nu_0=\frac{\mathrm{const}\,f_0\sigma^{1/(\gamma-1)}}{q^{1/2}}\exp\left(-\int R_1^{(1)}\,d\xi\right),\quad R_1^{(1)}=\frac{1}{D}\left[N_1^{(1)}-\frac{\Gamma_2}{f_0}N_2^{(1)}-\Gamma_1R_0^{(1)}\right],$$

$$\Gamma_1=\frac{2\beta M_0}{\sigma}E,\quad N_1^{(1)}=i\frac{\Gamma_1^2}{4\Gamma_2}\left(\alpha'+\alpha\frac{M_0'}{\sigma^2M_0}\right)+\frac{\Gamma_1}{2}\left(\frac{\beta'}{\beta}-\frac{r_0'}{r_0}\right)-iq\frac{\zeta'}{\zeta}r_0,$$

$$N_2^{(1)}=\zeta'\Gamma_1,\quad R_0^{(1)}=\frac{q'}{2q}+\frac{1}{1-M_0^2}\frac{r_0'}{r_0}-\frac{\zeta'}{\zeta},$$

$$D=\Gamma_1-\frac{iqr_0}{\zeta^2}(s_0^2+\Gamma_2^2r_0^2),\quad H_0^{(1)}=\frac{q}{f_0}\nu_0R_1^{(1)}.$$

Константа, входящая в выражение для ν_0, определяется в некотором заданном сечении канала. Функция ν_1 выражается через функцию ν_0. поскольку в системе рекуррентных дифференциальных уравнений относительно ν_n функция ν_0 является решением однородного уравнения, а ν_1 — решение неоднородного уравнения, правая часть которого содержит ν_0

$$\nu_1=-\nu_0\left[\int\frac{R_1^{(2)}}{\nu_0D}d\xi+\mathrm{const}\right],\ \text{где}\ R_1^{(2)}=R_0^{(2)}+G_0^{(2)}+\left(N_1^{(2)}-\frac{\Gamma_2}{f_0}N_2^{(2)}\right)\nu_0+$$

$$+i\left(\frac{s_0^2-\Gamma_2r_0}{\zeta^2}N_2^{(1)}+\frac{\Gamma_2}{f_0}N_1^{(1)}\right)H_0^{(1)}r_0-\frac{\Gamma_1^2}{f_0}\left[\frac{\Gamma_1^2}{2\Gamma_2}\zeta'\nu_0'-\right.$$

$$\left.-i\Gamma_1r_0H_0^{(1)}(\ln(H_0^{(1)}r_0))'\right],\quad R_0^{(2)}=\nu_0'\left[\frac{\Gamma_1^2}{4\Gamma_2}\left(\ln\frac{\nu_0'\beta M_0}{\sigma r_0}\right)'-r_0'\right],$$

$$G_0^{(2)}=\left\{\left[M_0^2\frac{\zeta'}{\zeta}(\ln(\nu_0M_0))'-\frac{f_0'}{f_0}(\ln(\nu_0\sqrt{f_0'}))'+\frac{M_0^2}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta}+\frac{r_0''}{r_0}\right)-\right.\right.$$

$$-\frac{P_0^{(2)}}{2}+\frac{Q_1^{(2)}}{3f_0^2}\Bigg]\nu_0-\frac{qH_0^{(1)}}{f_0}\left(\ln\left(\frac{H_0^{(1)}q^{1/2}}{f_0^2\sigma^{1/(\gamma-1)}}\right)\right)'\Bigg\}r_0,$$

$$N_1^{(2)}=i\Gamma_1\left\{\frac{\alpha+q}{4}\left[\left(M_1^{(2)}+\frac{r'^2}{r_0^2}\right]r_0^2+M_2^{(2)}\right]+Q_1^{(1)}r_0^2\left[\ln\left(r_0\sqrt{Q_1^{(1)}}\right)\right]'-\right.$$

$$\left.-\frac{f_0f_1}{q}-\frac{\alpha r_0'^2}{2}\right\}-\frac{s_0^2\Gamma_1^2}{4\Gamma_2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^2}$$

$$N_2^{(2)}=\frac{\Gamma_1^2}{4\Gamma_2}\zeta'\left[\ln\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\frac{\beta M_0}{\sigma r_0}\right)\right]'+r_0'\zeta\left[\ln\left(\frac{r_0^{1/2}}{\zeta}\right)\right]'-\frac{Q_1^{(2)}r_0^2}{3f_0}.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу ξ.

При известных функциях $\Phi^{\pm}$ и $A_0^{\pm}$ из неоднородного уравнения переноса (20) находим с точностью до ε функции $A_1^{\pm}$. Соотношения (19) позволяют определить функции g_1 и h_1. Проделав несложные вычисления, можно показать, что при требуемой точности функция g_1 имеет порядок ε, а функция h_1 — порядок ε^2. Точнее, разложение g_1 в ряд по ε начинается с члена порядка ε, а h_1 — с члена порядка ε^2. Заметим, что разложение g_0 по степеням ε начинается с члена нулевого порядка по ε, а h_0 — с первого порядка по ε. Амплитуды $A_n^{\pm}$ $(n=2,\ldots)$ дают вклад в выражение для акустического потенциала B, начиная с порядка ε^2. Следовательно, чтобы получить выражение для B с точностью до ε, достаточно вычислить амплитуды $A_0^{\pm}$ и $A_1^{\pm}$. Выражение для функции g_1, вычисленное с точностью до ε, имеет вид $g_1=i(3/8)\varepsilon(H_0^{(1)}/f_0)$. Таким образом, выражение для B с точностью до ε можно представить в виде

$$B=[(g_0+g_1)J_m(f_0r)-ih_0J_m'(f_0r)]\exp[i(\theta+m\vartheta-\omega t)]. \tag{21}$$

Решение (21) для акустического потенциала B представляет собой выражение для мод произвольного порядка m, справедливое для каналов с переменной геометрией и импедансом при наличии потенциального стационарного потока. Условием применимости асимптотического выражения (21) является малость поправочных членов по сравнению с главными. Это условие может нарушиться при больших числах k, когда в некотором сечении канала происходит касание лучей стенки. Ясно, что эталонные функции вида (5) не могут правильно описывать поле в этой области. Другое ограничение на применимость выражения (21) накладывает переменный импеданс стенки $1/\beta$. Легко показать, что функция D, стоящая в знаменателе функций $R_1^{(1)}$ и ν_1, является производной по ζ от выражения $\zeta(J_m'+\Gamma_2J_m/f_0)$, умноженной на функцию $iqr_0/\zeta J_m$. Обращение в нуль этой производной является известным условием оптимального импеданса, при котором происходит слияние двух соседних мод. Следовательно, ни в каком сечении канала импеданс не должен принимать своего оптимального значения. Если стенки канала жесткие, то возможен случай, когда в некотором сечении канала образуется поперечная каустическая поверхность, где волна претерпевает отражение. В этом сечении функция q, стоящая в знаменателе функций g_0 и θ, обращается в нуль и выражение для B становится непригодным. Этот случай требует особого рассмотрения. При этом следует использовать тот факт, что наличие жесткой стенки существенно упрощает решение. В частности, функции h_0 и g_1 обращаются в нуль и выражение для B принимает простой вид $g_0=\mathrm{const}/q^{1/2})f_0\sigma^{1/(\gamma-1)}$.

В заключение отметим, что полученное в работе выражение (21) для акустического потенциала B может оказаться полезным при расчете акустических полей в каналах авиационных двигателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Газазян Э. Д., Кинбер Б. Е.* Асимптотика осесимметричных пучков электромагнитных волн.— Изв. вузов. сер. Радиофизика, 1971, т. 14, № 8, с. 1219—1223.
2. *Токатлы В. И., Кинбер Б. Е.* Коротковолновая асимптотика волновых пучков.— Изв. вузов. сер. Радиофизика, 1971, т. 14, № 5, с. 761—767.
3. *Nayfeh A. H., Telionis D. P.* Acoustic propagation in ducts with varying cross sections.— J. Acoust. Soc. Amer., 1973, v. 54, № 6, p. 1654—1661.
4. *Осипов А. А.* Распространение трехмерных акустических возмущений в осесимметричных каналах медленно изменяющегося поперечного сечения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 5, с. 124—132.
5. *Мунин А. Г., Кузнецов В. Н., Леонтьев Е. А.* Аэродинамические источники звука. М.: Машиностроение, 1981.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954, гл. 12.

Поступила в редакцию
14.X.1983