АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 2

УДК 534.213–16+620.179–16

О ПОСТРОЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА ГРИНА ДЛЯ ТВЕРДОГО СЛОЯ

Свиридов Ю. Б.

Методом аналитического продолжения полей нормальных волн построен динамический тензор Грина для однородного изотропного упругого слоя в трехмерной геометрии. Показано, что использованный подход позволяет обойти трудности, связанные с решением неоднородных уравнений Ламэ.

Известно [1, 2], что знание динамического тензора Грина для упругого тела произвольной формы позволяет весьма просто и изящно решать задачи о возбуждении в таком теле волновых полей с помощью объемных и поверхностных сил. При моделировании процессов возбуждения, распространения и дифракции звуковых полей в твердых волноводах (например, в задачах дефектоскопии, сейсмологии и др.) среди множества упругих тел особое место занимает однородный изотропный плоскопараллельный слой, для которого решение упомянутых задач в ряде случаев удается получить в замкнутой аналитической форме.

В работах [3–11] получен ряд важных результатов при исследовании гармонического возбуждения твердого слоя в двумерной геометрии (упругая полоса). На практике, однако, часто возникает необходимость в решении трехмерных задач, так как ограниченность двумерной модели принципиально не позволяет описать диаграммы направленности излучения нормальных волн в горизонтальной плоскости. Кроме того, цилиндрическая структура нормальных волн в трехмерной задаче существенно отличается от плоской структуры волн Лэмба и сдвиговых нормальных волн (SH-волн) в двумерной [3, 4]. Отмеченные обстоятельства обусловливают необходимость построения динамического тензора Грина для твердого слоя в трехмерной геометрии, при помощи которого неоднородная задача для векторного уравнения Ламэ легко решается в квадратурах.

Сформулируем задачу о построении динамического тензора Грина для однородного изотропного упругого слоя в декартовых координатах $0xyz$. Условимся характеризовать тензор Грина $\mathbf{G}$ квадратной матрицей третьего порядка

$$\| G_k^{(j)} \| = \begin{Vmatrix} G_x^{(x)} & G_y^{(x)} & G_z^{(x)} \\ G_x^{(y)} & G_y^{(y)} & G_z^{(y)} \\ G_x^{(z)} & G_y^{(z)} & G_z^{(z)} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

элементы строк которой являются декартовыми компонентами следующих векторов:

$$\mathbf{G}^{(j)} = \mathbf{e}_x G_x^{(j)} + \mathbf{e}_y G_y^{(j)} + \mathbf{e}_z G_z^{(j)} \quad (j \equiv x, y, z). \tag{2}$$

При этом каждый из векторов $\mathbf{G}^{(j)}$ является решением неоднородной краевой задачи для уравнения Ламэ

$$\begin{gathered} \Delta^* \mathbf{G}^{(j)} + \rho\omega^2 \mathbf{G}^{(j)} = -\mathbf{e}_j \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'), \quad \mathbf{R}, \mathbf{R}' \in V, \\ T^{(n\pm)}[\mathbf{G}^{(j)}]\,|_{S\pm} = 0 \quad (z = \pm h). \end{gathered} \tag{3}$$

Для однозначной разрешимости этой задачи необходимо также потребовать, чтобы искомое решение не содержало волн, приходящих из бесконечно удаленных точек области V.

Здесь использованы следующие обозначения: $\mathbf{e}_j$ — орт декартовых координат, $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака, $\Delta^* \equiv \mu\Delta + (\lambda+\mu)\nabla\,\mathrm{div}$, λ и μ — параметры Ламэ, ρ — плотность материала слоя, $2h$ — толщина слоя, $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота колебаний, $T^{(n)} \equiv \lambda\,\mathbf{n}\,\mathrm{div} + \mu(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}) + 2\mu\dfrac{\partial}{\partial n}$ — оператор упругого напряжения [2] ($T^{(n\pm)}[\mathbf{u}]|_{S^\pm} = \mathbf{e}_x\sigma_{zx}^{\pm} + \mathbf{e}_y\sigma_{zy}^{\pm} + \mathbf{e}_z\sigma_{zz}^{\pm}$, $\sigma_{jh}^{\pm}$ — тензор упругих напряжений на поверхности слоя $S^\pm$), S^+ и S^- — верхняя ($z=h$) и нижняя ($z=-h$) границы слоя, $\mathbf{R} \equiv (x, y, z)$ и $\mathbf{R}' \equiv (x', y', z')$ — радиусы-векторы точки наблюдения и точки приложения сосредоточенной силы $\mathbf{e}_j$, $\mathbf{n}^{\pm}|_{S^\pm} = \pm\mathbf{e}_z$ — орт внешней нормали к поверхности $S^\pm$, V — область, занятая слоем.

Условимся придавать физический смысл вещественным частям комплексных векторных амплитуд полей, предварительно умноженных на временно́й фактор $e^{-i\omega t}$, который для краткости записи будем всюду опускать. Таким образом, динамический тензор Грина для свободного от поверхностных напряжений слоя характеризуется тремя векторными полями смещений $\mathbf{G}^{(j)} \equiv \mathbf{G}^{(j)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \equiv \mathbf{G}^{(j)}(x, x', y, y', z, z')$, возбуждаемыми единичными силами $\mathbf{e}_j$, сосредоточенными в точке $\mathbf{R}'$.

Известно, что отыскание тензора Грина путем прямого решения краевых задач типа (3) связано с длительными вычислениями даже для двумерной геометрии [5, 8]. Поэтому нетрудно себе представить, насколько громоздким и трудоемким окажется прямое решение трехмерной задачи (3). Для того чтобы облегчить построение тензора Грина с помощью задачи (3), применим несколько иной подход, который уместно назвать «методом аналитического продолжения». Для реализации этого метода введем так называемый динамический «поверхностный» тензор Грина $\mathbf{\Pi}$, характеризующийся матрицей

$$\|\Pi_m^{(l)}\| = \begin{Vmatrix} \Pi_x^{(x)} & \Pi_y^{(x)} & \Pi_z^{(x)} \\ \Pi_x^{(y)} & \Pi_y^{(y)} & \Pi_z^{(y)} \\ \Pi_x^{(z)} & \Pi_y^{(z)} & \Pi_z^{(z)} \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

элементы строк которой являются декартовыми компонентами следующих векторов:

$$\mathbf{\Pi}^{(l)} = \mathbf{e}_x\Pi_x^{(l)} + \mathbf{e}_y\Pi_y^{(l)} + \mathbf{e}_z\Pi_z^{(l)} \quad (l \equiv x, y, z). \tag{5}$$

При этом каждый из векторов $\mathbf{\Pi}^{(l)}$ является решением краевой задачи

$$\begin{gathered} \Delta^*\mathbf{\Pi}^{(l)} + \rho\omega^2\mathbf{\Pi}^{(l)} = 0, \quad \mathbf{R} \in V, \quad \mathbf{R}'^{+} \in S^+, \\ T^{(n^+)}[\mathbf{\Pi}^{(l)}]|_{S^+} = \mathbf{e}_l\delta(x-x')\delta(y-y') \quad (z=h), \\ T^{(n^-)}[\mathbf{\Pi}^{(l)}]|_{S^-} = 0 \quad (z=-h); \end{gathered} \tag{6}$$

условие излучения аналогично принятому в задаче (3). Здесь $\mathbf{R}'^{+} \equiv (x', y', h)$ — радиус-вектор точки приложения силы $\mathbf{e}_l$. Из уравнений (6) следует, что динамический поверхностный тензор Грина характеризуется тремя векторными полями смещений $\mathbf{\Pi}^{(l)} \equiv \mathbf{\Pi}^{(l)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'^{+}) \equiv \mathbf{\Pi}^{(l)}(x, x', y, y', z, h)$, возбуждаемыми в твердом слое единичными силами $\mathbf{e}_l$, сосредоточенными на поверхности S^+ в точке $\mathbf{R}'^{+}$. В рамках принятой терминологии тензор $\mathbf{G}$ уместно назвать «объемным» тензором Грина.

Применяя к векторам $\mathbf{G}^{(j)}$ и $\mathbf{\Pi}^{(k)}$ третью формулу Бетти [2], нетрудно получить следующее «соотношение взаимности» между объемным и поверхностным тензорами Грина:

$$\|G_k^{(j)}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}')\| = \|\Pi_j^{(k)}(\mathbf{R}', \mathbf{R}^+)\| \equiv \|\Pi_m^{(l)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'^{+})\| \Big|_{\substack{l\to k,\\ m\to j,\\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}',\\ \mathbf{R}'^{+}\to\mathbf{R}^+,}} \tag{7}$$

где $\mathbf{R}^+ \equiv (x, y, h) \in S^+$.

Равенство (7) показывает, каким образом, зная тензор $\mathbf{\Pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'^{+})$, можно найти «след» тензора $\mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ на поверхности S^{+}. Далее, используя разложение следа тензора Грина на границе S^{+} по нормальным волнам твердого слоя, можно полностью восстановить сам тензор в области V. Это оказывается возможным благодаря инвариантности структуры нормальных волн в слое по координате z относительно способа их возбуждения. Описанная процедура составляет суть метода аналитического продолжения для построения объемного динамического тензора Грина. Разумеется, при реализации этого метода с одинаковым успехом можно было бы использовать также нижнюю границу слоя S^{-}.

Таким образом, данный метод позволяет свести задачу (3) к задаче (6) и последующему аналитическому продолжению полей нормальных волн по координате z. Сразу же отметим, что построить решение задачи (6) значительно проще, чем задачи (3), так как уравнение Ламэ в задаче (6) является однородным. Что касается аналитического продолжения полей нормальных волн, то оно выполняется без труда, поскольку структуры этих волн по координате z изучены достаточно полно [3, 4].

Решение задачи (6) можно получить с помощью представления $\mathbf{\Pi}^{(l)}=\nabla\Phi^{(l)}+\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}^{(l)}$ [где $\mathbf{\Psi}^{(l)}=\operatorname{rot}(\mathbf{e}_z P^{(l)})+\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{e}_z Q^{(l)})$, $\operatorname{div}\mathbf{\Psi}^{(l)}=0$, $l=x, y, z$] [1] методами, детально разработанными в монографии [12].

Опуская промежуточные вычисления, выпишем окончательные результаты разложения компонент поверхностного тензора Грина $\mathbf{\Pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'^{+})$ в ряды по нормальным волнам твердого слоя:

$$\Pi_x^{(x)}=\frac{i}{4\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\xi_{a_n}R_{a_n}(z)\,\psi_{a_n}^{(xx)}-\xi_{s_n}R_{s_n}(z)\,\psi_{s_n}^{(xx)}+\frac{R_{a_n}^{c}(z)}{h}\,\psi_{a_n}^{(yy)\,c}+\right.$$
$$\left.+\frac{R_{s_n}^{c}(z)}{h(1+\delta_{0n})}\,\psi_{s_n}^{(yy)\,c}\right],$$

$$\Pi_y^{(x)}=\frac{i}{4\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\xi_{a_n}R_{a_n}(z)\,\psi_{a_n}^{(xy)}-\xi_{s_n}R_{s_n}(z)\,\psi_{s_n}^{(xy)}-\frac{R_{a_n}^{c}(z)}{h}\,\psi_{a_n}^{(xy)\,c}-\right.$$
$$\left.-\frac{R_{s_n}^{c}(z)}{h(1+\delta_{0n})}\,\psi_{s_n}^{(xy)\,c}\right],$$

$$\Pi_z^{(x)}=-\frac{i}{4\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\eta_{a_n}Z_{a_n}(z)\,\psi_{a_n}^{(x)}+\eta_{s_n}Z_{s_n}(z)\,\psi_{s_n}^{(x)}\right],$$

$$\Pi_x^{(y)}=\Pi_y^{(x)},\tag{8}$$

$$\Pi_y^{(y)}=\frac{i}{4\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\xi_{a_n}R_{a_n}(z)\,\psi_{a_n}^{(yy)}-\xi_{s_n}R_{s_n}(z)\,\psi_{s_n}^{(yy)}+\frac{R_{a_n}^{c}(z)}{h}\,\psi_{a_n}^{(xx)\,c}+\right.$$
$$\left.+\frac{R_{s_n}^{c}(z)}{h(1+\delta_{0n})}\,\psi_{s_n}^{(xx)\,c}\right],$$

$$\Pi_z^{(y)}=-\frac{i}{4\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\eta_{a_n}Z_{a_n}(z)\,\psi_{a_n}^{(y)}+\eta_{s_n}Z_{s_n}(z)\,\psi_{s_n}^{(y)}\right],$$

$$\Pi_x^{(z)}=\frac{i}{4\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\eta_{a_n}R_{a_n}(z)\,\psi_{a_n}^{(x)}+\eta_{s_n}R_{s_n}(z)\,\psi_{s_n}^{(x)}\right],$$

$$\Pi_y^{(z)}=\frac{i}{4\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\eta_{a_n}R_{a_n}(z)\,\psi_{a_n}^{(y)}+\eta_{s_n}R_{s_n}(z)\,\psi_{s_n}^{(y)}\right],$$

$$\Pi_z^{(z)} = -\frac{i}{4\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\zeta_{a_n} Z_{a_n}(z)\psi_{a_n} - \zeta_{s_n} Z_{s_n}(z)\psi_{s_n}\right],$$

где

$$\psi = H_0^{(1)}(kL), \quad \psi^{(x)} = -\frac{\partial\psi}{\partial(kx)} = H_1^{(1)}(kL)\cos\theta, \quad \psi^{(y)} = -\frac{\partial\psi}{\partial(ky)} =$$

$$= H_1^{(1)}(kL)\sin\theta, \quad \psi^{(xx)} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial(kx)^2} = \left[H_0^{(1)}(kL) - \frac{2}{kL}H_1^{(1)}(kL)\right]\cos^2\theta +$$

$$+\frac{1}{kL}H_1^{(1)}(kL),$$

$$\psi^{(yy)} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial(ky)^2} = \left[H_0^{(1)}(kL) - \frac{2}{kL}H_1^{(1)}(kL)\right]\sin^2\theta + \frac{1}{kL}H_1^{(1)}(kL),$$

$$\psi^{(xy)} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial(kx)\,\partial(ky)} = \left[H_0^{(1)}(kL) - \frac{2}{kL}H_1^{(1)}(kL)\right]\cos\theta\sin\theta,$$

$$\psi_{a,s_n}^{(\alpha)} \equiv \psi^{(\alpha)}\Big|_{k=k_{a,s_n}}, \quad \psi_{a,s_n}^{(\alpha)c} \equiv \psi^{(\alpha)}\Big|_{k=k^c_{a,s_n}};$$

k_{a,s_n} и k^c_{a,s_n} — корни дисперсионных уравнений нормальных волн $\Delta_a(k) = \delta^4\sin ph\cos qh + 4k^2 pq\cos ph\sin qh = 0$, $\Delta_s(k) = \delta^4\cos ph\sin qh + 4k^2 pq\sin \times ph\cos qh = 0$ и $\Delta_a^c(k) = \cos qh = 0$, $\Delta_s^c(k) = q\sin qh = 0$; $\delta = (k_t^2 - 2k^2)^{1/2}$, $p = (k_l^2 - k^2)^{1/2}$, $q = (k_t^2 - k^2)^{1/2}$, $k_{l,t} = \omega/c_{l,t}$, $c_l = [(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2}$, $c_t = (\mu/\rho)^{1/2}$, $L = [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}$, $\cos\theta(x-x')/L$, $\sin\theta = (y-y')/L$,

$$R_{a_n}(z) = \frac{2k^2}{k_t^2\delta^2\operatorname{tg} ph}\left(\delta^2\frac{\sin pz}{\cos ph} - 2pq\frac{\sin qz}{\cos qh}\right)\Big|_{k=k_{a_n}},$$

$$R_{s_n}(z) = \frac{2k^2}{k_t^2\delta^2\operatorname{ctg} ph}\left(\delta^2\frac{\cos pz}{\sin ph} - 2pq\frac{\cos qz}{\sin qh}\right)\Big|_{k=k_{s_n}},$$

$$Z_{a_n}(z) = \frac{1}{k_t^2}\left(\delta^2\frac{\cos pz}{\cos ph} + 2k^2\frac{\cos qz}{\cos qh}\right)\Big|_{k=k_{a_n}},$$

$$Z_{s_n}(z) = \frac{1}{k_t^2}\left(\delta^2\frac{\sin pz}{\sin ph} + 2k^2\frac{\sin qz}{\sin qh}\right)\Big|_{k=k_{s_n}},$$

$$\xi_{a_n} = \frac{k_t^2 kq\sin ph\sin qh}{\Delta_a'(k)}\Big|_{k=k_{a_n}}, \quad \xi_{s_n} = \frac{k_t^2 kq\cos ph\cos qh}{\Delta_s'(k)}\Big|_{k=k_{s_n}},$$

$$\eta_{a_n} = \frac{k_t^2\delta^2\sin ph\cos qh}{2\Delta_a'(k)}\Big|_{k=k_{a_n}}, \quad \eta_{s_n} = \frac{k_t^2\delta^2\cos ph\sin qh}{2\Delta_s'(k)}\Big|_{k=k_{s_n}},$$

$$\zeta_{a_n} = \frac{k_t^2 kp\cos ph\cos qh}{\Delta_a'(k)}\Big|_{k=k_{a_n}}, \quad \zeta_{s_n} = \frac{k_t^2 kp\sin ph\sin qh}{\Delta_s'(k)}\Big|_{k=k_{s_n}},$$

$$\Delta_{a,s}'(k) = \frac{d\Delta_{a,s}(k)}{dk}, \quad R_{a_n^c}(z) = (-1)^n\sin g_{a_n^c} z, \quad R_{s_n^c}(z) = (-1)^n\cos q_{s_n^c} z,$$

$$q_{a_n^c} = \frac{(2n+1)\pi}{2h}, \quad q_{s_n^c} = \frac{2n\pi}{2h}, \quad R_{a_n}(\pm h) = \pm 1, \quad R_{s_n}(\pm h) = 1,$$

$$Z_{a_n}(\pm h) = 1, \quad Z_{s_n}(\pm h) = \pm 1, \quad R_{a_n^c}(\pm h) = \pm 1, \quad R_{s_n^c}(\pm h) = 1,$$

$$\Pi_m^{(l)} \equiv \Pi_m^{(l)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'^{+}) \equiv \Pi_m^{(l)}(x, x', y, y', z, h), \quad \delta_{0n} = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n>0 \end{cases} -$$

символ Кронекера.

Подставляя выражения (8) в соотношение взаимности (7), нетрудно найти след объемного тензора Грина на поверхности S^+ (ввиду недостатка места его не приводим). Применяя метод аналитического продолжения к найденному следу $\mathbf{G}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}')$, получаем искомые выражения для компонент тензора $\mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ в области V:

$$G_x^{(x)} = \frac{i}{4\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\xi_{a_n} R_{a_n}(z) R_{a_n}(z') \psi_{a_n}^{(xx)} - \xi_{s_n} R_{s_n}(z) R_{s_n}(z') \psi_{s_n}^{(xx)} + \\ + \frac{R_{a_n}^c(z) R_{a_n}^c(z')}{h} \psi_{a_n}^{(yy)c} + \frac{R_{s_n}^c(z) R_{s_n}^c(z')}{h(1+\delta_{0n})} \psi_{s_n}^{(yy)c} \Big],$$

$$G_y^{(x)} = \frac{i}{4\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\xi_{a_n} R_{a_n}(z) R_{a_n}(z') \psi_{a_n}^{(xy)} - \xi_{s_n} R_{s_n}(z) R_{s_n}(z') \psi_{s_n}^{(xy)} - \\ - \frac{R_{a_n}^c(z) R_{a_n}^c(z')}{h} \psi_{a_n}^{(xy)c} - \frac{R_{s_n}^c(z) R_{s_n}^c(z')}{h(1+\delta_{0n})} \psi_{s_n}^{(xy)c} \Big],$$

$$G_z^{(x)} = -\frac{i}{4\mu} \sum_{n=0}^{\infty} [\eta_{a_n} Z_{a_n}(z) R_{a_n}(z') \psi_{a_n}^{(x)} + \eta_{s_n} Z_{s_n}(z) R_{s_n}(z') \psi_{s_n}^{(x)}],$$

$$G_x^{(y)} = G_y^{(x)}, \tag{9}$$

$$G_y^{(y)} = \frac{i}{4\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\xi_{a_n} R_{a_n}(z) R_{a_n}(z') \psi_{a_n}^{(yy)} - \xi_{s_n} R_{s_n}(z) R_{s_n}(z') \psi_{s_n}^{(yy)} + \\ + \frac{R_{a_n}^c(z) R_{a_n}^c(z')}{h} \psi_{a_n}^{(xx)c} + \frac{R_{a_n}^c(z) R_{a_n}^c(z')}{h(1+\delta_{0n})} \psi_{s_n}^{(xx)c} \Big],$$

$$G_z^{(y)} = -\frac{i}{4\mu} \sum_{n=0}^{\infty} [\eta_{a_n} Z_{a_n}(z) R_{a_n}(z') \psi_{a_n}^{(y)} + \eta_{s_n} Z_{s_n}(z) R_{s_n}(z') \psi_{s_n}^{(y)}],$$

$$G_x^{(z)} = \frac{i}{4\mu} \sum_{n=0}^{\infty} [\eta_{a_n} R_{a_n}(z) Z_{a_n}(z') \psi_{a_n}^{(x)} + \eta_{s_n} R_{s_n}(z) Z_{s_n}(z') \psi_{s_n}^{(x)}],$$

$$G_y^{(z)} = \frac{i}{4\mu} \sum_{n=0}^{\infty} [\eta_{a_n} R_{a_n}(z) Z_{a_n}(z') \psi_{a_n}^{(y)} + \eta_{s_n} R_{s_n}(z) Z_{s_n}(z') \psi_{s_n}^{(y)}],$$

$$G_z^{(z)} = -\frac{i}{4\mu} \sum_{n=0}^{\infty} [\zeta_{a_n} Z_{a_n}(z) Z_{a_n}(z') \psi_{a_n} - \zeta_{s_n} Z_{s_n}(z) Z_{s_n}(z') \psi_{s_n}],$$

где

$$G_k^{(j)} \equiv G_k^{(j)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \equiv G_k^{(j)}(x, x', y, y', z, z'); \quad \mathbf{R}, \mathbf{R}' \in V.$$

Выражения (9) представляют собой разложения компонент объемного динамического тензора Грина по бесконечному дискретному спектру цилиндрических нормальных волн твердого слоя. Ввиду того что числа k_{a,s_n}, k_{a,s_n}^c и зависимости компонент смещений от координаты z у цилиндрических и плоских нормальных волн [3, 4] совпадают между собой, волны, определяемые уравнениями $\Delta_{a,s}(k)=0$, уместно назвать цилиндрическими волнами Лэмба, а волны, характеризуемые уравнениями $\Delta_{a,s}^c(k)=0$,— цилиндрическими сдвиговыми нормальными волнами (SH-волнами).

Используя асимптотические оценки для волновых чисел k_{a,s_n} при $n \to \infty$ [13] и применяя мажорантный признак Вейерштрасса [14], можно показать, что бесконечные ряды (9) сходятся абсолютно и равномерно отно-

сительно $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ при $L>0$ и $fh<\infty$. Анализ разложений (9) показывает, что диаграммы направленности излучения нормальных волн по углу θ у компонент $G_z^{(z)}, G_z^{(x,y)}, G_{x,y}^{(z)}$ и $G_{x,y}^{(x,y)}$ имеют соответственно монопольную, дипольную и квадрупольную структуры [15, 16]. Из выражений (9) вытекает следующее соотношение симметрии (взаимности):

$$\|G_k^{(j)}(\mathbf{R},\mathbf{R}')\|=\|G_j^{(k)}(\mathbf{R}',\mathbf{R})\|, \tag{10}$$

которое справедливо также и для двумерной задачи [8]. Используя

$$H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+y^2})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[i(\alpha y+|x|\sqrt{k^2-\alpha^2})\right]}{\sqrt{k^2-\alpha^2}}d\alpha \qquad [17],$$

можно показать, что имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|G_k^{(j)}(R,R')\|dy'=\|\Gamma_{kj}(x,z,x',z')\| \quad (j,k\equiv x,y,z), \tag{11}$$

где $\|\Gamma_{kj}(x, z, x', z')\|$ — матрица динамического тензора Грина для слоя в плоской задаче [8]. Соотношение (11) подтверждает правильность выражений (9).

Здесь уместно сделать одно замечание. В работе [18] предпринята попытка создать общую теорию построения тензорных функций Грина для анизотропных упругих тел (в том числе и для однородного изотропного слоя). На наш взгляд, несмотря на значительный объем этой статьи, ее результаты представлены в настолько абстрактной и сложной форме, что получить с их помощью какие-либо обозримые выражения для компонент тензора Грина без больших дополнительных затрат труда практически не представляется возможным. К тому же в разделе, посвященном плоскому упругому слою, автор [18] не стал затрагивать проблемы, связанные с такими объектами как волны Лэмба и SH-волны. Отмеченные обстоятельства, к сожалению, не позволяют сравнить наши результаты [см. (9)] с результатами этой работы. Относительно использованного в настоящей работе метода следует сказать, что аналитическое продолжение полей нормальных волн для построения объемного тензора Грина в статье [18] (как, впрочем, и в работах [5, 8—11]) не применялось.

С помощью тензора $\mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ нетрудно получить решение общей трехмерной краевой задачи о гармоническом возбуждении твердого слоя поверхностными и объемными силами

$$\begin{gathered}\Delta^*\mathbf{u}+\rho\omega^2\mathbf{u}=-\mathbf{F}, \quad \mathbf{R}\in V,\\ T^{(n^\pm)}[\mathbf{u}]\,|_{S^\pm}=\mathbf{T}^{(\pm)} \quad (z=\pm h);\end{gathered} \tag{12}$$

условия излучения аналогичны принятым в задаче (3). Здесь использованы следующие обозначения: $\mathbf{u}\equiv\mathbf{u}(\mathbf{R})$, $\mathbf{F}\equiv\mathbf{F}(\mathbf{R})$, $\mathbf{T}^{(\pm)}\equiv\mathbf{T}^{(\pm)}(\mathbf{R}^\pm)$, $\mathbf{R}^\pm\equiv(x, y, \pm h)\in S^\pm$.

Применяя третью формулу Бетти [2] к векторам $\mathbf{u}(\mathbf{R})$, $\mathbf{G}^{(j)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ и учитывая соотношение (10), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{R})=\int\limits_{S^+}\mathbf{T}^{(+)}(\mathbf{R}'^+)\mathbf{G}(\mathbf{R},\mathbf{R}'^+)ds'+\int\limits_{S^-}\mathbf{T}^{(-)}(\mathbf{R}'^-)\mathbf{G}(\mathbf{R},\mathbf{R}'^-)ds'+\\ +\int\limits_{V}\mathbf{F}(\mathbf{R}')\mathbf{G}(\mathbf{R},\mathbf{R}')dv'\end{aligned} \tag{13}$$

где $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'\in V$; $\mathbf{R}'^\pm\equiv(x', y', \pm h)\in S^\pm$. Выражение $\mathbf{AG}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ здесь следует понимать как матричное произведение однострочной матрицы $\mathbf{A}=\|A_x, A_y, A_z\|$ на матрицу $\|G_k^{(j)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')\|$ [2].

Полученные результаты [см. (9), (13)] позволяют доказать важную теорему о полноте системы векторов смещений нормальных волн твердого

слоя (этот сложный вопрос затрагивался еще в работе [4]). Известно, что основные трудности здесь связаны с несамосопряженностью соответствующей однородной краевой задачи для волн Лэмба [3, 4] (спектральный параметр — волновое число k — нелинейно входит в граничные условия). Это влечет за собой неортогональность векторов смещений лэмбовских волн на отрезке $|z|\leqslant h$.

Из абсолютной и равномерной сходимости рядов (9) для тензора Грина при $L\equiv|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|>0$ вытекает абсолютная и равномерная сходимость соответствующего разложения (13) по нормальным волнам для вектора $\mathbf{u}(\mathbf{R})$ внутри слоя, за исключением, быть может, ограниченных областей, на поверхностях которых заданы напряжения $\mathbf{T}^{(\pm)}$. Этот вывод следует из анализа сходимости интегралов в (13), а также с учетом асимптотики $\psi^{(\alpha\beta)}\sim O(L^{-2})$ при $\mathbf{r}\to\mathbf{r}'$ [см. (8); α, $\beta\equiv x$, y]. В действительности же, как это следует из общей теории [2], тензор Грина при $\mathbf{R}\to\mathbf{R}'$ обладает менее сильной особенностью [$\mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')\sim O(|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|^{-1})$ при $\mathbf{R}\to\mathbf{R}'$]. Отсюда еще не вытекает, что разложения (8), (9) ошибочны. Это означает лишь, что ряды по нормальным волнам (8), (9) при $L\to 0$ становятся расходящимися и по асимптотическому поведению их членов нельзя судить о структуре всей суммы.

Без существенного ограничения общности будем считать, что $\omega>0$ и не совпадает ни с одной из критических частот (k_{a,s_n}, $k^c_{a,s_n}\neq 0$); корни дисперсионных уравнений k_{a,s_n} и k^c_{a,s_n} — простые; $\mathbf{T}^{(\pm)}\in\mathbf{L}_2(S^\pm)$, $\mathbf{F}\in\mathbf{L}_2(V)$ (здесь $\mathbf{L}_2(S^\pm)$ и $\mathbf{L}_2(V)$ — соответствующие гильбертовы пространства).

Нетрудно заметить, что $\mathbf{u}(\mathbf{R})\notin\mathbf{L}_2(V)$, поскольку интеграл $\int\limits_V |\mathbf{u}(\mathbf{R})|^2 dv$ расходится, если в среде отсутствует поглощение. Однако вместо вектора $\mathbf{u}(\mathbf{R})\equiv\mathbf{u}(r, \varphi, z)$, можно рассмотреть его «след» $\tilde{\mathbf{u}}\equiv\mathbf{u}(\tilde{r}, \varphi, z)$ на боковой поверхности цилиндра Σ достаточно большого радиуса $\tilde{r}$. На этой поверхности уже имеет смысл введение функционального векторного пространства $\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Sigma)$ (пространства С. Л. Соболева) с конечной энергетической нормой $\|\tilde{\mathbf{u}}\|^{(1)}_{2,\Sigma}$ [19]. Из равномерной сходимости разложения (13) и его производных при $r=\tilde{r}$ следует, что любой вектор из $\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Sigma)$ можно аппроксимировать на Σ со сколь угодно высокой степенью точности (по норме) последовательностью $\{\tilde{\mathbf{u}}_N\}$ линейных комбинаций конечного числа векторов смещений лэмбовских и сдвиговых нормальных волн при достаточно большом N (N — число членов, удерживаемых в рядах (9)). Это означает, что $\|\tilde{\mathbf{u}}-\tilde{\mathbf{u}}_N\|^{(1)}_{2,\Sigma}\to 0$ при $N\to\infty$. Отсюда вытекает, что система векторов смещений нормальных волн твердого слоя является полной в $\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Sigma)$, а, следовательно (в силу теоремы Ф. Реллиха о компактности вложения $\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Sigma)$ в $\mathbf{L}_2(\Sigma)$ [19]) также и в $\mathbf{L}_2(\Sigma)$. Отметим, что доказанное утверждение весьма важно для корректного обоснования различных приближенных методов решения дифракционных задач [20—22].

В качестве одного из многочисленных приложений тензора Грина к исследованию рассеяния нормальных волн на дефектах в твердом слое рассмотрим следующую типичную задачу.

Пусть из бесконечности на дефект, занимающий в слое конечную область D с гладкой границей S, падает произвольная нормальная волна ($\mathbf{u}_{\text{пад}}$). Для определенности положим, что напряжения на поверхности S равны нулю (дефект типа полости). Представим полное поле в области $V-D$ в виде $\mathbf{u}_{\text{пад}}+\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — рассеянное поле. Очевидно, $\mathbf{u}$ должно удовлетворять следующей краевой задаче:

$$\begin{gathered}\Delta^*\mathbf{u}+\rho\omega^2\mathbf{u}=0, \qquad \mathbf{R}\in V-D,\\ T^{(n\pm)}[\mathbf{u}]\,|_{S^\pm}=0 \qquad (z=\pm h),\\ T^{(n)}[\mathbf{u}]\,|_S=-T^{(n)}[\mathbf{u}_{\text{пад}}]\,|_S\equiv-\mathbf{T}_{\text{пад}}(\mathbf{R})\,|_S;\end{gathered} \tag{14}$$

условия излучения аналогичны задаче (3); $\mathbf{n}$ — нормаль к S, внутренняя по отношению к области D.

Применяя третью формулу Бетти [2] к векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{G}^{(j)}$, получаем:

$$\mathbf{u}(\mathbf{R})\chi(\mathbf{R})=-\int\limits_S \mathbf{G}(\mathbf{R}',\mathbf{R})\mathbf{T}_{\text{пад}}(\mathbf{R}')\,ds'-\int\limits_S \mathbf{H}(\mathbf{R}',\mathbf{R})\mathbf{u}(\mathbf{R}')\,ds', \qquad (15)$$

где

$$\underset{(j,k=x,y,z)}{\chi(\mathbf{R})}=$$

$$=\begin{cases} 1, & \mathbf{R}\in V-D, \quad \mathbf{H}(\mathbf{R},\mathbf{R}')=T^{(n)}[\mathbf{G}(\mathbf{R},\mathbf{R}')]\,|_S=\|(T^{(n)}[\mathbf{G}^{(j)}(\mathbf{R},\mathbf{R}')]\,|_S)_k\| \\ 0, & \mathbf{R}\in D; \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{G}\mathbf{T}_{\text{пад}}$ и $\mathbf{H}\cdot\mathbf{u}$ следует понимать как произведения квадратных (3×3) матриц на векторы-столбцы.

Для вычисления $\mathbf{u}(\mathbf{R})$ необходимо найти $\mathbf{u}(\mathbf{R})\,|_S$. Здесь можно применить два подхода. В первом случае устремим точку $\mathbf{R}$ к поверхности дефекта S (безразлично с какой стороны). Учитывая свойства потенциалов простого и двойного слоя [2], получаем следующее сингулярное интегральное уравнение для неизвестного вектора $\mathbf{u}(\mathbf{R})\,|_S$:

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{R})+\fint\limits_S \mathbf{H}(\mathbf{R}',\mathbf{R})\mathbf{u}(\mathbf{R}')\,ds'=-\int\limits_S \mathbf{G}(\mathbf{R}',\mathbf{R})\mathbf{T}_{\text{пад}}(\mathbf{R}')\,ds', \qquad (16)$$

где $\mathbf{R}\in S$; интеграл с чертой следует понимать в смысле главного значения.

Во втором случае положим в (15) $\mathbf{R}\in D$. Тогда получим следующее каноническое функциональное уравнение [2], которое не является сингулярным:

$$\int\limits_S \mathbf{H}(\mathbf{R}',\mathbf{R})\mathbf{u}(\mathbf{R}')\,ds'=-\int\limits_S \mathbf{G}(\mathbf{R}',\mathbf{R})\mathbf{T}_{\text{пад}}(\mathbf{R}')\,ds' \quad \mathbf{R}\in D. \qquad (17)$$

Для приближенного решения уравнений (16), (17) можно использовать методы, развитые в монографии [2].

Предложенный в настоящей работе метод построения объемного тензора Грина с помощью поверхностного, основанный на аналитическом продолжении полей нормальных волн, может быть также эффективно применен к волноводам с более сложной конфигурацией поперечного сечения (круга, кольца, прямоугольника и др.), допускающей разделение переменных при решении векторного уравнения Ламэ.

В заключение отметим, что поверхностный тензор Грина $\mathbf{\Pi}(\mathbf{R},\mathbf{R}'^{+})$ был использован в работе [23] при исследовании возбуждения нормальных волн в ферромагнитном слое с помощью фокусирующего электромагнитно-акустического преобразователя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морс Ф. М.* и *Фешбах Г.* Методы теоретической физики, т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
2. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
3. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
4. *Микер Т.* и *Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках. Перевод в кн. Физическая акустика, т. 1, ч. А /Под ред. Мэзона У. М.: Мир, 1966. 592 с.
5. *Вовк А. Е., Тютекин В. В.* Возбуждение нормальных волн в плоском упругом волноводе силами, заданными в его поперечном сечении.– Тр. АКИН, 1969, № 9, с. 5–96.
6. *Бобровницкий Ю. И.* Соотношение ортогональности для волн Лэмба.– Акуст. журн., 1972, т. 18, № 4, с. 513–515.
7. *Федорюк М. В.* Соотношения типа ортогональности в твердых волноводах.– Акуст. журн., 1974, т. 20, № 2, с. 310–314.
8. *Харитонов А. В.* Возбуждение колебаний упругой изотропной пластины системой объемных и поверхностных сил.– Акуст. журн., 1978, т. 24, № 4, с. 602–610.
9. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

10. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
11. *Miklowitz J.* The theory of Elastic Waves and Waveguides.– North-Holland Series in Appl. Math. and Mech., 1980, v. 22, 618 p.
12. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 503 с.
13. *Меркулов Л. Г., Рохлин С. И., Зобнин О. П.* Расчет спектра волновых чисел для волн Лэмба в пластине.– Дефектоскопия, 1970, № 4, с. 12–17.
14. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1967. 608 с.
15. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 495 с.
16. *Скучик Е.* Основы акустики, т. 2, М.: Мир, 1976. 544 с.
17. *Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
18. *Pardee W. J.* Acoustic emission and the plate Green's function.– J. Math. Phys., 1977, v. 18, № 4, p. 676–686.
19. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
20. *Егоров Н. Н., Харитонов А. В.* Дифракция сдвиговых нормальных волн на поверхностной трещине в упругой пластине.– Акуст. журн., 1979, т. 25, № 1, с. 65–71.
21. *Свиридов Ю. Б.* Вариационный метод в динамике твердых нерегулярных волноводов.– Акуст. журн., 1979, т. 25, № 2, с. 280–287.
22. *Касаткин Б. А.* Дифракция нормальных волн на мягком экране типа расслоения в пластине.– Акуст. журн., 1981, т. 27, № 2, с. 248–253.
23. *Дружаев Ю. А., Свиридов Ю. Б., Бобров В. Т.* Фокусировка ультразвукового поля в ферромагнитном слое.– Тез. докл. IX Всесоюзн. науч.-техн. конф. Неразрушающие физические методы и средства контроля, Минск, 1981, секция А, ч. 2, с. 99–100.

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук МССР

Поступила в редакцию
20.VI.1983