АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 2

УДК 517.9

ДИФРАКЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОМ ЦИЛИНДРЕ, ОКРУЖЕННОМ НЕОДНОРОДНЫМ СЛОЕМ

Ткаченко В. А., Яковлев В. В.

Рассмотрена нестационарная задача дифракции плоского акустического импульса на абсолютно жестком цилиндре, окруженном слоем радиально неоднородной сжимаемой жидкости. Методом сплайн-коллокации исследовано влияние неоднородного слоя на распределение суммарного давления по поверхности жесткого цилиндра.

Во многих практически важных случаях приходится иметь дело с распространением и дифракцией волн в неоднородных средах, т. е. в средах, свойства которых меняются в пространстве. Математически эти задачи описываются дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами и построение их решений для произвольных законов изменения плотности и скорости звука наталкивается на серьезные трудности. В работах [1, 2] построены решения стационарной и нестационарной задач дифракции плоской акустической волны на абсолютно жесткой сфере, окруженной слоем неоднородной жидкости. Решение задач получено с помощью метода обобщенных степенных рядов [3]. Причем для решения нестационарной задачи применяется метод численного обращения преобразования Лапласа с помощью смещенных многочленов Лежандра [4]. Такой подход к решению нестационарных задач применялся в работах [3, 5—7].

В настоящей статье рассмотрена нестационарная задача дифракции плоского акустического импульса [6] на абсолютно жестком круговом цилиндре, окруженном неоднородным слоем. Ее решение основано на применении метода сплайн-коллокации [8] в пространстве изображений преобразования Лапласа. Такой подход имеет большую общность по сравнению с методом обобщенных степенных рядов, так как позволяет рассматривать произвольные законы изменения плотности и скорости звука в неоднородном слое. Апробация методики расчетов проводилась путем сравнения с решением, полученным методом обобщенных степенных рядов.

Рассмотрим задачу дифракции плоского акустического импульса на абсолютно жестком цилиндре радиуса a, который окружен радиально неоднородным акустическим слоем радиуса b, характеризуемым переменной плотностью $\rho(r)$ и скоростью звука $c(r)$.

Пусть плоская волна вида [6]

$$p_i(r,\ \theta,\ t)=p_{0i}e^{-\alpha(t-b+r\cos\theta)}U(t-b+r\cos\theta) \tag{1}$$

в момент времени $t=0$ касается границы неоднородного слоя и фронт волны параллелен оси цилиндра. Здесь p_{0i} — максимальное значение давления на фронте, α — параметр, характеризующий степень затухания давления за фронтом набегающей волны, $U(z)$ — функция Хевисайда.

В области $r\in[b,\ \infty)$ — движение среды, имеющей в невозмущенном состоянии плотность ρ_1 и скорость звука c_1, описывается волновым уравнением относительно возмущенного давления $p_1(r,\ \theta,\ t)$, равного сумме давлений в падающей $p_i(r,\ \theta,\ t)$ и рассеянной $p_s(r,\ \theta,\ t)$ волнах:

$$\nabla^2 p_1-\frac{\partial^2 p_1}{\partial t}=0,\quad \theta\in[0,2\pi],\quad t\in[0,\infty). \tag{2}$$

В области $r\in[a, b]$ уравнение движения неоднородной акустической среды имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{\rho'(r)}{\rho(r)}\right)\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}=\frac{1}{c^2(r)}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \tag{3}$$

$$p=p(r, \theta, t), \quad \theta\in[0, 2\pi], \quad t\in[0, \infty).$$

Искомые функции во внутренней и внешней области должны удовлетворять следующим граничным и начальным условиям

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=a}=0, \quad p|_{r=b}=p_1|_{r=b}, \quad \left.\frac{1}{\rho(r)}\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=b}=\left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=b}, \tag{4}$$

$$p_s|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial p_s}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \qquad p|_{t=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{5}$$

В выражениях (1)–(5) и далее введены безразмерные величины по формулам (звездочки в изложении опущены) $p^*=p/\rho_1 c_1$, $t^*=tc_1/b$, $r^*=r/b$, $a^*=a/b$, $\rho^*=\rho/\rho_1$, $\alpha^*=b/c_1\alpha$, $c^*=c/c_1$.

Величину b при записи (1) и (4) в безразмерных переменных следует полагать равной единице.

Решение задачи будем искать с помощью интегрального преобразования Лапласа [9]

$$\bar f(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt. \tag{6}$$

Тогда (2)–(4) с учетом (5), (6) примет вид

$$\nabla^2\bar p_1-s^2\bar p_1=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\bar p}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{\rho'(r)}{\rho(r)}\right)\frac{\partial\bar p}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}=\frac{s^2}{c^2(r)}\bar p. \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial\bar p}{\partial r}\right|_{r=a}=0, \quad \bar p|_{r=b}=\bar p_1|_{r=b}, \quad \left.\frac{1}{\rho(r)}\frac{\partial\bar p}{\partial r}\right|_{r=b}=\left.\frac{\partial\bar p_1}{\partial r}\right|_{r=b}. \tag{9}$$

Разлагая плоскую волну (1) в ряд Фурье по косинусам и применяя интегральное преобразование Лапласа (6), получим [6]

$$\bar p_i=\frac{p_{0i}e^{-s}}{\alpha+s}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m I_m(sr)\cos m\theta. \tag{10}$$

Преобразование Лапласа рассеянной волны $\bar p_s$, удовлетворяющее уравнению (7), с учетом нулевых начальных условий для p_s, представим разложением

$$\bar p_s=\sum_{m=0}^{\infty}a_m K_m(sr)\cos m\theta. \tag{11}$$

Здесь $I_m(z)$, $K_m(z)$ – модифицированные функции Бесселя, $\varepsilon_m=\{1, m=0; 2, m>0\}$.

Решение внутри неоднородного слоя запишем в виде ряда, аналогичного рядам (10), (11)

$$\bar p=\sum_{m=0}^{\infty}R_m(r)\cos m\theta, \tag{12}$$

где $R_m(r)$ – решение уравнения

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{\rho'(r)}{\rho(r)}\right)\frac{\partial R}{\partial r}-\left(\frac{s^2}{c^2(r)}+\frac{m^2}{r^2}\right)R=0, \tag{13}$$

которое получается из уравнения (8) после разделения переменных $\bar{p}=R(r)T(\theta)$.

Для построения решения уравнения (13) применяется метод сплайн-коллокации [8], сущность которого заключается в следующем.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$L[y(x)]=y''+p(x)y'+g(x)y=r(x), \quad x\in[a, b], \tag{14}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$(\alpha_1 y+\beta_1 y')|_{x=a}=\gamma_1, \quad (\alpha_2 y+\beta_2 y')|_{x=b}=\gamma_2. \tag{15}$$

Введем на $[a, b]$ сетку Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$ и будем искать приближенное решение задачи (14)–(15) в виде кубического сплайна $S(x)$, разложенного по базису из нормализованных кубических B-сплайнов

$$y(x)\approx S(x)=\sum_{p=i-3}^{i} b_p B_p(x), \quad x\in[x_i, x_{i+1}].$$

где

$$B_{i-3}(x)=\frac{(x_i+h-x)^3}{6h^3},$$

$$B_{i-2}(x)=\frac{3(x-x_i)^3-6h(x-x_i)^2+4h^3}{6h^3},$$

$$B_{i-2}(x)=\frac{-3(x-x_i)^3+3h(x-x_i)^2+3h^2(x-x_i)+h^3}{6h^3}$$

$$B_i(x)=\frac{(x-x_i)^3}{6h^3}.$$

Потребуем, чтобы сплайн $S(x)$ удовлетворял уравнению (14) в узлах коллокации $\xi_k\in[a, b]$, $k=0, \ldots, N$ и краевым условиям (15).

Рассмотрим случай равномерного шага сетки $h=x_{i+1}-x_i=(b-a)/N$, в котором узлы сплайна x_i совпадают с узлами коллокации ξ_i. Тогда в узлах коллокации получим систему $N+3$ линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов b_p $L[S(x_i)]=0$, $i=0, \ldots, N$, $\alpha_1 S(a)+\beta_1 S'(a)=\gamma_1$, $\alpha_2 S(b)+\beta_2 S'(b)=\gamma_2$.

Таким образом, построили решение задачи, которое точно удовлетворяет уравнению (14) и граничным условиям (15) в узлах коллокации

$$y(x_i)=\sum_{p=i-3}^{i} b_p B_p(x_i), \quad i=0, \ldots, N. \tag{16}$$

Коэффициенты разложения (12) вычислялись в узлах коллокации по формуле (16), которая была написана для уравнения (13). При этом в точках b и a ставились граничные условия

$$sK_m'(sb)R_m(b)-K_m(sb)R_m'(b)=$$

$$=\frac{p_{0i}s\varepsilon_m e^{-s}}{\alpha+s}[I_m(sb)K_m'(sb)-I_m'(sb)K_m(sb)], \quad R_m'(a)=0.$$

Апробация численной методики сплайн-коллокации была проведена путем сравнения с решением, полученным методом обобщенных степенных рядов, в случае, когда член $\rho'(r)/\rho(r)$ не учитывается.

Пусть плотность $\rho(r)$ и скорость звука $c(r)$ изменяются по закону $\rho(r)=\rho_c+(1-\rho_c)r^q$, $c^2(r)=[\rho_c+(1-\rho_c)r^q]^{-1}$, и, следовательно, уравнение (13) можно представить в виде

$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+r\frac{\partial R}{\partial r}-\{s^2[\rho_c+(1-\rho_c)r^q]+m^2\}R=0. \tag{17}$$

Решение уравнения (8) запишем в виде ряда

$$\bar{p}=\sum_{m=0}^{\infty}[b_m R_m^{(1)}(r)+c_m R_m^{(2)}(r)]\cos m\theta, \tag{18}$$

где $R_m^{(1)}(r)$ и $R_m^{(2)}(r)$ — два линейно независимых решения уравнения (17), которые можно представить в виде обобщенных степенных рядов [13]

$$R_m^{(1)}(r)=r^m\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r^n,\quad R_m^{(2)}(r)=R_m^{(1)}(r)\ln r+$$

$$+r^{-m}\sum_{n=0}^{2m-1}\beta_n r^n+r^{-m}\sum_{i=2m}^{\infty}\beta_i r^i,$$

$[(n+m)^2-m^2]\alpha_n-s^2\rho_c\alpha_{n-2}-s^2(1-\rho_c)\alpha_{n-q-2}=0$, $\alpha_0=1$, $\alpha_j=0$, $j<0$, $[(n-m)^2-m^2]\beta_n-s^2\rho_c\beta_{n-2}-s^2(1-\rho_c)\beta_{n-q-2}=0$, $n<2m$, $-s^2\rho_c\beta_{2m-2}+2m\alpha_0=0$, $n=2m$, $[(m+i)^2-m^2]\beta_{2m+i}+s^2\rho_c\beta_{2m+i-2}-s^2(1-\rho_c)\beta_{2m+i-q-2}+2(m+i)\alpha_i=0$, $n>2m$, $n=2m+i$, $i=1, 2, \ldots$ $\beta_{2m}=1$, $\rho_c>{}^1/_2$.

Подставляя (10), (11) и (18) в (9), получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов a_m, b_m, c_m.

Переход из пространства лапласовых изображений в пространство оригиналов осуществляется путем численного обращения преобразования Лапласа с помощью смещенных многочленов Лежандра $P_n(t)$ [4]

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_n P_n(t), \tag{19}$$

где

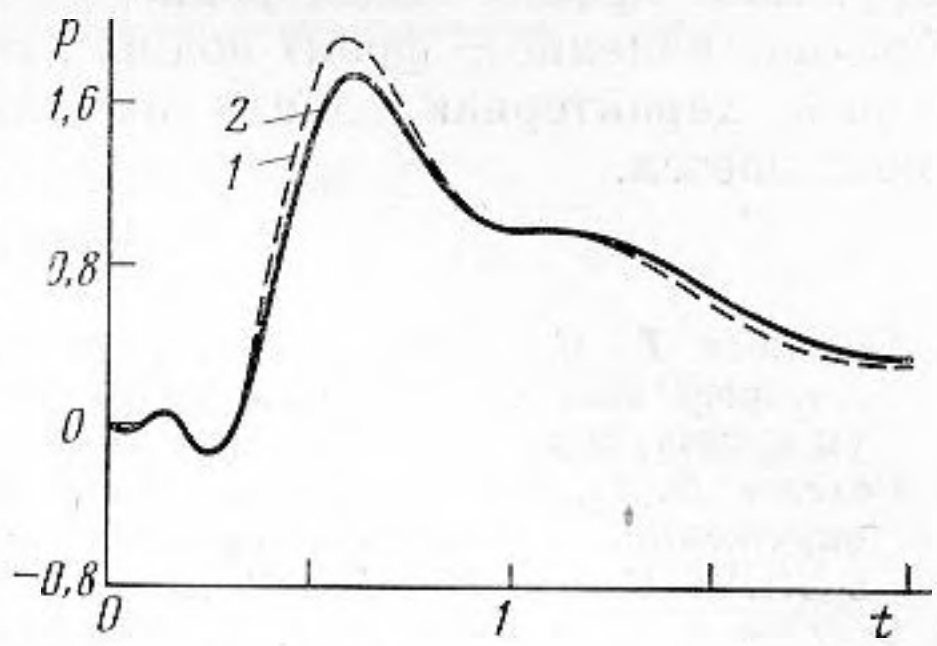
$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}\bar{f}(k+1),\quad P_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}e^{-kt},$$

$$\alpha_k^{(n)}=(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\frac{(n+k)!}{n!k!}.$$

Формула (19) дает представление функции $f(t)$ в виде сходящегося ряда, коэффициенты которого выражаются через равноотстоящие значения параметра s интегрального преобразования Лапласа вдоль вещественной оси.

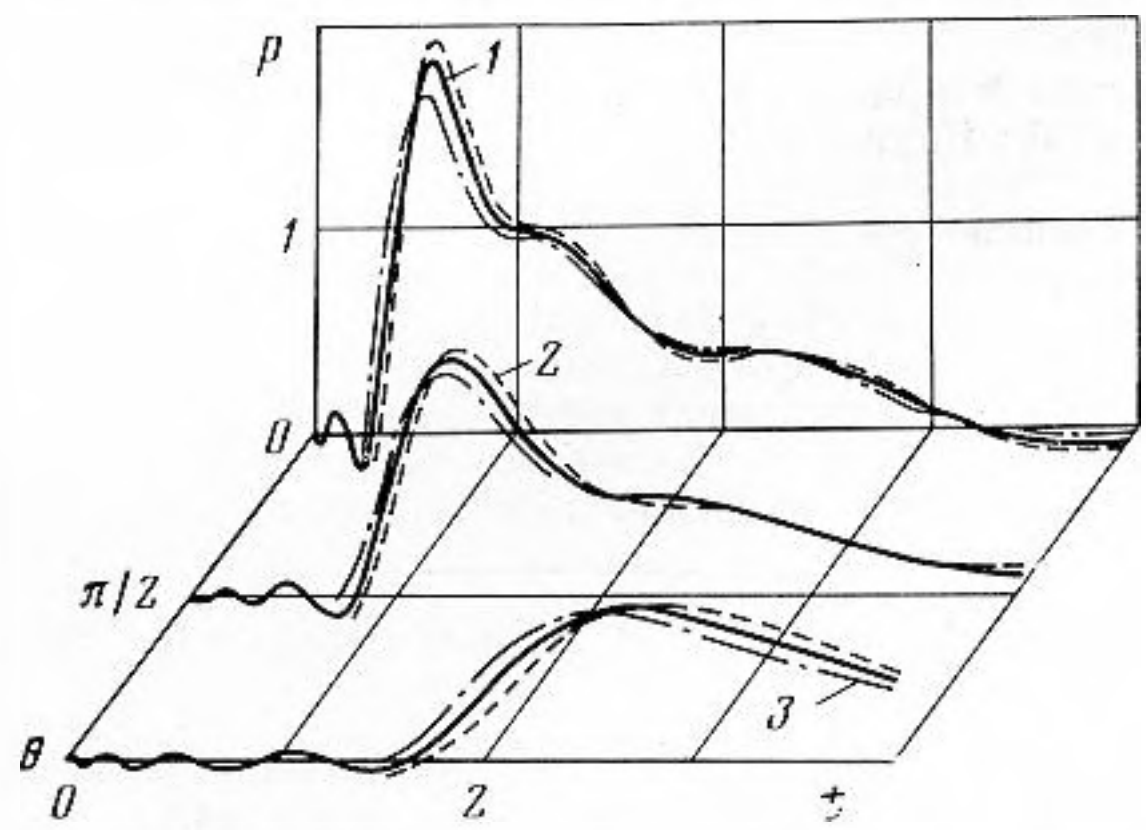
Численное обращение преобразования Лапласа проводилось на ЭВМ БЭСМ-6/7 с двойной точностью (24 значащих цифр). При этом ряд (19) усекался, и в [1] показано, что наиболее оптимально удерживать 12 членов ряда, так как при дальнейшем увеличении их числа происходит накопление машинной погрешности и расчеты становятся неустойчивыми. При численных расчетах ряды (10)—(12) и (18) также усекались и число членов выбиралось таким образом, чтобы падающий импульс, вычисленный с помощью ряда (10) и его точное выражение (1) в пространстве оригиналов имели наименьшую погрешность. При построении решений с помощью метода сплайн-коллокации количество узлов коллокации N варьировалось от 10 до 20 и относительная погрешность не превышала 1%. Результаты численных расчетов приведены на фиг. 1—2 при $q=2$, $p_{0i}=1$, $\alpha=0{,}5$, $a=0{,}6$, $b=1$, $r=a$.

На фиг. 1 построены кривые изменения суммарного давления на поверхности цилиндра в точке $\theta=0$ в зависимости от времени при $\rho_c={}^1/_4$: *1* — соответствует случаю, когда член $\rho'(r)/\rho(r)$ учтен и решение задачи построено методом сплайн-коллокации, *2* — соответствует решениям, полученным методом обобщенных степенных рядов и методом сплайн-коллокации при пренебрежении градиентами плотности в неоднородном слое. Из графиков следует, что решения, полученные методом сплайн-коллокации и методом степенных рядов совпадают, а учет $\rho'(r)/\rho(r)$ приводит к некоторому увеличению максимального значения давления на поверхности жесткого цилиндра.



Фиг. 1. Апробация численного метода сплайн-коллокации

Из графиков также следует, что применение численного обращения приводит к некоторому размыву фронта дифрагированной волны. Численные эксперименты по обращению падающего импульса показали, что такой размыв связан с погрешностью выбранного метода и его величина



Фиг. 2. Изменение давления на поверхности жесткого цилиндра в зависимости от времени при $\rho_c=1$ (*1*); 1,4 (*2*) и 0,6 (*3*)

слабо зависит от числа членов ряда (19). При численном обращении дифрагированной волны увеличение членов ряда (19) свыше 12 приводит к быстрому накоплению машинной погрешности, обусловленной погрешностью вычисления функций Макдональда для больших значений аргумента.

На фиг. 2 построены аналогичные кривые изменения суммарного давления в трех характерных точках на поверхности жесткого цилиндра $\theta=0$, $\pi/2$, π в случае, когда член $\rho'(r)/\rho(r)$ учтен. Из графиков следует, что наличие неоднородного слоя приводит к сокращению времени достижения передним фронтом волны поверхности цилиндра при $\rho_c<1$ и увеличению времени при $\rho_c<1$. Кроме того, фокусирующие (рассеивающие) свойства неоднородного слоя при $\rho_c>1$ ($\rho_c<1$) приводят к тому, что время действия положительной фазы давления уменьшается (увеличивается), а его максимальное значение увеличивается (уменьшается). Это происходит потому, что в фокусирующем неоднородном слое скорость звука меньше, чем в окружающей однородной среде и, следовательно, фронт волны изгибается в направлении, противоположном направлению распространения импульса. Кроме того, характерная длина импульса, который огибает цилиндр, окруженный неоднородным слоем, уменьшается, а амплитуда его увеличивается по сравнению с импульсом, огибающим жесткий цилиндр при отсутствии неоднородного слоя. Эти явления и обусловливают фоку-

сирующий эффект неоднородного слоя при $\rho_c > 1$. При $\rho_c < 1$ происходит обратное явление — фронт волны изгибается по ходу распространения импульса, характерная длина импульса увеличивается, а его амплитуда уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яковлева Т. М.* Дифракция акустических волн на локальных неоднородностях: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.– матем. наук. Киев: Киевский гос. ун-т, 1983. 18 с.
2. *Селезов И. Т., Яковлева Т. М.* Дифракция волн на абсолютно жесткой сфере, окруженной слоем неоднородной жидкости. Киев, 1982. 8 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 1982, № 2668–82. Деп.
3. *Селезов И. Т., Сидорчук В. Н., Яковлев В. В.* Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа. Киев: Наук. думка, 1983. 208 с.
4. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974, 224 с.
5. *Аникьев И. И., Беспалова Е. И., Воротникова М. И. и др.* Дифракция ударного импульса на жестком цилиндре. Киев: Наук. думка, 1976. 32 с.
6. *Ткаченко В. А., Яковлева Т. М.* Дифракция ударной волны на неоднородном цилиндре.– В кн.: Математические методы исследования гидродинамических течений. Киев: Наук. думка, 1978, с. 110.
7. *Селезов И. Т., Ткаченко В. А.* Исследование неустановившихся волн методом численного обращения преобразования Лапласа.– В кн.: Теория дифракции и распространения волн: VII Всесоюз. симпозиум по дифракции и распространению волн. Кратк. тексты докл. М.: Изд-во АН СССР, 1977, т. 3, с. 133.
8. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
9. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и *Z*-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.

Институт гидромеханики
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
28.VI.1983

После исправления
24.IV.1984