АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 3

УДК 534.539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ И ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОСТИ И ТВЕРДОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Коваленко Г. П.

Определены коэффициенты отражения и преломления акустической волны на границе жидкости и твердой среды, слабонеоднородной по глубине полупространства. Расчет выполнен в высокочастотном приближении для случая одной точки поворота продольного и поперечного типов.

Получение приближенных явных выражений для коэффициентов отражения и преломления акустической волны в неоднородной среде связано с использованием априорной информации о свойствах неоднородной среды и частоте колебаний. Так, в работе [1] из общего представления для коэффициентов выводятся приближенные явные выражения для высоко- и низкочастотных колебаний при отсутствии точек поворота. Наличие последних и их взаимное расположение существенно влияют на алгоритм интегрирования системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Так, при одной точке поворота продольного или поперечного типа решение уравнений строится с использованием функций Эйри — Фока, при двух точках поворота одного типа используются функции параболического цилиндра. По-видимому, невозможно сочетать практическую полезность выражений для коэффициентов отражения и преломления с их пригодностью для любых неоднородных сред, параметры которых являются гладкими функциями одной из координат.

Ниже рассматривается твердая упругая среда, параметры Ламе λ, μ и плотность ρ которой являются гладкими функциями координаты z — глубины полупространства, занятого средой. Векторное уравнение движения такой среды имеет вид

$$\xi\nabla\nabla\mathbf{u}-\mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}+\lambda' i_z\nabla\mathbf{u}+\mu'(i_z\times\nabla\times\mathbf{u}+2\mathbf{u}')=\rho\ddot{\mathbf{u}},$$
$$\xi=\lambda+2\mu, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор смещений, ∇ — оператор Гамильтона, штрих означает производную по z, а точка — производную по времени, $\mathbf{i}_z$ — единичный вектор. Предполагая движение среды двумерным, зависимость от времени гармонической, ищем вектор смещений $\mathbf{u}$ в виде $\mathbf{u}=\mathbf{P}(\alpha, z)\exp(i\alpha x+i\omega t)$, $\mathbf{u}=(u_x, u_z)$, $\mathbf{P}(\alpha, z)=(P_1(\alpha, z), P_2(\alpha, z))$, где α — параметр, ω — частота колебаний. Искомые функции P_n удовлетворяют системе двух дифференциальных уравнений второго порядка, которую запишем в векторном виде, перейдя к уравнениям первого порядка

$$\mathbf{Y}'=(\alpha A+B)\mathbf{Y},\quad \mathbf{Y}=(P_1, P_2, P_3, P_4)^{\tau}, \tag{2}$$

где

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ q_1^2\gamma & 0 & 0 & -i(\gamma-1) \\ 0 & q_2^2\gamma^{-1} & -i(1-\gamma^{-1}) & 0 \end{Vmatrix},\ B=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu'}{\mu}i & -\frac{\mu'}{\mu} & 0 \\ -\frac{\lambda'}{\xi}i & 0 & 0 & -\frac{\xi'}{\xi} \end{Vmatrix},$$

$$q_1^2=1-\sigma^2 v_1^{-2},\quad q_2^2=1-\sigma^2 v_2^{-2},\quad P_3=P_1'/\alpha,\quad \sigma=\omega\alpha^{-1},\quad \gamma=\xi/\mu,$$

$$v_n^2=(\mu/\rho)\gamma^{2-n},\quad P_4=P_2'/\alpha.$$

Верхний индекс τ означает операцию транспонирования. Обозначим через $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$ два линейно независимые частные решения системы (2), ограниченные при $z\to\infty$ $\mathbf{Y}_n=(P_{1n}, P_{2n}, P_{3n}, P_{4n})$. Тогда $\mathbf{u}=[C(\alpha)\mathbf{Y}_1(\alpha, z)+$ $+D(\alpha)\mathbf{Y}_2(\alpha, z)]\times\exp[i(\alpha x+\omega t)]$, где $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ находятся из граничных условий.

Потенциал падающей и отраженной акустической волны в жидкости, занимающей верхнее полупространство, запишем в виде

$$\Phi=[\exp(-z\cos\varphi)+V\exp(z\cos\varphi)]\exp(ikx\sin\varphi), \tag{3}$$

где $k=\omega/c$ — волновое число в жидкости, c — скорость звука, φ — угол между нормалью к фронту волны и осью z, V — искомый коэффициент отражения акустической волны. В плоскости $z=0$ выполняются такие граничные условия

$$\sigma_z=-\rho_1\omega^2\Phi,\quad \sigma_{xz}=0,\quad \partial\Phi/\partial z=\dot{u}_z, \tag{4}$$

где σ_z, σ_{xz} — компоненты тензора напряжений. Используя закон Гука и условия (4), выразим V, C и D через P_{kn}:

$$V=Q_1Q_2^{-1},\quad C=2\rho_1(iP_{22}-P_{32})Q_2^{-1},$$
$$D=2\rho_1(P_{31}-iP_{21})Q_2^{-1}, \tag{5}$$

где

$$Q_n=k\cos\varphi R-k^4\rho_1\rho^{-1}\Omega(-1)^n,\quad \Omega=P_{22}P_{31}-P_{21}P_{32},$$
$$R=\gamma\Delta_{43}+(\gamma-2)\Delta_{12}+i(\gamma\Delta_{42}+(\gamma-2)\Delta_{13}),$$

где ρ_1 — плотность жидкости, принятая постоянной, а

$$\Delta_{mn}=(P_{m1}P_{n2}-P_{m2}P_{n1})(-1)^n. \tag{6}$$

Явный вид P_{mn} можно найти только приближенно. При этом метод определения и сам вид P_{mn} зависят от наличия точек поворота системы (2). Под точкой поворота здесь понимается значение z, при котором меняется кратность собственных значений $\mp q_n$ матрицы A. Полагаем, что они распадаются на две пары чисел $\mp q_1$, $\mp q_2$ такие, что $q_1\neq q_2$, если $\sigma>0$. Как показано в работе [2], при выполнении указанного условия существует гладкое невырожденное преобразование $\mathbf{Y}=T\mathbf{X}$, приводящее матрицу A к квазидиагональному виду:

$$T^{-1}AT=\|H_1, H_2\|\equiv H,\qquad T=\begin{Vmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & i & -i & 0\\ 0 & -1 & q_2^2 & 0\\ q_1^2 i & 0 & 0 & -i\end{Vmatrix}.$$
$$H_n=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ q_n^2 & 0\end{Vmatrix}, \tag{7}$$

Вектор-столбец $\mathbf{X}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{X}'=(\alpha H+K)\mathbf{X}, \tag{8}$$

где $K=T^{-1}BT-T^{-1}T'$. Далее предполагаем, что скорости продольной v_1 и поперечной v_2 волн возрастают монотонно при $z<z_m$, а при $z>z_m$ они постоянны. Считая, наконец, что $v_1(0)<v_2(z_m)$, замечаем, что для $\sigma\in$ $\in(v_1(0), v_2(z_m))$ найдется такое z, притом одно, когда $\sigma=v_n(z)$, откуда и находятся точки поворота $z_{\sigma n}$ соответственно продольного и поперечного типов.

Систему уравнений (8) решаем методом эталонного уравнения, представив $\mathbf{X}$ в виде ряда

$$X=\sum_{\nu=0}^{\infty}S_\nu(z)\alpha^{-\nu}W, \tag{9}$$

где

$$|\alpha^{-\nu}|<1, \quad W=\|W_1, W_2\|, \quad W_n=\begin{Vmatrix} W_{1n} & W_{2n} \\ W_{1n}' & W_{2n}' \end{Vmatrix},$$

$$W_{1n}=\frac{2\alpha^{1/6}}{\sqrt{\theta_n'}}\,Э_1(\alpha^{2/3}\theta_n), \quad W_{2n}=\frac{\alpha^{1/6}}{\sqrt{\theta_n'}}\,Э_2(\alpha^{2/3}\theta_n),$$

$$\theta_n=\left(\frac{3}{2}\int\limits_{z_{\sigma n}}^{z}|q_n(x,\sigma)|\,dx\right)^{2/3}\operatorname{sign}|z-z_{\sigma n}|.$$

Здесь S_ν — искомые матрицы, $Э_1$, $Э_2$ — функции Эйри — Фока. Учитывая, что матрица W является фундаментальной для векторного уравнения $y'=(\alpha H+\alpha^{-1}M)y$, $|\alpha|>1$, $M=\|M_1, M_2\|$,

$$M_n=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ r_n & 0 \end{Vmatrix} \quad r_n=\psi_n''/\psi_n, \quad \psi_n=(\theta_n')^{-1/2},$$

подставим (9) в уравнение (8) и приравняем слагаемые при одинаковых степенях α. Тогда получим $S_0H-HS_0=0$, $S_1H-HS_1=KS_0-S_0'$, $S_{m+1}H-HS_{m+1}=KS_m-S_{m-1}M-S_m'$, $m=1, 2, 3\ldots$ Первое уравнение имеет общее решение

$$S_0=\begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_0 & d_0 \\ d_0q_1^2 & a_0 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} c_0 & b_0 \\ b_0q_2^2 & c_0 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix}$$

где a_0, b_0, c_0, d_0 — произвольные функции. Они находятся из условий разрешимости следующего уравнения:

$$\operatorname{tr}(KS_0-S_0')=0, \quad \operatorname{tr}(H(KS_0-S_0'))=0, \tag{10}$$

где символ tr означает след матрицы [3]. Условия (10) дают: $d_0=b_0=0$, $a_0=c_0=\sqrt{(\rho_0/\rho)}$. Решая второе уравнение, получим

$$S_1=\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & \pi_1 & 0 \\ f_1 & a_1 & 0 & \pi_2 \\ \pi_1 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & \pi_2 & f_2 & a_2 \end{Vmatrix}, \quad \pi_n=\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\left(\frac{2\mu'}{\mu}\gamma^{1-n}-\frac{\rho'}{\rho}\right)(q_1^2-q_2^2)^{-1},$$

$$f_n=b_nq_n^2-\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\left(\pi_1-\frac{\rho'}{2\rho}\right),$$

$$\rho_0=\rho(0)$$

где a_n, b_n — произвольные функции, которые находятся из условий разрешимости уравнения для S_2. Они записываются аналогично условиям (10) и дают $a_n=\sqrt{\rho_0\rho^{-1}}$,

$$b_n=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\,q_n^{-1}(z)\int\limits_0^z(\varepsilon^2+\varepsilon'+r_n)\,q_n(z)\,dz, \quad \varepsilon=\frac{2\mu'}{\sigma^2\rho}-\frac{\rho'}{2\rho}.$$

Итак, матрица S_1 определена полностью. Подобным образом можно найти и остальные матрицы. Однако ввиду возрастания громоздкости элементов следующих матриц ограничимся первым приближением, считая среду слабонеоднородной. С учетом изложенного выше фундаментальная матрица решений системы (2) представится в виде

$$Y=\sqrt{\rho_0/\rho}\,T[E+\alpha^{-1}\sqrt{\rho/\rho_0}\,S_1+O(\alpha^{-2})]W, \tag{11}$$

где E — единичная матрица четвертого порядка, T и W даны выше, а символ $O(\alpha^{-2})$ указывает на порядок малости элементов следующих матриц. Первый и третий столбцы матрицы (11) дают приближенное представление элементов P_{mn}. Подставив их значения в формулы (5), (6), получим

$$R=R_0+R_1+O(\alpha^2), \quad \Omega=\Omega_0+\Omega_1+O(\alpha^2),$$

$$R_0=(2\alpha^2-k_2^2)^2W_1W_2-4\alpha^2W_1'W_2',$$

$$R_1=2(2\alpha^2-k_2^2)(\pi_1-\pi_2)(W_1W_2)'+G_1W_1W_2'+G_2W_1'W_2; \tag{12}$$

$$G_n=b_n(2\alpha^2-k_2^2)^2-4\alpha^4f_{3-n};\quad n=1,2,\quad \Omega_0=W_2W_1';$$

$$\Omega_1=W_1'W_2'b_2+W_1W_2(\pi_1+f_1).$$

В зависимости от угла падения φ выражения для V, C и D можно упростить. Покажем это на примере коэффициента отражения V. Пусть сначала $\varphi\in(\arcsin(c/v_n),\ \pi/2)$. Для определенности положим, что $c<v_2$. Тогда из соотношений

$$\sin\varphi=(c/v_1)\sin\varphi_1=(c/v_2)\sin\varphi_2,\quad \alpha=k_n\sin\varphi_n,\quad k_n=\omega/v_n, \tag{13}$$

где φ_n $(n=1,\ 2)$ — углы, образованные нормалями к фронтам продольной и поперечной волн и осью z, следует, что оба угла φ_n будут комплексными. К функциям Эйри — Фока применим дебаевскую асимптотику

$$Э_{1n}=[q_n^{-1/2}(0,\sigma)+O(\alpha^{-1})]\exp\left(-\alpha\int\limits_{z_{0n}}^{0}q_n(z,\sigma)\,dz\right),$$

$$Э_{1n}'=-[q_n^{1/2}(0,\sigma)+O(\alpha^{-1})]\exp\left(-\alpha\int\limits_{z_{0n}}^{0}q_n(z,\sigma)\,dz\right). \tag{14}$$

Подставив выражение (14) в (21) и выполнив преобразования, получим

$$V=\frac{h_1-g_1+i(h_2-g_2)}{h_1+g_1+i(h_2+g_2)}, \tag{15}$$

где

$$h_1=R_0k\cos\varphi,\quad ig_2=\frac{\rho_1}{\rho}\cos\varphi_1,\quad ih_2=k\cos\varphi R_1,\quad g_1=\rho_1\rho^{-1}(0)\Omega_1,$$

$$R_0=\cos^2 2\varphi_2-\gamma_0^{-1/2}(0)\cos\varphi_1\cos^{-1}\varphi_2\sin^2 2\varphi_2,$$

$$R_1=-2\cos 2\varphi_2(\pi_1-\pi_2)(\gamma^{-1/2}\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)+G_1\cos\varphi_2+\gamma^{-1/2}G_2\cos\varphi_1;$$

$$G_n=b_n\cos^2 2\varphi_2-4\sin^4\varphi_2f_{3-n},\quad \Omega_1=\rho_1\rho^{-1}(0)[b_2\gamma^{-1/2}\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\pi_1+f_1].$$

Если отбросить поправочные слагаемые R_1 и Ω_1, то формула (15) совпадет после некоторых преобразований с выражением для V, полученным в работе [4] для однородных сред. В однородном случае $|V|=1$ имеет место полное отражение. Неоднородность среды приводит к изменению фазы отраженной волны. Приращение фазы $\Delta\Psi$, вызванное неоднородностью среды, находится по формуле

$$\Delta\Psi=\operatorname{arctg}\frac{2(g_1h_2-h_1g_2)}{h_1^2+h_2^2-g_1^2-g_2^2}-\operatorname{arctg}\frac{2h_1g_2}{g_2^2-h_1^2},$$

где второе слагаемое справа дает фазу отраженной волны в случае однородной среды. Далее оценим модуль коэффициента отражения V. Из выражения (15) находим

$$1-|V|^2=\frac{4(g_1h_1+g_2h_2)}{(h_1+g_1)^2+(h_2+g_2)^2}>0,$$

откуда следует, что $|V|<1$. Если дальше уменьшать угол падения φ, то он достигнет значения $\varphi=\arcsin(c/v_2)$. Тогда из зависимости (13) следует, что $\varphi_2=\pi/2$, а фазовая скорость $\sigma=v_2$, т. е. имеется точка поворота поперечного типа. Поэтому дебаевскую асимптотику можно применить только к функции $Э_1$. Выполнив преобразования, получим

$$V=V_{11}V_{21}^{-1},$$

где

$$V_{n1}=(R_{01}+R_{11})k\cos\varphi-(-1)^n\rho_1\rho^{-1}(0)(\Omega_{01}+\Omega_{11}),$$

$$R_{01}=Э_2(t_s)-4(1-\gamma^{-1}(0))^{1/2}\alpha^{-1/3}Э_2'(t_s)\varkappa_2'+O(\alpha^{-2/3}),$$

$$\Omega_{01}=[Э_2(t_s)+O(\alpha^{-2/3})]k_2(1-\gamma^{-1}(0))^{1/2},$$

$$R_{11}=2(\pi_1-\pi_2)(\sqrt{1-\gamma^{-1}}Э_2(t_s)+\Lambda_1)+G_\perp\Lambda_1+G_2\sqrt{1-\gamma^{-1}}Э_2(t_s);$$

$$\Lambda_1=Э_2'(t_s)\alpha^{-1/3}\varkappa_2'+O(\alpha^{-2/3}),\quad G_n=b_n-4f_{3-n};$$

$$\Omega_{11}=b_2\sqrt{1-\gamma^{-1}}\Lambda_1+Э_2(t_s)(\pi_1+f_1),$$

$$t_s=\left(2\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\right)^{1/3}(v_2')^{-2/3}|_{z=0}(\sigma-v_2(0))\alpha^{2/3},$$

$$\varkappa_2'=-(v_2^{-2}(v_2^2)')^{1/3}|_{z=0}<0.$$

Далее рассмотрим интервал $(\arcsin(c/v_1), \arcsin(c/v_2)$. Здесь тоже применим дебаевскую асимптотику, но с учетом того, что аргумент функции Эйри – Фока $Э_1$ становится мнимым. Записав $V=V_{12}V_{22}^{-1}$, где V_{n2} дается аналогично V_{n1} с заменой индекса 1 на 2, имеем

$$R_{02}=\sin\Psi_s\cos^2 2\varphi_2-4i\sqrt{\gamma(0)}\,|\cos\varphi_1|\cos\varphi_2\sin^2\varphi_2\cos\Psi_s,$$

$$R_{12}=-2\cos 2\varphi_2(\pi_1-\pi_2)(\cos\varphi_2\cos\Psi_s+i|\cos\varphi_1|\sin\Psi_s)+$$
$$+G_1\cos\varphi_2\cos\Psi_s+iG_2|\cos\varphi_1|\sin\Psi_s,$$

$$\Omega_{12}=ib_2|\cos\varphi_1|\cos\varphi_2\cos\Psi_s+(\pi_1+f_1)\sin\Psi_s,$$

$$\Omega_{02}=ik_1\frac{\rho_1}{\rho}|\cos\varphi_1|\sin\Psi_s;\qquad \Psi_s=\alpha\int_0^{z_{\sigma_2}}|q_2(z,\sigma)|dz.$$

Как и в случае однородной среды, коэффициент отражения V является комплексной величиной, по модулю меньшей единицы. Приращение модуля и фазы, вызванное неоднородностью среды, можно оценить в первом приближении по формулам, аналогичным приведенным выше.

Пусть далее $\varphi=\arcsin(c/v_1)$, при этом $\sin\varphi_1=1$. Отсюда следует, что $\sigma=v_1$, т. е. имеется точка поворота продольного типа. Дебаевская асимптотика применима только к функции $Э_2$. После простых преобразований получим $V=V_{13}V_{23}^{-1}$, $R_{03}=(2\gamma^{-1}(0)-1)^2Э_1(t_p)\sin\Psi_s+4\sqrt{\gamma^{-1}(0)-1}\times\cos\Psi_s\alpha^{-1/3}Э_1'(t_p)\varkappa_1'\gamma^{-1}(0)$, $\Omega_{03}=\alpha^{-1/3}\sin\Psi_sЭ_1'(t_p)\varkappa_1'$, $R_{13}=2(2\gamma^{-1}(0)-1)(\pi_1-\pi_2)(\Lambda_2\sin\Psi_s+Э_1(t_p)\cos\Psi_s)+G_1Э_1(t_p)\cos\Psi_s+G_2\Lambda_2\sin\Psi_s$; $\Lambda_2=\alpha^{-1/3}Э_1'(t_p)\gamma^{-1}(0)$, $\Omega_{13}=\Lambda_2b_2\cos\Psi_s+Э_1(t_p)(\pi_1+f_1)\sin\Psi_s$, $G_n=b_n(2\gamma^{-1}\times(0)-1)^2-4\gamma^2(0)f_{3-n}$. В однородном случае здесь имеем $V=1$. Из приведенной выше формулы, также получается этот результат, ибо в случае однородной среды $z_{\sigma_2}=0$, а поправочные слагаемые R_{13}, Ω_{13} исчезают, что и приводит к указанному результату.

Если $\varphi<\arcsin(c/v_1)$, то оба угла φ_1, φ_2 действительны, обе функции Эйри – Фока имеют мнимый аргумент. Снова применив дебаевскую асимптотику, находим

$$V=V_{14}V_{24}^{-1},\quad R_{04}=-\cos^2 2\varphi_2\sin\Psi_s\sin\Psi_p-$$
$$-4\sqrt{\gamma(0)}\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sin^2\varphi_2\cos\Psi_s\cos\Psi_p,\quad \Omega_{04}=k_1\sin\Psi_s\cos\Psi_p\cos\varphi_1,$$

$$R_{14}=-2\cos 2\varphi_2(\pi_1-\pi_2)(\sqrt{\gamma(0)}\cos\varphi_1\cos\Psi_p\sin\Psi_s+\cos\varphi_2\sin\Psi_p\cos\Psi_s)+$$
$$+G_1\sin\Psi_p\cos\varphi_2\cos\Psi_s+G_2\sin\Psi_s\cos\varphi_1\cos\Psi_p,$$

$$\Omega_{14}=b_2\sqrt{\gamma(0)}\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Psi_p\cos\Psi_s+\sin\Psi_s\sin\Psi_p(\pi_1+f_1),$$

$$\Psi_p=\alpha F_p(\sigma)+\pi/4,\quad F_p=\int_0^{z_{\sigma_1}}|q_1(z,\sigma)|dz.$$

Аналогичные выкладки можно провести для коэффициентов преломления продольной и поперечной волн C и D

$$C=2(\rho_1/\rho)\,[\cos 2\varphi_1(W_2+\alpha^{-1}b_2W_2')+\alpha^{-1}\pi_2W_2']\,Q_2^{-1},$$
$$D=2(\rho_1/\rho)\,[-2\sin\varphi_2W_1'+\alpha^{-1}W_1(\pi_1\cos 2\varphi_2+2f_1)]\,Q_2^{-1}, \tag{16}$$

где значение Q_2 приведено в формулах (5) и (12). Особенность выражений (16), отличающая их от случая однородной среды, состоит в том, что здесь не существует угла падения акустической волны, при котором в твердой неоднородной среде не возбуждаются продольная или поперечная волны. Это и следовало ожидать, так как неоднородность среды делает процесс распространения продольных и поперечных волн связанным (см., например, работу [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Молотков Л. А.* Отражение и преломление волн неоднородным слоем. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Изд-во ЛГУ, вып. 15, 1975, с. 31–42.
2. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 1966. 252 с.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
4. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
5. *Коваленко Г. П.* Метод связанных параметров в теории упругости непрерывно-неоднородных сред.— В кн.: Механика неоднородных структур. Тез. докл. I Всесоюз. конф. Киев: Наук. думка, 1983, с. 104–105.

Харьковский политехнический институт
им. В. И. Ленина, Сумский филиал

Поступила в редакцию
19.VII.1982
после исправления
11.XI.1983