АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 3

УДК 534.874.2:534.26

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ АКУСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕЙ

Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А.

Доказана акустическая неустойчивость стационарных плоских и осесимметричных вихрей специального вида (вихрь Кельвина, вихревое кольцо) и ее связь с вариационным принципом Арнольда. Вычислена энергия возмущений в двумерном и трехмерном случаях и определены инкременты всех неустойчивых гармоник вихря Кельвина при малом характерном числе Маха течения.

В недавних работах, посвященных излучению звука возмущенным аксиальным вихрем с постоянной завихренностью в ядре, была обнаружена его акустическая неустойчивость [1] и дано физическое объяснение механизма этой неустойчивости [2]. Было показано [2], что возмущения Кельвина аксиального вихря для гармоники $n=2$ представляют собой состояния с отрицательной энергией. Иными словами, для создания этих возмущений необходимо отбирать энергию у системы. Вместе с тем возмущениям Кельвина соответствует нестационарное движение жидкости, которое при учете сжимаемости среды приводит к излучению звука, реализуя указанный выше механизм потери энергии рассматриваемой системой. Все это в совокупности приводит к акустической неустойчивости — неустойчивости, обусловленной способностью излучать звук. Естественно, что в пределе несжимаемой жидкости, т. е. при числах Маха $M=0$, излучение отсутствует и возмущения аксиального вихря нейтрально устойчивы, что соответствует известному результату, полученному Кельвином [3]. Акустическая неустойчивость как феномен была впервые обнаружена на таком простом вихревом объекте, как аксиальный вихрь, однако описанный выше физический механизм неустойчивости будет применим и к другим вихревым структурам всякий раз, когда они будут обладать состояниями с отрицательной энергией, в которых вихрь излучает звук. Очевидно, для этого необходимо, чтобы им соответствовало нестационарное движение. В настоящей работе доказывается, что не только вторая гармоника, но и все возмущения Кельвина являются состояниями с отрицательной энергией и дается отличный от [2] вывод инкрементов неустойчивых гармоник. Наряду с этим рассматривается тонкое стационарное вихревое кольцо с завихренностью, пропорциональной расстоянию от оси симметрии. При этом рассмотрена динамика малых осесимметричных возмущений, наложенных на стационарное состояние, и показано, что осесимметричные возмущения такого кольца также являются состояниями с отрицательной энергией, т. е. акустическая неустойчивость присуща и такому более реальному объекту, как кольцевой вихрь. Выбор рассматриваемых вихревых объектов обусловлен наиболее простой динамикой движения возмущений, заключающейся только в деформации границы ядра, если начальное возмущение границы не нарушает в первом случае двумерности вихря Кельвина, а во втором — осевой симметрии вихревого кольца.

Пусть в безграничной несжимаемой жидкости задан плоский стационарный круговой вихрь радиуса $r_0=a$ с постоянной завихренностью Ω_0 в ядре. Возмущения Кельвина представляют собой решения уравнений динамики несжимаемой жидкости, линеаризованных относительно основного стационарного состояния. В полярной системе координат (r, φ), связанной с центром невозмущенного круга, эти решения имеют зависимость от угла φ и времени t вида [3] $\cos\left(n\varphi-\frac{n-1}{2}\Omega_0 t\right)$. В частности, возмущенная граница ядра вихря имеет вид

$$r=\alpha\left[1+\varepsilon_n\cos\left(n\varphi-\frac{n-1}{2}\Omega_0 t\right)+O(\varepsilon_n^2)\right], \tag{1}$$

где ε_n — малая амплитуда возмущения границы.

Вычислим энергию возмущений ΔT_n (разность кинетических энергий возмущенного и невозмущенного течения). Так как интенсивность вихревой трубки является интегралом движения, то при вычислении ΔT_n потребуем (так как $\Omega_0=\text{const}$), чтобы площадь области (1) равнялась площади невозмущенного круга $S_0=\pi\alpha^2$. Энергией двумерного течения безграничной, покоящейся на бесконечности, жидкости называют величину [4]

$$T=-(\rho/4\pi)\int\Omega(\mathbf{x})\Omega(\mathbf{x}')\ln|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\,d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{x}', \tag{2}$$

где ρ — плотность, интегрирование ведется по области завихренности Ω. В силу постоянства завихренности ($\Omega=\Omega_0$) в возмущенном и невозмущенном состояниях разность энергий достигается только за счет изменения формы области интегрирования. Конкретное вычисление энергии возмущений ΔT_n с помощью формулы (2) показывает, что при условии постоянства площади ΔT_n определяется только величинами линейной динамики и с учетом соотношения (1) имеет вид

$$\Delta T_n=-\pi\rho\Omega_0^2\alpha^4\varepsilon_n^2(n-1)/4n+O(\varepsilon_n^3), \tag{3}$$

т. е. все значения ΔT_n — отрицательны, а следовательно, основное состояние акустически неустойчиво.

То, что для вычисления энергии возмущений достаточно знать их динамику только в линейном приближении, совсем не удивительно. Действительно, согласно вариационному принципу Арнольда [5, 6], стационарные состояния жидкости есть точки условного экстремума кинетической энергии на множестве всех равнозавихренных течений (здесь условие равнозавихренности есть равенство площадей), в силу чего первая вариация энергии должна быть тождественно равна нулю, а так как вторая выражается через квадраты вариаций течения, то для вычисления $\delta^2 T$ в них достаточно сохранить лишь линейные части. Причем отрицательная определенность второй вариации энергии $\delta^2 T$ соответствует акустической неустойчивости. Отметим, что в случае знакопеременности $\delta^2 T$ течение может уже стать гидродинамически неустойчивым [7]. Выражение (3) для энергии возмущений легко позволяет вычислить инкременты неустойчивых состояний (1). Согласно результатам работы [2], при выполнении условия

$$M_0 n=\Omega_0\alpha n/2c\ll 1, \tag{4}$$

означающего как малость характерного числа Маха течения M_0, так и компактность вихря как источника звука (c — скорость звука), излучаемая звуковая мощность W_n от каждой гармоники дается выражением

$$W_n=\varepsilon_n^2\frac{\pi^2(n-1)^{2n+1}}{2^{2n-1}(n!)^2}\rho\alpha c^3 M_0^{2n+3}, \tag{5}$$

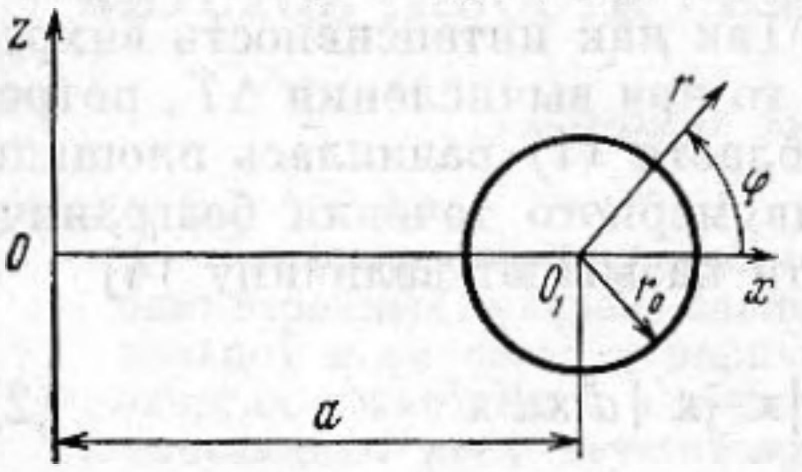
где M_0 определено в формуле (4).

Без учета квадратичных по числу M членов и при выполнении условия (4) плотность в ядре вихря постоянна (причем за любой сколь угодно большой промежуток времени). Поэтому изменение энергии (3) из-за потерь на излучение происходит при постоянстве площади вихря за счет изменения только ε_n. Закон сохранения энергии в данном случае имеет вид $d/dt(\Delta T_n)=-W_n$, откуда

$$\varepsilon_n(t)=\varepsilon_n(0)e^{\delta_n t},\quad \delta_n=\frac{\pi(n-1)^{2n}}{2^{2n}(n-1)!\,n!}\Omega_0 M_0^{2n}, \tag{6}$$

где δ_n — инкремент n-той гармоники. Инкременты δ_n, полученные в работе [2] из анализа полюсов амплитуды рассеяния плоской волны на круговом вихре, естественно совпадают с выражением (6).

Сказанное выше относится к малым возмущениям. Если рассматривать произвольные возмущения, то отметим, что на множестве всех равнозавихренных исходному течений (а течения, как отмечалось, остаются равнозавихренными за любой промежуток времени, пока справедливо условие (4)) единственным стационарным, очевидно, является круг. В силу принципа Арнольда только стационарным состояниям соответствует экстремум энергии и в данном случае этот экстремум единствен (максимум). Из-за отсутствия минимума энергии распад исходного вихря ничем не ограничен.



Рассмотрим теперь течение покоящейся на бесконечности идеальной несжимаемой жидкости, линии завихренности в которой есть окружности с общей осью OZ. Предположим, что завихренность сосредоточена в некотором кольце. Рассмотрим в некоторый момент времени сечение кольца осевой плоскостью (XZ) (фигура). Введем в этой плоскости систему координат (r, φ), связанную с точкой O_1, которую примем за центр сечения кольца. Пусть в системе координат (r, φ) граница области завихренности описывается уравнением

$$r = \alpha f(\varphi). \tag{7}$$

Будем рассматривать распределение завихренности в плоскости (X, Z) следующего вида:

$$\Omega = \Omega_0 x/a, \quad \Omega_0 = \text{const}. \tag{8}$$

При этом движение кольца, определяемого соотношениями (7) и (8), будет заключаться лишь в деформации и перемещения границы (7) с неизменным законом распределения Ω внутри (в этом смысле распределение завихренности (8) для осесимметричных течений аналогично условию $\Omega = \text{const}$ для плоских вихрей). Эволюция границы определяется тем, что граница вихря (7) — жидкая линия, т. е. если уравнение границы записано в неявном виде $\Phi(r, \varphi, t) \equiv r - \alpha f(\varphi, t) = 0$, то

$$D\Phi/Dt \equiv \partial\Phi/\partial t + \mathbf{v}\nabla\Phi = 0, \tag{9}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, определяемая через функцию тока ψ следующими выражениями [4]:

$$v_x = (1/x)\,\partial\psi/\partial z, \quad v_z = -(1/x)\,\partial\psi/\partial x, \tag{10}$$

$$\psi = -(a/2\pi)\int \Omega(x', z')\,B(x, z, x', z')\,dx'dz'. \tag{11}$$

Интегрирование в формуле (11) ведется по области, занятой завихренностью,

$$B(x, z, x', z') = \frac{(xx')^{1/2}}{a}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right)F(k) - \frac{2}{k}E(k)\right],$$

$$k = (1 - k'^2)^{1/2}, \quad k'^2 = \frac{(x - x')^2 + (z - z')^2}{(x + x')^2 + (z - z')^2}, \tag{12}$$

где F и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, k — модуль эллиптического интеграла.

Для тонких вихревых колец $(\mu \equiv \alpha/a \ll 1)$ строго доказано [8] существование стационарных решений, т. е. колец, движущихся без изменения формы с постоянной скоростью V_0. В частном случае рассматриваемого здесь распределения завихренности (8) существование семейства стационарных решений от тонкого кольца до вихря Хилла, как отмечается в работе [9], не вызывает сомнения. Пусть выражение

$$r_0 = \alpha f_0(\varphi) \tag{13}$$

описывает форму сечения стационарного кольца. Рассмотрим наряду с ним возмущенное кольцо с границей $r=\alpha[f_0(\varphi)+\varepsilon f_1(\varphi, t)]$ и сравним энергии соответствующих двух течений при условии равнозавихренности возмущенного и невозмущенного состояний (в данном случае – это равенство объемов обоих колец). Энергия течения, обусловленного осесимметричным распределением завихренности в жидкости, покоящейся на бесконечности, дается выражением [4]

$$T=\int (\rho v^2/2)\, d^3\mathbf{x}=$$
$$=(\rho a/2)\int \Omega(r,\varphi)\,\Omega(r',\varphi')\,B(r,r',\varphi,\varphi')\,r dr d\varphi r' dr' d\varphi', \tag{14}$$

где B определяется формулой (12). Выведем теперь выражение для кинетической энергии течения в системе координат, связанной со стационарным кольцом (13). Пусть $\mathbf{v}'=\mathbf{v}-\mathbf{V}_0$ – скорость жидкости в системе координат, движущейся со скоростью кольца $\mathbf{V}_0$ (в ней, очевидно, имеем на бесконечности поток жидкости со скоростью $-\mathbf{V}_0$), $\mathbf{v}$ – скорость в исходной системе, где жидкость на бесконечности покоится. Тогда энергию T' в новой системе можно определить с точностью до несущественной постоянной следующим образом

$$T'=\rho\int (v'^2/2-V_0^2/2)\, d^3\mathbf{x}'$$

или, взяв выражение для $\mathbf{v}'$ и заменив $d^3\mathbf{x}'$ на $d^3\mathbf{x}$, так как якобиан преобразования Галилея есть единица, получим

$$T'=\int (\rho v^2/2)\, d^3\mathbf{x}-\mathbf{V}_0\cdot\int \rho\mathbf{v}\, d^3\mathbf{x}. \tag{15}$$

Первый член в формуле (15) есть энергия течения T (14) в исходной системе координат. Стоящий во втором члене интеграл не является абсолютно сходящимся (его величина зависит от способа, по которому объем интегрирования может стремиться к бесконечности), тем не менее под ним естественно понимать принятый в гидродинамике импульс [4, 10]

$$\mathbf{P}=(\rho/2)\int [\mathbf{x},\boldsymbol{\Omega}]\, d^3x. \tag{16}$$

Поэтому энергией течения в движущейся системе координат будем называть величину

$$T'=T-\mathbf{V}_0\mathbf{P}, \tag{17}$$

где T и $\mathbf{P}$ определяются выражениями (14) и (16) соответственно.

Для вычисления энергии возмущений будем пользоваться формулой (17). Действительно, в системе координат, связанной с кольцом, течение стационарно, поэтому в силу принципа Арнольда естественно ожидать, что опять первая вариация энергии будет равна нулю, тогда для вычисления второй вариации достаточно будет знания лишь линейной динамики возмущений. Конкретное вычисление доказывает данное положение, и для второй вариации энергии получаем

$$\delta^2 T'=\Delta T-\mathbf{V}_0\Delta\mathbf{P}=(\varepsilon^2\pi\rho\alpha^3\Omega_0/a)\int v_\varphi^0 f_1^2(\varphi) f_0(\varphi)\,(a+\alpha f_0\cos\varphi)^2 d\varphi+$$
$$+(\varepsilon^2 a\rho\alpha^2\Omega_0^2/2)\int f_1(\varphi) f_1(\varphi') f_0(\varphi) f_0(\varphi')\,[1+\alpha f_0(\varphi)\cos\varphi/a]\times$$
$$\times[1+\alpha f_0(\varphi')\cos\varphi'/a]\,B[\alpha f_0(\varphi),\alpha f_0(\varphi'),\varphi,\varphi']\, d\varphi d\varphi'+O(\varepsilon^3), \tag{18}$$

где v_φ^0 – φ-компонента невозмущенной скорости на границе кольца (13) в системе кольца. Если известны параметры стационарного кольца $f_0(\varphi)$, v_φ^0 и вычисленная с их помощью $\delta^2 T$ отрицательно определена для всех допустимых $f_1(\varphi)$, то такое кольцо будет акустически неустойчиво.

Будем рассматривать только тонкие кольца. Условие тонкости кольца заключается в малости параметра μ, определяемого выражением

$$\mu=\alpha/a\ll 1. \qquad (19)$$

Обратим внимание, что уравнение (9), определяющее динамику кольца, после подстановки в него формул (10) и (11) является замкнутым интегродифференциальным уравнением относительно формы границы $f(\varphi, t)$. При условии тонкости кольца (19) и малости параметра возмущения ε удается построить процедуру последовательного нахождения приближений как для стационарного состояния $f_0(\varphi)$, так и для возмущений $f_1(\varphi, t)$. Опуская подробности вычислений, выпишем окончательный результат. Для стационарного кольца

$$f_0(\varphi)=1+O(\mu^2\ln\mu),\quad V_0=(\Omega_0\alpha/4)\mu[\ln(8/\mu)-1/4], \qquad (20)$$

$$v_r^0=(\Omega_0\alpha/2)[(5/8)\mu(1-r^2/\alpha^2)\sin\varphi+O(\mu^2\ln\mu)],$$

$$v_\varphi^0=-(\Omega_0\alpha/2)[r/\alpha+(5/8)\mu(7r^2/5\alpha^2-1)\cos\varphi+O(\mu^2\ln\mu)], \qquad (21)$$

где V_0 — скорость кольца как целого, v_r^0 и v_φ^0 — r- и φ-компоненты скорости в системе кольца в ядре кольца. Для возмущенного кольца

$$f_1(\varphi, t)=\cos\left(n\varphi+\frac{n-1}{2}\Omega_0 t\right)[1+O(\mu)],$$

$$v_r=v_r^0+\varepsilon\frac{\Omega_0\alpha}{2}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{n-1}\sin\left(n\varphi+\frac{n-1}{2}\Omega_0 t\right)[1+O(\mu)],$$

$$v_\varphi=v_\varphi^0+\varepsilon\frac{\Omega_0\alpha}{2}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{n-1}\cos\left(n\varphi+\frac{n-1}{2}\Omega_0 t\right)[1+O(\mu)]. \qquad (22)$$

Помимо того что эти формулы позволяют вычислить разность энергий, они пригодятся в дальнейшем для определения явного выражения источника звука в уравнении Лайтхилла, а следовательно, и акустического поля. Из формул (22) видно, что осесимметричные возмущения вихревого кольца в написанном приближении ведут себя подобно возмущениям Кельвина (1). Подставляя выражения (20)—(22) в (18), получим для каждой гармоники

$$\delta^2 T_n'=-[\varepsilon_n^2\pi^2\rho_0\Omega_0^2\alpha^4 a(n-1)/2n][1+O(\mu\ln\mu)], \qquad (23)$$

что доказывает акустическую неустойчивость вихревого кольца.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Broadbent E. G., Moore D. W.* Acoustic destabilisation of vortices.— Phil. Trans. Roy. Soc., 1979, v. A290, p. 353—371.
2. *Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А.* Об акустической неустойчивости аксиального вихря.— Акуст. журн., 1983, т. 29, № 2, с. 192—198.
3. *Ламб Г.* Гидродинамика М.: Гостехиздат, 1947.
4. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
6. *Бердичевский В. Л.* Вариационные методы механики сплошных сред. М.: Наука, 1983.
7. *Арнольд В. И.* Об условии нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости.— Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 5, с. 975—978.
8. *Fraenkel L. E.* On steady vortex rings of small crossection in an ideal fluid.— Proc. Roy. Soc., 1970, A316, p. 29—62.
9. *Fraenkel L. E.* Examples a steady vortex rings of small cros section in an ideal fluid.— J. Fluid Mech., 1972, v. 51, № 1, p. 119—131.
10. *Владимиров В. А.* О вихревом импульсе течений несжимаемой жидкости.— ПМТФ, 1977, № 6, с. 72—77.

Поступила в редакцию
10.XI.1983