где $Q=[-C-Ln(\gamma z)]^{-1}$, C – постоянная Эйлера, δ_{1i} – символ Кронекера, $i=1, 2, 3, \ldots$

В формулах (9а) и (9б) удержаны несколько первых членов бесконечных рядов; для фиксированного i каждый последующий член в этих рядах при $\gamma z \to 0$ является функцией более высокого порядка малости, чем предыдущий. Подставляя формулы (9а) и (9б) в выражение (8), получим

$$\Gamma_H(kd) = J_0(kd\sin\alpha) + \begin{cases} QF_0 - \gamma z Q[F_1 + QF_0] + (\gamma z)^2 c_2/2 + O((\gamma z)^2 Q), & m=0, \quad (10а) \\ 2F_2 + 2\gamma z[-F_1 + 2F_2] - 2(\gamma z)^2 Q^{-1} F_2 + O((\gamma z)^2), & m=1, \quad (10б) \end{cases}$$

$$F_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i}/(2i), \qquad F_1^- = \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i}/(2i-1),$$

$$F_1^+ = \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i}/(2i+1), \qquad F_2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i}/(2i+2). \qquad (11а)$$

Суммы в формулах (11а) при $\alpha=0$ выражаются через тригонометрические функции, $Si(x)$, $Ci(x)$ [4, с. 57]:

$$F_0 = Ci(kd) - C - Ln(kd), \quad F_1^- = 1 - \cos(kd) - kdSi(kd),$$

$$F_1^+ = \sin(kd)/(kd) - 1, \quad F_2 = \sin(kd)/(kd) + (\cos(kd) - 1)/(kd)^2 - 1/2. \qquad (11б)$$

При $\alpha=\pi/2$ выражение (11а) можно также выразить через известные функции [5]

$$F_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} Y_0(kd) - (C + Lnkd/2) J_0(kd)\right], \qquad F_1^- = J_0(kd) - \cos(kd),$$

$$F_1^+ = \sin(kd)/(kd) - J_0(kd), \qquad F_2 = J_1(kd)/(kd) - J_0(kd)/2, \qquad (11в)$$

где $Y_0(x)$ – функция Бесселя второго рода нулевого порядка. При $\gamma z \to 0$ выражения (10а) и (10б) сводятся к результатам работы [1]. При $\alpha=0$ выражения (10а), (11б) согласуются с результатами работы [2].

Результаты расчетов по формулам (10а), (10б) приведены на фиг. 2 и 3. При $\alpha=0$, $\pi/2$ расчеты проводились с учетом формул (11б), (11в) соответственно; при других значениях α проводилось численное суммирование рядов (11а). Аппроксимация ФПК выражениями (10а) и (10б) соответственно при $\gamma z > 10^{-2}$ и $\gamma z > 10^{-1}$ неудовлетворительная; нужно учитывать последующие члены разложения. Сравнение кривых, приведенных на фиг. 2 и 3, показывает, что учет поглощения наиболее сильно сказывается в случае ненаправленных источников ($m=0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крон Б., Шерман Ч.* Функции пространственной корреляции для различных моделей шума.– В кн.: Некоторые проблемы обнаружения сигнала, маскируемого флуктуационной помехой/Под ред. Шнер И. М.: Сов. радио, 1965, с. 114–128.
2. *Liggett W. S., Jacobson M. J.* Covariance of noise in attenuating media.– JASA, 1964, v. 36, № 6, p. 1183–1194.
3. *Обозненко И. Л.* Пространственная корреляция поверхностного шума в неоднородном по глубине волноводе с потерями.– Акуст. журн., 1982, т. 28, № 2, с. 258–263.
4. Справочник по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М., Стиган И., пер. с англ. М.: Наука, 1979.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.

Поступило в редакцию
22.XII.1983

УДК 534.26.51

КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТИ ВОЛНОВЫХ ВЕКТОРОВ И АНИЗОТРОПНАЯ ДИФРАКЦИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ В КРИСТАЛЛАХ

Хаткевич А. Г.

С ограниченностью пучков приходится считаться практически во всех устройствах, использующих ультразвуковые волны. В кристаллах дифракция волн, распространяющихся от источников конечных размеров в направлении групповой, или лучевой скорости, согласно работе [1], характеризуется двумя, вообще говоря,

неравными друг другу локальными главными кривизнами поверхности волновых векторов. В настоящем сообщении обсуждается и устанавливается связь этих кривизн с коэффициентами волнового и параболического уравнений и получено выражение кривизны для произвольных направлений в пьезоэлектрических кристаллах, справедливое и при воздействии внешних полей.

При произвольном направлении волновой нормали **n** фазовые скорости v и векторы поляризации **a** трех изонормальных монохроматических плоских волн как функции **n** и ω соответственно определяются соотношениями

$$\mathrm{Det}\, L=(^1/_3)\ \mathrm{sp}\, L\bar{L}=0, \tag{1}$$

$$\mathbf{a}_N\cdot\mathbf{a}_N=\bar{L}_N/\ \mathrm{sp}\,\bar{L}_N, \tag{2}$$

где $L_N=\Gamma-\rho v_N^2$, $\Gamma_{jl}=c_{ijkl}n_in_k$, $\bar{L}_{il}={}^1/_2\delta_{ilk}\delta_{lmn}L_{jm}L_{kn}$, причем c_{ijkl} – модули упругости, ρ – плотность кристалла, δ_{ijk} – тензор Леви-Чивита, $N=1, 2, 3$.

Интересуясь слаборасходящимися пучками излучения в кристалле, ограничимся рассмотрением набора волн с волновыми векторами **k**, близкими к какому-либо из векторов $\mathbf{k}_n$, направление которых совпадает с нормалью **n** к поверхности кристаллического среза. Тогда составляющая волновых векторов пучка волн вдоль направления нормали $k_n=\mathbf{kn}$ выразится через их ортогональные составляющие k_a, $a=1, 2$, равенством

$$k_n=k_N+v^{-1}u_aq_a+(2v)^{-1}w_{ab}q_aq_b, \tag{3}$$

где $q_a=k_a-k_{Na}$, а $u_a=v\partial k_n/\partial k_a$ и $w_{ab}=\partial^2k_n/\partial k_a\partial k_b$ – компоненты вектора групповой скорости и ее градиента.

Как групповая скорость, так и ее градиент определяются характеристическим уравнением (1), которое введением в него волнового вектора преобразуется в уравнение трехполостной поверхности волновых векторов

$$\Omega=\mathrm{Det}\, L'={}^1/_3\ \mathrm{sp}\, L'\bar{L}'=0, \tag{4}$$

где $L'=\Gamma'-\rho\omega^2$, $\Gamma_{jl}'=k^2\Gamma_{jl}=c_{ijkl}k_ik_k$. При $\omega=\mathrm{const}$, рассматривая k_a как два независимых параметра поверхности и дифференцируя по ним выражение (4), получим

$$F_iu_{ia}=0,\quad F_{ik}u_{ia}u_{kb}+F_iu_{iab}=0, \tag{5}$$

где $u_{ia}=\partial k_i/\partial k_a$, $u_{iab}=\partial^2k_i/\partial k_a\partial k_b$, $F_i=\partial\Omega/\partial k_i$, и $F_{ik}=\partial^2\Omega/\partial k_i\partial k_k=\partial F_i/\partial k_k$. Так как $F_idk_i=0$, то вектор **F** оказывается коллинеарным нормали к поверхности волновых векторов и им определяется направление групповой скорости. Поскольку направление оси, например x_3, всегда можно совместить с направлением вектора **n**, от из (5) получается следующее выражение для отношений составляющих групповой скорости: $v^{-1}u_a=F_3^{-1}F_a$, причем $u_3=\mathbf{un}=v$ и $\mathbf{u}d\mathbf{k}=0$. В свою очередь для отношения градиента групповой скорости к фазовой получается соотношение

$$v^{-1}w_{ab}=u_{3ab}=-F_3^{-1}F_{ik}u_{ia}u_{kb}, \tag{6}$$

согласно которому компоненты двумерного тензора w_{ab} представляются через компоненты трехмерного тензора F_{ik}.

Поскольку в системе координат, ось которой, например x_3, направлена вдоль групповой скорости, $u_{ia}=\delta_{ba}$ при $i=b\neq3$ и $u_{3a}=0$ при $i=3$, правая часть соотношения (6) сводится к выражению $-F^{-1}F_{ab}=-K_{ab}$, где $F\sqrt{\mathbf{F}^2}$, которое представляет собой вторые производные составляющей волнового вектора вдоль направления групповой скорости $k_s=\mathbf{ks}$ по его ортогональным составляющим k_a, где $\mathbf{s}=\mathbf{F}/F$. Тензор K_{ab} оказывается тензором, которым определяется вторая основная квадратичная форма и кривизна поверхности волновых векторов. Направления его собственных векторов и собственные значения соответственно являются главными направлениями и главными кривизнами поверхности в рассматриваемой точке.

В общем случае произвольной и, в частности, кристаллофизической системы координат при направлениях **n**, не совпадающих с акустической осью, согласно выражению (2) тензор $\bar{L}'=\mathscr{L}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, где $\mathscr{L}=\mathrm{sp}\,\bar{L}'$, и уравнение любой полости поверхности волновых векторов (4) можно представить в виде квадратичной формы $\mathbf{a}(\Gamma'-\rho\omega^2)\mathbf{a}=B_{ik}k_ik_k-\rho\omega^2=0$, где $B_{ik}=c_{ijkl}a_ja_l$. Компоненты же вектора **F** и его трехмерного градиента $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{k}$ с учетом симметрии тензоров выразятся следующим образом:

$$F_r=2\mathscr{L}B_{rs}k_s, \tag{7}$$

$$F_{rs}=2\mathscr{L}B_{rs}+2\delta_{ijk}\delta_{lmn}L_{il}'\Gamma_{jmr}'\Gamma_{kns}', \tag{8}$$

где $\Gamma_{jmr}'=\partial\Gamma_{jm}'/\partial k_r=c_{ijmr}k_i$. Отметим, что при совмещении оси, например x_3 с **n**, компоненты $k_1=k_2=0$. Если ось совмещается с вектором поляризации, то исчезают недиагональные компоненты $\Gamma_{13}'=\Gamma_{23}'=0$. Для практически важных случаев, когда **n** лежит в плоскости симметрии упругих свойств кристалла, соответствующие выражения приведены в работе [1].

Отдельно остановимся на случае, когда можно пренебречь изменением векторов поляризации и считать $\mathscr{L}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathrm{const}$. Тогда в соотношении (8) исчезает второе слагаемое, и компоненты градиента и тензора кривизны оказываются соответственно равными: $F_{ik}^0=2\mathscr{L}B_{ik}$ и $K_{ab}^0=B^{-1}B_{ab}$, где $B=\sqrt{\mathbf{B}^2}$, $B_i=B_{ik}k_k$. Последнее выражение

наряду с простотой примечательно в том отношении, что оно входит в аналогичное (3) уравнение $2B_iq_i+B_{ik}q_iq_k=0$, которым аппроксимируется уравнение поверхности волновых векторов в виде квадратичной формы в результате подстановки $\mathbf{k}=\mathbf{k}_N+\mathbf{q}$ и учета соотношения $B_{ik}k_{N_i}k_{N_k}-\rho\omega^2=0$. В системе координат, ось которой, например x_3, совмещена с направлением вектора $\mathbf{B}$, коллинеарного $\mathbf{s}$, после учета условия $\mathbf{B}d\mathbf{k}=0$ коэффициенты полученного уравнения определяются именно этой «укороченной» кривизной: $2q_3+K_{ab}{}^0q_aq_b=0$. Поскольку последнее является характеристическим уравнением параболического дифференциального уравнения, которое получается в результате подстановки в волновое уравнение выражения волны определенной поляризации и предположения о медленности изменения ее амплитуды $\mathcal{A}$ в направлении групповой скорости, то очевидно, что развиваемая выше аппроксимация имеет более широкие пределы применимости. Дополнительные погрешности в параболическое приближение вносятся, если ось, например x_3, направляется вдоль волновой нормали и опускаются вторые производные $\partial^2\mathcal{A}/\partial x_3{}^2$ и $\partial^2\mathcal{A}/\partial x_3\partial x_a$.

Развиваемая здесь на основе теории поверхностей аппроксимация для описания распространения пучков квазимонохроматического ультразвукового излучения в кристаллах является естественным обобщением параболического приближения, более корректно учитывающим поляризацию излучения и анизотропию кристалла. В этой аппроксимации в отличие от работ [2, 3] учитываются обе главные кривизны поверхности волновых векторов и тензор кривизны непосредственно выражается через модули упругости, векторы поляризации и скорости волн. Предложенная аппроксимация легко распространяется на пьезоэлектрические и акустически гиротропные кристаллы. В случае пьезоэлектрических кристаллов коллинеарный групповой скорости вектор $\mathbf{F}$ и его градиент вместо формул (7) и (8) определяется выражениями

$$F_r=2\mathcal{L}B_{rs}k_s, \tag{9}$$

$$F_{rs}=2\mathcal{L}B_{rs}+2\delta_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta_{\varkappa\lambda\mu\nu}L'_{\alpha\varkappa}L'_{\beta\lambda}\Gamma'_{\gamma\mu r}\Gamma'_{\delta\nu s}, \tag{10}$$

где $\delta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – четырехмерный тензор Леви-Чивита, $\alpha=1, 2, 3, 4$, и

$$L'_{\beta\lambda}=\begin{pmatrix}\Gamma_{jl}'-\rho\omega^2\delta_{jl}\Gamma_{j4}' \\ \Gamma_{4l}' \quad \Gamma_{44}'\end{pmatrix}, \quad \Gamma'_{\beta\lambda r}=\begin{pmatrix}\Gamma'_{jlr} & \Gamma'_{j4r} \\ \Gamma'_{4lr} & \Gamma'_{44r}\end{pmatrix},$$

$\Gamma_{44}'=c_{i4k4}k_ik_k=-\varepsilon_{ik}k_ik_k$, $\Gamma_{j4}'=c_{ijk4}k_ik_k=e_{ijk}k_ik_k=\Gamma_{4j}'$, $\Gamma'_{\beta\lambda r}=\partial\Gamma_{\beta\lambda}'/\partial k_r=c_{r\beta s\lambda}k_s$, $B_{rs}=$ $=c_{r\beta s\lambda}a_\beta a_\lambda=B_{sr}$, $a_\beta a_\lambda=\mathcal{L}^{-1}L_{\beta\lambda}'$, $\bar{L}_{\beta\lambda}'=\dfrac{1}{6}\delta_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta_{\varkappa\lambda\mu\nu}L_{2\varkappa}'L_{\gamma\mu}'L_{\delta\nu}'$, $\mathcal{L}=\bar{L}_{\beta\lambda}'\delta_{\beta\lambda}=\bar{L}_{\beta\beta}'$, причем $c_{i\alpha k\beta}=c_{k\beta i\alpha}$, ε_{ik} и e_{ijk} – компоненты тензоров диэлектрической проницаемости и пьезоэлектрических модулей соответственно, $a_4=e_{ijk}n_in_ka_j/\varepsilon_{ik}n_in_k$ – скалярная составляющая нормированного четырехмерного вектора смещения, соответствующая электрическому потенциалу, сопровождающему механическое смещение. Если заменить $c_{i\alpha k\beta}$ эффективными значениями $c^{\text{эф}}_{i\alpha k\beta}=c_{i\alpha k\beta}+c_{i\alpha k\beta m\gamma}k_mA_\gamma+\ldots$, где $c_{i\alpha k\beta m\gamma}$ и A_γ – компоненты соответствующих тензоров и вектора смещения или потенциал, то выражениями (9) и (10), а при наличии центра симметрии – (7) и (8) будут определяться групповая скорость и кривизна поверхности волновых векторов в кристаллах, подвергнутых деформации или воздействию внешних полей. В случае акустически гиротропных кристаллов модули упругости в выражениях (7) и (8) комплексные.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаткевич А. Г.* Дифракция и распространение пучков ультразвукового излучения в монокристаллах.– Акуст. журн., 1978, т. 24, № 1, с. 108–115.
2. *Демидов В. П.* Дифракция звука в среде с эллипсоидальной волновой поверхностью.– Акуст. журн., 1981, т. 27, № 1, с. 98–103.
3. *Демидов В. П., Яковенко В. А.* Параболическая аппроксимация анизотропных звукопроводов.– Акуст. журн., 1981, т. 27, № 5, с. 787–790.

Институт физики
Академии наук БССР

Поступило в редакцию
23.IX.1983