АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 4

УДК 534.2:532.529

ЗАКОНЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФАЗ В АКУСТИКЕ ГАЗОВЗВЕСЕЙ

Ивандаев А. И.

Получены и проанализированы выражения для эффективных комплексных коэффициентов обмена импульсом и теплом между фазами газовзвеси при высоких частотах колебаний, когда вне и внутри взвешенных частиц (капель) реализуются достаточно тонкие погранслои скорости и температуры.

Распространение возмущений в газовзвесях в рамках континуальных моделей [1, 2] ранее исследовалось [3–12], и был получен ряд дисперсионных соотношений для различных двухфазных систем типа взвесь. Область их применимости обычно ограничена сверху частотами, при которых обмен импульсом, теплом и массой между фазами протекает квазистационарно. Чтобы расширить ее в сторону более высоких частот, необходимо учесть нестационарные эффекты межфазного обмена и вместо обычных времен релаксаций применять их эффективные, зависящие от частоты, комплексные аналоги. Выражения для таких эффективных времен релаксаций и соответствующих эффективных коэффициентов межфазного трения и теплообмена получены и проанализированы в данной работе.

Рассмотрим динамику и теплообмен пробной дисперсной частицы разреженной газовзвеси с окружающим ее газом в высокочастотном акустическом поле. В системе координат, относительно которой обе фазы в начальный момент времени $t=-\infty$ покоятся ($v_{10}=v_{20}=0$), линеаризированное уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{1}{6}\pi\delta_0^3\rho_2^\circ\frac{\partial v_2}{\partial t}=f, \tag{1}$$

где δ_0, ρ_2^0 и v_2 — диаметр, плотность и скорость частицы, f — суммарная сила, действующая на нее со стороны газа [2]:

$$f=f_\mu+f_B+f_A+f_m,\quad f_\mu=3\pi\delta_0\mu_1(v_1-v_2),\quad f_A=\frac{1}{6}\pi\delta_0^3\rho_{10}^\circ\,\partial v_1/\partial t,$$

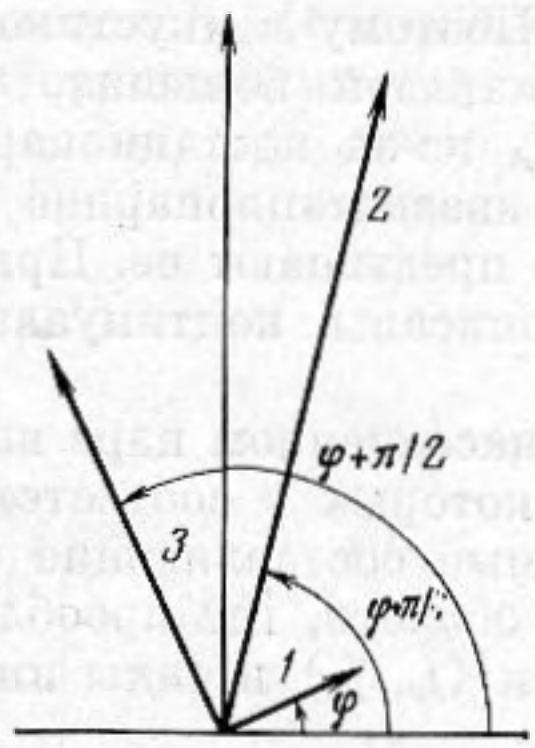
$$f_m=\frac{1}{12}\pi\delta_0^3\rho_{10}^\circ\partial(v_1-v_2)/\partial t, \tag{2}$$

$$f_B=B\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial\tau}(v_1-v_2)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\qquad B=\frac{3}{2}\delta_0^2\sqrt{\pi\rho_{10}^\circ\mu_1}.$$

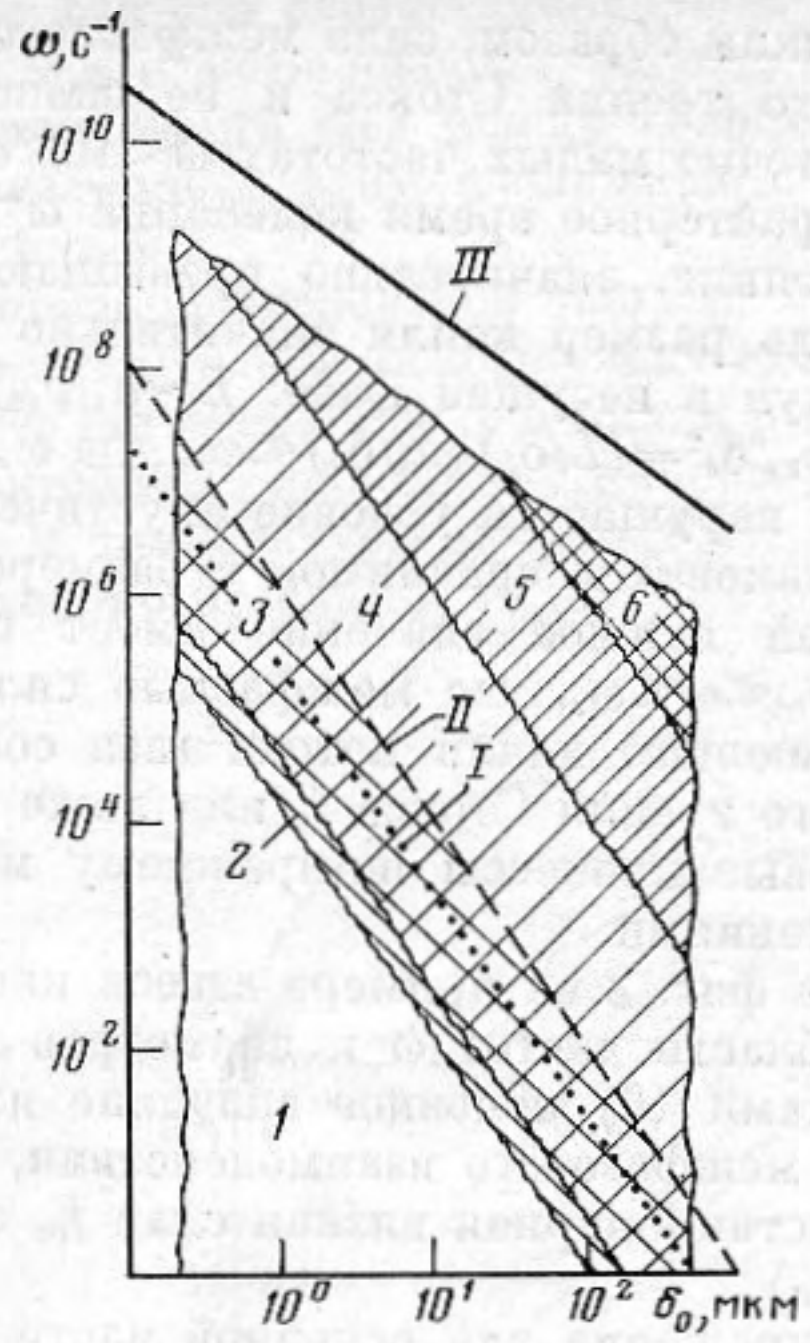
Здесь f_μ, f_A, f_B и f_m — силы Стокса, Архимеда, Бассэ и присоединенных масс, μ — динамическая вязкость. Индексы 1 и 2 внизу отмечают параметры газа и частиц, индекс 0 соответствует начальному невозмущенному состоянию.

Если акустическое воздействие монохроматическое, то все переменные являются комплексными экспоненциальными функциями координат и времени, в частности, $v_j=v_{jm}\exp[i(kx+\omega t)]$, где v_{jm} — комплексная амплитуда возмущения скорости j фазы. В этом случае интегральная сила Бассэ (2) легко вычисляется. Имеем

$$f_B=\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi\delta_0^2(1+i)\sqrt{\rho_{10}^\circ\mu_1\omega}\,(v_1-v_2). \tag{3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Схематичное изображение составляющих межфазной силы f на комплексной плоскости в произвольный момент времени: $1 - f_\mu$, $2 - f_B$, $3 - f_m$ ($\omega = 10^2\,\omega_{1\mu}$)

Фиг. 2. Диаграмма, иллюстрирующая (на примере насыщенной смеси пара с каплями воды при давлении $p = 1{,}0$ МПа) при каких диаметрах капель δ_0 и частотах колебаний ω проявляются различные составляющие межфазной силы f. В областях, отмеченных цифрами *1–6* доминируют силы: $1 - f_\mu(v_1 \approx v_2)$, $2 - f_\mu(v_1 \neq v_2)$, $3 - f_\mu + f_B$, $4 - f_\mu + f_B + f_m + f_A$, $5 - f_B + f_m + f_A$, $6 - f_m + f_A$. (Область *I* – область равновесия по скоростям за счет f_μ, линии *I–III* – характерные частоты колебаний: $I - \omega_v = \tau_v^{-1}$, $II - \omega_{1\mu}$, $III - \omega_c$)

Соответствующие выражения для сил f_A и f_m имеют вид

$$f_A = \frac{1}{6}\, i\omega\pi\delta_0^2\rho_{10}^\circ v_1, \qquad f_m = \frac{1}{12}\, i\omega\pi\delta_0^3\rho_{10}^\circ (v_1 - v_2). \tag{4}$$

Из анализа (2) — (4) видно, что силы f_A и f_m одного порядка, а соотношения сил f_μ, f_m и f_B зависят от частоты, причем их колебания сдвинуты друг относительно друга по фазе (фиг. 1):

$$\frac{f_m}{f_\mu} = \frac{1}{36}\, i\mathcal{K}_{1\mu}^2, \qquad \frac{f_B}{f_\mu} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\mathcal{K}_{1\mu}, \qquad \frac{f_m}{f_B} = \frac{\sqrt{2}}{36}(1+i)\mathcal{K}_{1\mu}, \tag{5}$$

$$\mathcal{K}_{1\mu} = (\delta_0/\delta_{1\mu}) = (\omega/\omega_{1\mu})^{1/2}, \qquad \delta_{1\mu} = (\mu_1/\rho_{10}^\circ\omega)^{1/2}, \qquad \omega_{1\mu} = \mu_1/\rho_{10}^\circ\delta_0^2.$$

Здесь $\mathcal{K}_{1\mu}$ – безразмерный параметр, характеризующий отношение диаметра капли δ_0 к характерной «толщине» вязкого погранслоя вокруг капли $\delta_{1\mu}$ («глубине проникания» возмущения скорости в газовую фазу за период колебания), $\omega_{1\mu}$ – характерная частота колебаний, при которой толщина $\delta_{1\mu}$ равна диаметру капли. Вклад каждой отдельной составляющей в общую силу межфазного взаимодействия характеризуется ее абсолютной величиной и зависит от частоты колебаний. В разных диапазонах изменения параметра $\mathcal{K}_{1\mu}$, соответствующих разным диапазонам изменения частот, имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod} f_\mu \gg \operatorname{mod} f_B \gg \operatorname{mod} f_m, && \text{если } \mathcal{K}_{1\mu} < 0{,}1,\\
&\operatorname{mod} f_\mu \sim \operatorname{mod} f_B \gg \operatorname{mod} f_m, && \text{если } 0{,}1 < \mathcal{K}_{1\mu} < 1,\\
&\operatorname{mod} f_\mu \sim \operatorname{mod} f_B \sim \operatorname{mod} f_m, && \text{если } 1 < \mathcal{K}_{1\mu} < 10,\\
&\operatorname{mod} f_\mu \ll \operatorname{mod} f_B \sim \operatorname{mod} f_m, && \text{если } 10 < \mathcal{K}_{1\mu} < 100,\\
&\operatorname{mod} f_\mu \ll \operatorname{mod} f_B \ll \operatorname{mod} f_m, && \text{если } \mathcal{K}_{1\mu} > 100.
\end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, сила межфазного взаимодействия f определяется силой вязкого трения Стокса и не зависит от частоты колебаний лишь при достаточно малых частотах $\omega<10^{-2}\omega_{1\mu}$, при которых возмущение скорости за характерное время колебаний ω^{-1} проникает в газ (из-за вязкости) на расстояние, значительно превышающее размер капли ($\delta_{1\mu}\gg\delta_0$). В свою очередь размер капли значительно превышает длину свободного пробега молекул в несущей фазе: $L\sim\mu_1/\rho_{10}^0 a_1$ (a_1 — скорость звука в газе), $\omega_{1\mu}=\mu_1/\rho_{10}^0\delta_0^2=(L/\delta_0)(a_1/\delta_0)\ll\omega_c$, где $\omega_c=2\pi a_1/\delta_0$ — частота колебаний, при которой нарушается условие акустической однородности взвеси (длина волны становится сравнимой с размером частиц). Поэтому в акустике газовзвесей важное значение имеет обширный диапазон больших частот $10^{-2}\omega_{1\mu}\ll\omega\ll\omega_c$, где межфазные силы f_B, f_m и f_A из-за нестационарности обтекающего капли потока газа соизмеримы с квазистационарной силой вязкого трения Стокса f_μ или даже существенно превышают ее. При этом волновые процессы по-прежнему могут быть описаны континуальными уравнениями.

На фиг. 2 на примере взвеси капель воды в насыщенном паре выделены области частот ω и диаметров капель δ, в которых в соответствии с оценками (6) основное значение имеют различные составляющие общей силы межфазового взаимодействия, в частности области, где преобладают квазистационарная вязкая сила f_μ, силы вязкости (f_μ, f_B) и силы инерции (f_m, f_A).

Выражение для основной части межфазной силы, определяемой относительной скоростью фаз $v_{12}=v_1-v_2$, может быть записано в виде

$$f_{\mu Bm}=f_\mu+f_B+f_m=C_\delta^*(v_1-v_2),$$
$$C_\delta^*/C_\mu=1+\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)(\omega/\omega_{1\mu})^{1/2}+\frac{1}{36}i(\omega/\omega_{1\mu}),\qquad C_\mu=3\pi\delta_0\mu_1. \tag{7}$$

Здесь C_δ^* — зависящий от частоты колебаний комплексный коэффициент сопротивления, характеризующий межфазный обмен импульсом в режиме нестационарного ламинарного обтекания частицы. Коэффициент C_δ^* близок к своему квазистационарному значению C_μ лишь при частотах $\omega<10^{-2}\omega_{1\mu}$, когда «глубина проникания» возмущений скорости в газ за период колебания значительно превышает размер капли. Комплексность C_δ^* свидетельствует о существовании сдвига по фазе между колебаниями силы $f_{\mu Bm}$ и колебаниями скорости скольжения v_{12}. При этом величина межфазной силы (интенсивность силового взаимодействия фаз) определяется абсолютной величиной $\operatorname{mod} C_\delta^*$, а величина сдвига φ характеризуется главным значением аргумента $\varphi=\arg C_\delta^*$:

$$C_\delta=\operatorname{mod} C_\delta^*=\{[\operatorname{Re} C_\delta^*]^2+[\operatorname{Im} C_\delta^*]^2\},\qquad \varphi=\operatorname{arctg}\{\operatorname{Im} C_\delta^*/\operatorname{Re} C_\delta^*\}.$$

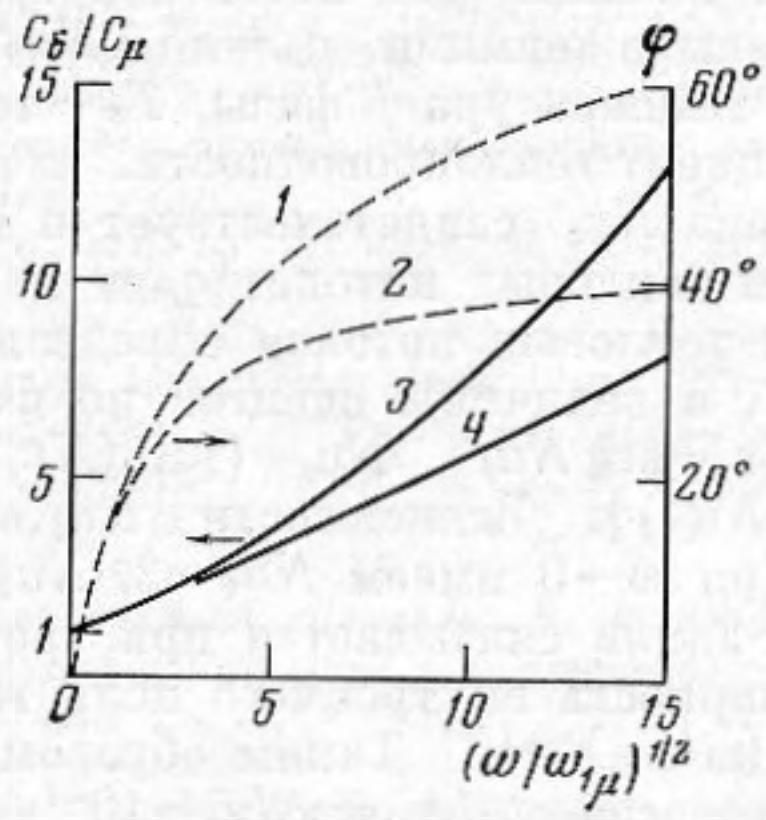
Зависимости $C_\delta(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ проиллюстрированы на фиг. 3. Видно, что коэффициент сопротивления сильно зависит от частоты колебаний; при безразмерных частотах $\omega/\omega_{1\mu}>\sim100$ он уже на порядок превышает обычный коэффициент сопротивления Стокса C_μ. Влияние эффекта присоединенных масс на величину C_δ^* начинает проявляться при частотах $\omega/\omega_{1\mu}>\sim1$ и становится сравнимым с влиянием эффекта Бассэ при $\omega/\omega_{1\mu}\sim100$. С увеличением частоты колебаний сдвиг фаз φ также растет, однако при $\omega\to\infty$ величина $\varphi\to\pi/2$ (эффект Бассэ при частотах $\omega\to\infty$ дает сдвиг фаз $\varphi\to\pi/4$).

Введем понятие эффективного комплексного времени релаксации скоростей фаз, для чего зависимость суммарной силы межфазового взаимодействия f от частоты колебаний представим в виде

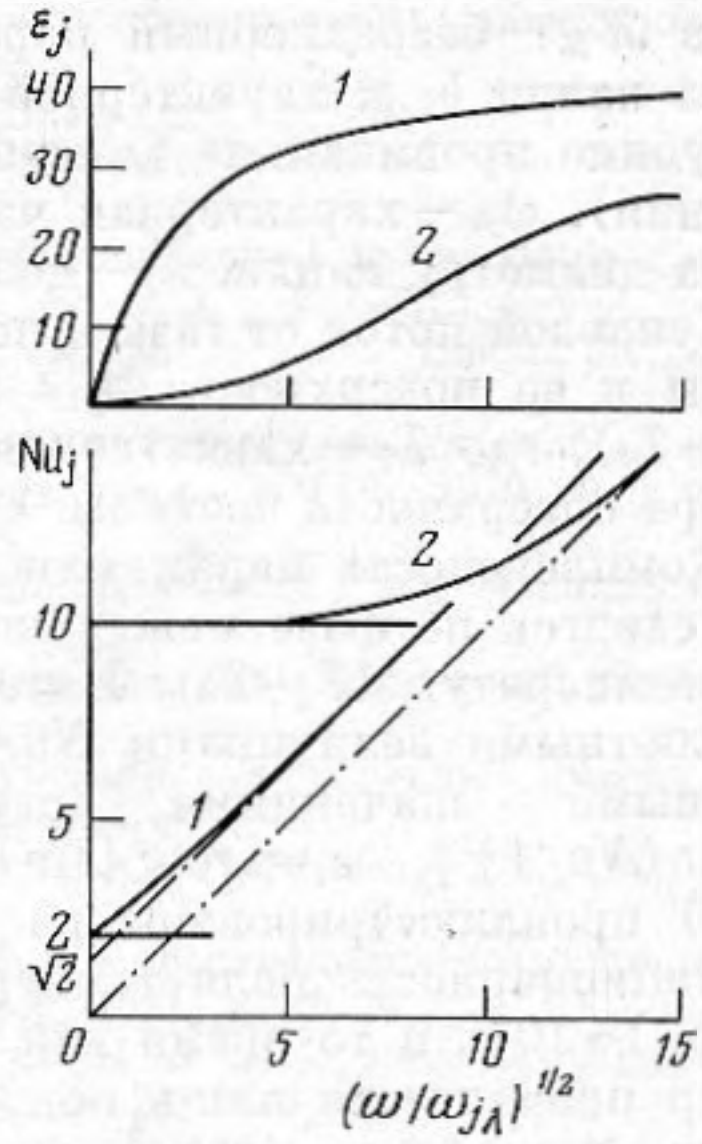
$$\frac{6f}{\pi\delta_0^3\rho_2^0}=\frac{v_1-v_2}{\tau_v^*}+\frac{v_1}{\tau_A^*},\qquad \tau_v^*=\frac{\tau_v}{1+\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\left(\frac{\omega}{\omega_{1\mu}}\right)^{1/2}+\frac{1}{36}i\left(\frac{\omega}{\omega_{1\mu}}\right)},$$
$$\tau_A^*=-i18\tau_v/(\omega/\omega_{1\mu}),\qquad \tau_v=\rho_2^0\delta_0^2/18\mu_1. \tag{8}$$

Здесь τ_v — время релаксации скоростей фаз при квазистационарном (стоксовом) обтекании частицы газом, τ_v^* — его комплексный аналог. Комплексность τ_v^* свидетельствует о наличии сдвига фаз между колебаниями скорости скольжения $v_{12}=v_1-v_2$ и связанной с этим скольжением части межфазной силы. При $\omega<10^{-2}\omega_{1\mu}$ имеем $\tau_v^*\cong\tau_v$.

Перейдем к анализу теплообмена пробной дисперсной частицы с газом при высоких частотах колебаний. Число Прандтля газа порядка единицы, поэтому характерная «толщина» вязкого погранслоя вокруг капли $\delta_{1\mu}$ является величиной одного порядка с характерной «толщиной» температурного погранслоя $\delta_{1\lambda}$ (возмущения скорости и температуры проникают в газ за характерное время колебаний ω^{-1} примерно на одно и то же расстояние).



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Зависимости характерной величины относительного коэффициента сопротивления $C_б/C_\mu-1$ и величины сдвига фаз между колебаниями силы и скорости скольжения — *3* от частоты. *2*, *4* иллюстрируют вид соответствующих зависимостей при учете только эффекта Бассэ (без присоединенных масс)

Фиг. 4. Зависимости характерных величин параметров теплообмена Nu_j и сдвига фаз между колебаниями тепловых потоков и перепадов температур ε_j от характерных безразмерных частот ($j=1, 2$). *1* — $j=1$, *2* — $j=2$

В связи с этим нестационарность температурных полей вокруг частиц или капель, приводящая к зависимости интенсивности межфазного теплообмена от частоты ω, проявляется при тех же частотах, что и нестационарность полей скоростей, приводящая к зависимости силы межфазного взаимодействия от частоты. Коэффициент температуропроводности конденсированной фазы обычно значительно меньше коэффициента температуропроводности газа, поэтому характерная толщина температурного погранслоя внутри капли (глубина проникания возмущения температуры в каплю за характерное время колебаний ω^{-1}) значительно меньше аналогичной величины для газа ($\delta_{2\lambda}\ll\delta_{1\lambda}$). Поэтому нестационарность теплообмена поверхности капли с ее основной массой, приводящая к зависимости соответствующего теплового потока от частоты, на первый взгляд, должна проявляться даже при меньших частотах колебаний, чем нестационарность внешнего теплообмена (более детальный анализ [13] показывает, что нестационарность поля температур внутри капли фактически сказывается на интенсивности теплообмена при больших частотах, чем нестационарность температур в газе вне капли).

Теплообмен дисперсной частицы с газом в акустическом поле исследован в [13]. Показано, что при использовании трехтемпературной схемы [2], наиболее удобной для учета фазовых превращений на поверхно-

сти частицы, межфазный теплообмен определяется зависящими от частоты колебаний эффективными числами Нуссельта Nu_j^*, выражения для которых могут быть записаны в виде

$$Nu_1^*(\omega)=2\Psi_1(z_1),\quad Nu_2^*(\omega)=10\Psi_2(z_2),$$

$$\Psi_1(z_1)=1+z_1,\qquad \Psi_2(z_2)=\frac{z_2^2(\operatorname{th} z_2-z_2)}{5[3z_2-(3+z_2^2)\operatorname{th} z_2]};\qquad \operatorname{mod}\Psi_1,\quad \operatorname{mod}\Psi_2\geqslant 1; \tag{9}$$

$$z_j=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)\mathscr{K}_{j\lambda},\ \mathscr{K}_{j\lambda}=\frac{\delta_0}{\delta_{j\lambda}}=\left(\frac{\omega}{\omega_{j\lambda}}\right)^{1/2},\quad \delta_{j\lambda}=\left(\frac{\varkappa_j}{\omega}\right)^{1/2},\quad \omega_{j\lambda}=\frac{\varkappa_j}{\delta_0^2},\quad j=1,2.$$

Здесь $\mathscr{K}_{j\lambda}$ — безразмерный параметр, характеризующий отношение диаметра капли δ_0 к характерной «толщине» температурного погранслоя $\delta_{j\lambda}$ («глубине проникания» возмущения температуры в j фазу за период колебания), $\omega_{j\lambda}$ — характерная частота колебаний, при которой толщина $\delta_{j\lambda}$ равна диаметру капли, $\varkappa_j$ — коэффициент температуропроводности j фазы.

Тепловой поток от газа к поверхности частицы $q_{1\sigma}$ и поток изнутри частицы к ее поверхности $q_{2\sigma}$ задаются выражениями $q_{j\sigma}=\pi\delta_0\lambda_j Nu_j^*(\omega)\cdot(T_j-T_\sigma)$, где T_j — характерная средняя температура j фазы, T_σ — температура поверхности частицы, λ — коэффициент теплопроводности.

Комплексность параметров теплообмена Nu_j^* свидетельствует о наличии сдвигов по фазе между колебаниями тепловых потоков $q_{j\sigma}$ и перепадов температур (T_j-T_σ). Интенсивности тепловых потоков определяются абсолютными величинами $Nu_j=\operatorname{mod} Nu_j^*$, а величины сдвигов по фазе — главными значениями аргументов $\varepsilon_j=\arg Nu_j^*$ $\mathrm{Nu}_j=\{[\operatorname{Re}(Nu_j^*)]^2+[\operatorname{Im}(Nu_j^*)]^2\}$, $\varepsilon_j=\operatorname{arctg}\{\operatorname{Im}(Nu_j^*)/\operatorname{Re}(Nu_j^*)\}$. Зависимости $Nu_j(\omega)$ и $\varepsilon_j(\omega)$ проиллюстрированы на фиг. 4. При $\omega\to 0$ имеем $Nu_1\to 2$, $Nu_2\to 10$. Нестационарность поля температур вне капли сказывается при частотах $(\omega/\omega_{1\lambda})\sim 10^{-2}$, в то время как нестационарность внутреннего поля температур проявляется лишь при частотах $(\omega/\omega_{2\lambda})>10$. Таким образом, несмотря на $\omega_{2\lambda}\ll\omega_{1\lambda}$ (как правило у газовзвесей $\omega_{2\lambda}/\omega_{1\lambda}=\varkappa_2/\varkappa_1=10^{-1}-10^{-2}$) «внутренняя» нестационарность начинает влиять на интенсивность межфазного теплообмена при более высоких частотах, чем «внешняя».

Введем понятия эффективных комплексных времен релаксаций температур в фазах, для чего зависимости «внешнего» и «внутреннего» тепловых потоков от частоты колебаний ω запишем в виде

$$\frac{6q_{1\sigma}}{\pi\delta_0^3\rho_{10}^\circ c_1}=\frac{T_1-T_\sigma}{\tau_{1\lambda}^*},\qquad \frac{6q_{2\sigma}}{\pi\delta_0^3\rho_2^\circ c_2}=\frac{T_2-T_\sigma}{\tau_{2\lambda}^*},$$

$$\tau_{1\lambda}^*=\frac{\tau_{1\lambda}}{12\Psi_1(z_1)},\qquad \tau_{2\lambda}^*=\frac{\tau_{2\lambda}}{60\Psi_2(z_2)},\qquad \tau_{1\lambda}=\delta_0^2/\varkappa_1,\qquad \tau_{2\lambda}=\delta_0^2/\varkappa_2. \tag{10}$$

Здесь $\tau_{j\lambda}^*$ — комплексное время релаксации температуры в j фазе, определяемое характерным временем $\tau_{j\lambda}$ и частотой ω, c_j — теплоемкость j фазы при постоянном давлении. Температура поверхности T_σ определяется из условия теплового баланса $q_{1\sigma}+q_{2\sigma}=0$.

Если на поверхности частицы (капли) имеют место фазовые превращения, то $q_{1\sigma}+q_{2\sigma}=jl$, где j — интенсивность фазового перехода, l — удельная теплота парообразования. В этом случае температура поверхности зависит от интенсивности превращения и имеет место формула Герца — Кнудсена — Ленгмюра, которую можно записать в виде

$$\frac{6jl}{\pi\delta_0^3 c_1\rho_1^\circ}=\frac{T_s-T_\sigma}{\tau_\beta},\qquad \tau_\beta=\frac{1}{6(\gamma_1-1)}\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma_1}}\frac{\delta_0 a_1}{\beta l^2}. \tag{11}$$

Здесь τ_β — «время релаксации» температур на межфазной границе, γ_1 и a_1 — показатель адиабаты и скорость звука в газовой фазе. Индекс s внизу отмечает состояние насыщения. Величина τ_β зависит от значения коэффициента аккомодации β, но не зависит от частоты колебаний ω. Тем не менее в соответствии с (11) интенсивность фазового перехода j зависит

от частоты, так как от нее зависят тепловые потоки $q_{1\sigma}$ и $q_{2\sigma}$ к поверхности капли.

Выполненный анализ зависимостей эффективных коэффициентов межфазного сопротивления и теплообмена от частоты колебаний позволяет глубже понять физику процессов взаимодействия фаз при распространении акустических волн в газовзвесях. Законы межфазного обмена импульсом (8), теплом (10) и массой (11) учитывают соответствующие нестационарные эффекты и применимы при любых, удовлетворяющих требованию акустической однородности среды, частотах колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред.– ПММ, 1956, т. 20, № 2, с. 184–195.
2. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
3. *Клейман Я. З.* Скорость звука в смесях, содержащих взвешенные частицы.– Акуст. журн., 1961, т. 7, № 2, с. 262–264.
4. *Temkin S., Dobbins R.* Attenuation and dispersion of sound by particulate – relaxation processes.– J. Acoust. Soc. Amer., 1966, v. 40, № 2, p. 317–324.
5. *Städtke H.* Speed of sound and shock waves in two-phase flows. Electr. MHD Proc. Sympos., Warsaw; 3, Vienna, 1968, p. 7–24.
6. *Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.* Особенности распространения слабых возмущений в двухфазных средах с фазовыми переходами.– ПМТФ, 1970, № 5, с. 73–77.
7. *Marble F. E.* Dynamics of dusty gases. In: Annual Review of Fluid Mechanics, v. 2. Palo Alto, Calif., 1970, p. 397–446.
8. *Mori Y., Hijikata K., Kawada H.* Sound velocity in gas, containing small particles.– Trans. Japan. Soc. Mech. Eng., 1971, № 37, p. 18.
9. *Ивандаев А. И.* Распространение малых возмущений в двухфазных смесях пара с каплями.– Акуст. журн., 1978, т. 24, № 1, с. 72–78.
10. *Bhutani O. P., Chandran P.* Weak waves in dusty gas.– Int. J. Eng. Sci., 1977, v. 15, № 9–10, p. 537–544.
11. *Борисов А. А., Вахгельт А. Ф., Накоряков В. Е.* Распространение возмущений конечной амплитуды в газовзвесях.– Акуст. журн., 1981, т. 27, № 6, с. 930–932.
12. *Nikaien K., Peddieson J., Jr. Au B.* One-dimensional acoustic wave propagation in a particulate suspension.– Int. J. Eng. Sci., 1983, v. 21, № 7, p. 851–862.
13. *Ивандаев А. И.* Коэффициенты межфазного теплообмена в двухфазных дисперсных средах при воздействии акустических полей.– Вестн. МГУ. Мат., мех., 1985, № 1, с. 63–67.

Институт механики
Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
12.III.1984