

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ КАНАЛЕ

Галиуллин Р. Г., Коркишко Л. В.

Исследование стоячих волн конечной амплитуды является одним из наиболее перспективных направлений в нелинейной акустике [1]. Теория таких колебаний важна для их эффективного использования на практике, в частности для интенсификации процессов тепло- и массопереноса [2, 3].

Построение теории нелинейных колебаний в каналах с открытым концом тормозится сложностью граничного условия на этом конце. В работе [4] путем учета квадратичной связи между колебаниями давления и скорости на открытом конце разработана теория, удовлетворительно описывающая экспериментальные результаты для цилиндрической трубы постоянного сечения.

В настоящей работе делается попытка рассчитать стоячие волны конечной амплитуды в канале, радиус которого меняется экспоненциально.

Рассмотрим колебания газа в трубе длиной L и радиусом $R=R(x)$. Пусть на одном (широком) конце трубы ($x=0$) по гармоническому закону колеблется плоский поршень, а другой конец ($x=L$) сообщается с окружающей средой. Положим, что распределенная по длине трубы нелинейность колебаний мала. Введем параметр $\varepsilon=U_\infty/\omega L$, где U_∞ — максимальная амплитуда колебаний скорости, ω — циклическая частота колебаний, L — длина трубы. Малость ε определяет применимость положения о слабой нелинейности колебаний внутри трубы. Можно показать, что $\varepsilon \ll 1$ накладывает даже более строгие ограничения, чем аналогичный параметр [5]. В случае высокочастотных колебаний $R_L(\omega/2\nu)^{1/2} \gg 1$, где ν — коэффициент кинематической вязкости, R_L — радиус открытого конца, можно пренебречь влиянием акустического пограничного слоя на ядро течения и считать течение одномерным [4], т. е. рассматривать обычные уравнения акустики с учетом переменности сечения. Тогда для экспоненциального канала с $R=R_0 \exp(-mx)$ будем иметь

$$u = rc_0 \exp mx [\operatorname{ch} z \sin \alpha \cos(\omega t + \theta) - \operatorname{sh} z \cos \alpha \sin(\omega t + \theta)], \quad p = (r/k) \exp mx, \\ [(\sqrt{m^2 - k^2} \operatorname{sh} z - m \operatorname{ch} z) \sin \alpha \sin(\omega t + \theta) - (\sqrt{m^2 - k^2} \operatorname{ch} z - m \operatorname{sh} z) \cos \alpha \cos(\omega t + \theta)], \\ z = \sqrt{m^2 - k^2} x + \beta, \quad (1)$$

где r , α , β , θ должны определяться из граничных условий, $k = \omega/c_0$ — волновое число, c_0 — скорость звука в невозмущенной среде, u , p — колебания скорости и давления соответственно.

Условие на поршне ($x=0$, $u = \omega l \cos \omega t$, l — амплитуда смещения поршня) дает

$$r(\operatorname{ch} \beta \sin \alpha \cos \theta - \operatorname{sh} \beta \cos \alpha \sin \theta) = M, \\ \operatorname{ch} \beta \sin \alpha \sin \theta + \operatorname{sh} \beta \cos \alpha \cos \theta = 0, \quad M = \omega l / c_0. \quad (2)$$

Рассмотрим граничное условие на открытом конце. Экспериментально [6] и теоретически [7] удалось показать, что связь между давлением и скоростью на открытом конце носит квадратичный характер: активная часть импеданса оказывается пропорциональной амплитуде пульсаций скорости. Это связано с сингулярностью в моменты изменения направления потока [7]. Теоретическое решение задачи приводит к выводу, что в полупериод всасывания связь между давлением и скоростью на открытом конце следует записывать в виде уравнения Бернулли с дополнительным требованием об отсутствии в выражении для давления постоянной составляющей. Тогда с учетом импеданса излучения при малости его активной части по сравнению с потерями типа Бернулли можно получить

$$p_L = iY u_L + 0,5 \rho_0 u_L \{u_L\}, \quad (3)$$

где L соответствует открытому концу, $\{ \}$ означает указанное выше правило квадратичности по амплитуде и равенства нулю осредненных во времени членов, $Y = \rho_0 \omega d_L / \pi$ [4], d_L — диаметр сечения открытого конца. Учитывая очевидное тождество $\operatorname{Re}\{i u_L(\tau)\} = \operatorname{Re}\{u_L(\tau + \frac{\pi}{2})\}$, справедливое для гармонических функций, перепишем (3) в виде

$$p_L(\omega t + \theta) = Y u_L \left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2} \right) + 0,5 \rho_0 \{u_L\} u_L(\omega t + \theta). \quad (4)$$

После подстановки (1) в (4) и ряда несложных преобразований получим

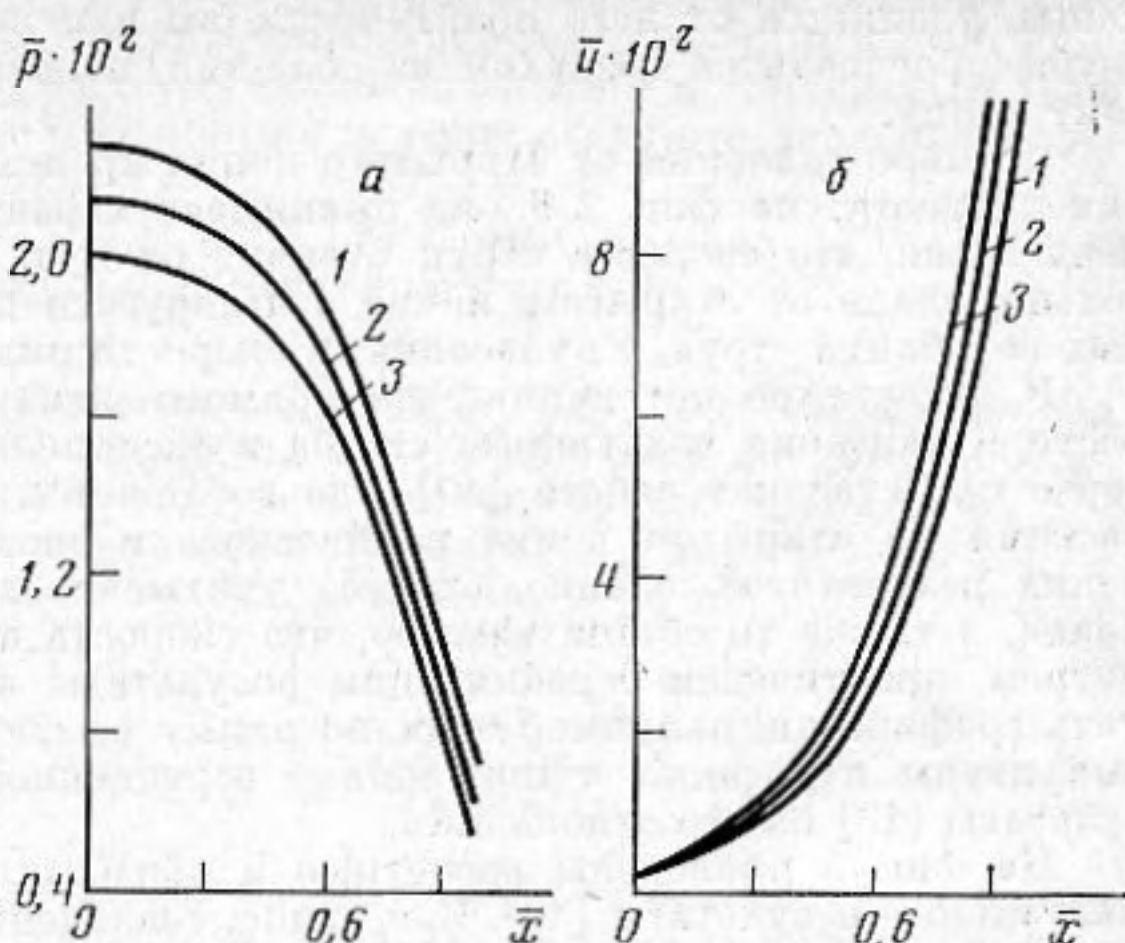
$$(\sqrt{m^2 - k^2} \operatorname{sh} z_L - m \operatorname{ch} z_L) \sin \alpha \sin \psi - (\sqrt{m^2 - k^2} \operatorname{ch} z_L - m \operatorname{sh} z_L) \cos \alpha \cos \psi = \\ = -k \bar{Y} \sqrt{\operatorname{sh}^2 z_L \cos^2 \alpha + \operatorname{ch}^2 z_L \sin^2 \alpha}, \quad (5)$$

$$(\sqrt{m^2 - k^2} \operatorname{sh} z_L - m \operatorname{ch} z_L) \sin \alpha \cos \psi + (\sqrt{m^2 - k^2} \operatorname{ch} z_L - m \operatorname{sh} z_L) \sin \psi \cos \alpha = \\ = -0,5 r \exp mL [\operatorname{sh}^2 z_L \cos^2 \alpha + \operatorname{ch}^2 z_L \sin^2 \alpha], \quad \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cth} z_L, \\ z_L = \sqrt{m^2 - k^2} L + \beta, \quad \bar{Y} = \omega d_L / \pi c_0.$$

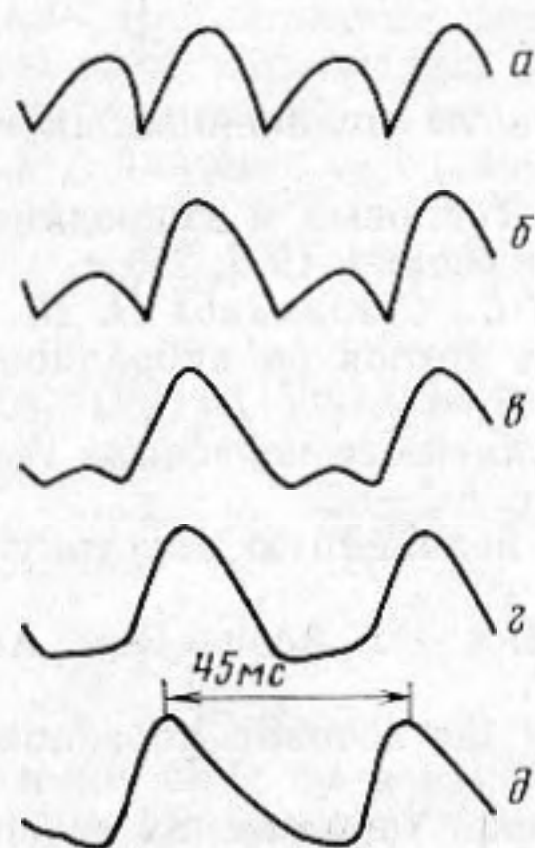
Фиг. 1. Эпюры безразмерных давления $\bar{p} = p/\rho_0 c_0^2$ (а) и скорости (б) в трубе с $L=1,2$ м, $m=1,3863$, $d_L=0,05$ м: 1 — $l=0,0025$ м, 2 — 0,0020, 3 — 0,0015 м, $\bar{x}=x/L$

Фиг. 2. Осциллограммы пульсаций скорости за пределами трубы с $L=3,5$ м: а) $x=0$ м, б) 0,02, в) 0,04, г) 0,06, д) 0,28 м

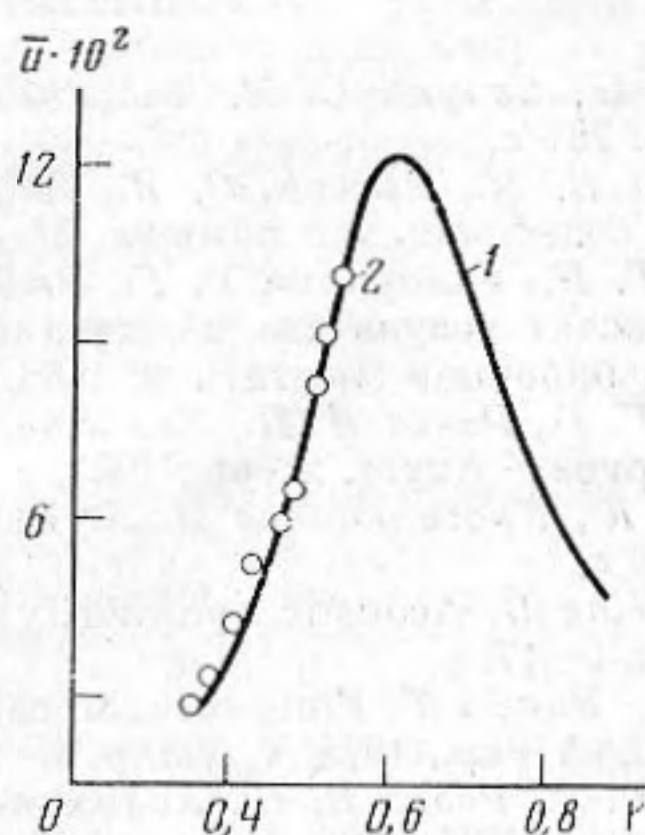
Фиг. 3. Резонансная кривая скорости $\bar{u}_L = u_L/c_0$ при $l=0,0025$ м; 1 — теория, 2 — эксперимент [10], $k, \text{м}^{-1}$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Система (5) совместно с выражениями (2) полностью определяет неизвестные константы. Численное исследование показало, что для каналов с $d_L \leq 0,05$ м, $\omega \approx 200 \text{ с}^{-1}$, $c_0 = 342 \text{ мс}^{-1}$ член с \bar{Y} можно отбросить как малую величину. Вблизи резонансной частоты $r \gg M$, так что с приемлемой точностью $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, $\text{tg } \alpha \approx \alpha$, $\text{tg } \psi \approx \psi$, т. е. можно пользоваться более удобными для инженерных расчетов выражениями $r(\alpha \text{ ch } \beta \cos \theta - \text{sh } \beta \sin \theta) = M$, $\alpha \text{ ch } \beta \sin \theta + \text{sh } \beta \cos \theta = 0$, $[\sqrt{m^2 - k^2} \text{ sh } z_L - m \text{ ch } z_L + (\sqrt{m^2 - k^2} \text{ ch } z_L - m \text{ sh } z_L) \text{cth } z_L] \alpha = -0,5 \text{ sh}^2 z_L$, $z_L = \sqrt{m^2 - k^2} L + \beta$.

На фиг. 1 представлены эпюры давления (а) и скорости (б) для трех значений амплитуды колебаний поршня. Давление максимально вблизи поршня и уменьшается по мере приближения к открытому концу. Для колебаний скорости, наоборот, характерен максимум на открытом конце. С увеличением амплитуды смещения поршня происходит и возрастание максимальной амплитуды скорости. В отличие от цилиндрических труб постоянного поперечного сечения, где максимальная безразмерная амплитуда колебаний давления и максимальное число Маха совпадают [9], в рассматриваемом случае максимальное число Маха приблизительно в 4 раза выше соответствующей амплитуды давления. Свойства трубы в качестве концентратора при резонансной частоте, соответствующей $k=0,58 \text{ м}^{-1}$, таковы, что амплитуда колебаний скорости на открытом конце втрое превышает значения, подсчитанные из предположения о несжимаемости среды.

На фиг. 2 представлена серия осциллограмм скорости, полученных с помощью анемометра постоянной температуры на различных расстояниях от открытого конца вне трубы [8]. Соответствующая выходному сечению осциллограмма (фиг. 2, а) показывает, что за один период колебаний укладываются две пульсации из-за нечувствительности нагретой нити к направлению потока. Несмотря на это ясно, что первая слева пульсация (из четырех) на фиг. 2 соответствует процессу всасывания, следующая — процессу выброса воздуха из трубы и т. д. По мере удаления нити от открытого конца амплитуда пульсации, соответствующей всасыванию, уменьшается практически до нуля (фиг. 2, д). Амплитуда пульсации, соответствующей процессу выброса, изменяется слабо ввиду того, что масса газа, выброшенная из открытого

конца, удаляется от него практически без изменений в виде струи. Наполнение же трубы производится воздухом из областей, непосредственно примыкающих к открытому концу.

По мере удаления от открытого конца происходит заметная деформация пульсации скорости: на фиг. 2, δ она принимает характерную пилообразную форму. Примечательно, что скорость струи отлична от нуля в течение всего периода. Следовательно, вдали от открытого конца формируется пульсирующая с частотой резонансных колебаний струя, с пульсациями скорости пилообразной формы.

В литературе нет данных по прямому измерению резонансных колебаний скорости и давления воздушного столба в экспоненциальном канале. Тем большим интерес представляет работа [10], где сообщается о течениях со значительными скоростями на открытом конце конического и экспоненциального каналов. Для сравнения результатов, однако, следует учитывать характер течения вблизи открытого конца, а также то обстоятельство, что скорость в [10] измерялась чашечным анемометром, практически осредняющим результаты во времени, т. е. необходимо осреднить графически, например осциллограмму на фиг. 2, δ по времени, найти отношение амплитуды пульсации к полученной осредненной величине, а затем умножить результаты [10] на это отношение.

На фиг. 3 приведены расчетные и обработанные указанным способом экспериментальные результаты [10]. Как видно, совпадение хорошее.

Таким образом, учет реального характера процессов позволяет количественно объяснить свойства стоячих волн конечной амплитуды в экспоненциальном канале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
2. Галицкий Б. М., Рыжов Ю. Я., Якуш Е. В. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977. 256 с.
3. Назаренко Т. И., Галиуллин Р. Г., Рыбалкин П. С., Стельмаков В. П. Теплотехнический расчет результата испытаний паровых котлов на вибрационном горении. — Промышленная энергетика, 1983, № 10, с. 47—49.
4. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Халимов Г. Г. Нелинейные колебания газа в полуконической трубе. — Акуст. журн., 1982, т. 27, № 5, с. 617—621.
5. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
6. Ingard U., Ising H. Acoustic nonlinearity of an orifice. — J. Acoust. Soc. Amer., 1967, v. 42, N 1, p. 6—17.
7. Hersch A. S., Rogers T. Fluid mechanical model of the acoustic impedance of small orifices. — AJAA Pap., 1975, v. 495, p. 1—10.
8. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Халимов Г. Г. Теория термических автоколебаний. Казань: Изд-во КГУ, 1982. 155 с.
9. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
10. Медников Е. П., Новицкий Б. Г. Экспериментальное исследование мощного звукового ветра. — Акуст. журн., 1975, т. 21, № 2, с. 245—249.

Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило в редакцию
21.III.1984

УДК 534.142:535.34

ЗВУК И СВЕТОВОЕ ДАВЛЕНИЕ

Гельмуханов Ф. Х.

При отсутствии внешнего поля у газа имеется лишь одна звуковая ветвь продольных колебаний с законом дисперсии $\omega = kc$, где \mathbf{k} и c соответственно волновой вектор и скорость звука. В работе показано, что в газе, облучаемом светом, благодаря световому давлению возникает новая ветвь с законом дисперсии $\omega = \omega_0 \sin \theta$ (θ — угол между \mathbf{k} и волновым вектором света \mathbf{k}_c). Оценки показывают, что характерная частота $\omega_0 \approx 10^3$ с⁻¹. В отличие от обычного звука, где $\omega = kc$, «новый» звук является поперечным. Рассмотрим однокомпонентный газ, находящийся в поле бегущей световой волны с амплитудой E . Частицы газа для простоты считаем двухуровневыми с уровнями m и n . Свойства такого газа описываются известными уравнениями для матрицы плотности $\rho_{ij}(v)$ [1]. Следуя [2], перейдем от кинетических уравнений для матрицы плотности к уравнениям гидродинамики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \rho \mathbf{u} &= \nu, & \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p &= \mathbf{F}, \\ \frac{\partial}{\partial t} p + \mathbf{u} \nabla p + c^2 \rho \nabla \mathbf{u} + \frac{2}{3} \nabla h &= Q, \end{aligned} \quad (1)$$