УДК 534.833

О ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Иванов В. П.

В работах [1, 2] исследуется задача активного гашения изгибных колебаний пластинок и оболочек. В настоящей работе предложен способ гашения изгибных колебаний пластинки с помощью впрыска несжимаемой жидкости в пространство под пластинкой через специальные отверстия, расположенные в нижней стенке, ограничивающей данное пространство.

Квадратная пластинка размером $L\times L$ и толщиной δ шарнирно-оперта на боковые стенки, ограничивающие объем $V=L\times L\times h$. Срединная поверхность пластинки Γ нагружена некоторым давлением $p=p(x, y, z)\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота колебаний, t – время. На нижней стенке объема расположены достаточно малые отверстия, через которые периодически с периодом $2\pi/\omega$ впрыскивается и отводится идеальная жидкость плотности ρ. Поставим следующую задачу. Подберем число источников (стоков) и расход жидкости, впрыскиваемой в объем V, так, чтобы прогиб пластинки W_1 по модулю не превосходил наперед заданной величины ε: $|W_1(x, y)|\leqslant\varepsilon$ для $(x, y)\in\Gamma$, $\Gamma=\{x, y\colon 0\leqslant x, y\leqslant L\}$. Известно, что для малых перемещений отлична от нуля только вертикальная составляющая $w=w_1/\delta$ прогиба, которая удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^4-K^4)\,w(\xi,\eta)=P-P_1,\qquad \xi=x/L,\qquad \eta=y/L,\qquad 0\leqslant\xi,\eta\leqslant 1 \tag{1}$$

при $\zeta=z/h=0$, $w=\partial^2 w/\partial\xi^2=0$ для $\xi=0$, 1, $w=\partial^2 w/\partial\eta^2=0$ для $\eta=0$, 1. Здесь $P=pL^4/D\delta$ – неизвестное безразмерное внешнее давление, P_1 – безразмерное давление жидкости на срединной поверхности мембраны со стороны объема V. (Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен.) Предположим, что $v/c\ll 1$, где v и c – модуль скорости жидкости и значение скорости звука в жидкости для объема V. В этом случае потенциал течения φ в объеме V удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\varphi=\sum_{n=1}^{N} Q_n\delta(\xi-\xi_{0n},\ \eta-\eta_{0n},\ \zeta+1)\exp(-i\omega t)$ с условием непротекания $\partial\varphi/\partial n=0$ на жестких стенках и условиям сшивания на пластинке $\partial\varphi/\partial n=-i\omega w$, $p=-q$ – нагрузке на срединную поверхность мембраны, взятую с обратным знаком. В приведенных выше формулах введены обозначения: $\nabla^4=(\partial^2/\partial\xi^2+\partial^2/\partial\eta^2)^2$, $D=E\delta^3/12(1-\nu^2)$, $K^4=\omega^2\rho_1\delta L^4D^{-1}$; E, ρ_1, ν – модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала пластинки, Q_n – объемные расходы источников с координатами $(\xi_{0n}, \eta_{0n}, -1)$, $\delta(\xi,\eta,\zeta)$ – δ-функция Римана. Давление P_1 в жидкости определим из линеаризованного уравнения движения

$$P_1+\rho gL^4h^{-1}D^{-1}\delta^{-1}\zeta=i\omega\rho L^4D^{-1}\delta^{-1}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\exp(-i\omega t), \tag{2}$$

g – ускорение свободного падения.

Воспользуемся формулой Грина и представим потенциал φ течения жидкости в объеме V в виде

$$\varphi=\sum_{n=1}^{N} Q_nG^n+i\omega\delta L^2\int_{\Gamma} wG_1\,ds, \tag{3}$$

где той же буквой Γ обозначена срединная поверхность пластинки при $0\leqslant\xi,\eta\leqslant 1$:

$$\begin{Bmatrix} G^n \\ \\ G_1 \end{Bmatrix}=\frac{-4}{\pi L}\sum_{k,\,m=0}^{\infty}{}^{*}\frac{\cos\pi k\xi\cos\pi m\eta\,(k^2+m^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+\delta_{0k})(1+\delta_{0m})\,\mathrm{sh}\,[\pi h\,(k^2+m^2)^{\frac{1}{2}}/L]}\begin{Bmatrix} \cos\pi k\xi_{0n}\cos\pi m\eta_{0n}\times \\ \times\,\mathrm{ch}\,[\pi\zeta\,(k^2+m^2)^{\frac{1}{2}}], \\ \cos\pi k\xi_1\cos\pi m\eta_1\times \\ \times\,\mathrm{ch}\left[\frac{\pi h}{L}(1-\zeta)(k^2+ \\ +m^2)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{Bmatrix}$$

Здесь символ Σ^* означает, что параметры суммирования k, m одновременно в нуль не обращаются, $\delta_{00}=1$, $\delta_{0k}=0$ при $k\neq 0$. Подставим выражение (3) в формулу (2), а представление (2) в уравнение (1). В результате получим

$$(\nabla^4-K^4)\,w+\frac{i\omega\rho L^4}{D\delta}\sum_{n=1}^{N} Q_nG^n(\zeta=0)-\frac{\rho L^2K^4}{\rho_1\delta}\int_{\Gamma} wG_1(\zeta=0)\,ds=P. \tag{4}$$

Выражение (4) дает функциональную связь между прогибом w, расходами Q_n и неизвестным давлением $P(\xi,\eta,0)$. Сформулируем вспомогательную задачу об опреде-

лении неизвестного давления P по результатам измерения прогиба w и расхода одного источника Q_0, расположенного в точке с координатами $(\xi_0, \eta_0, -1)$. Предположим, что при не слишком больших значениях волнового числа пластинки k прогиб определяется первыми модами колебаний пластинки. С учетом краевых условий задачи (1) его можно представить в виде

$$w^* = \sum_{p,\,q=1}^{M} A_{pq} \sin \pi p\xi \sin \pi q\eta. \tag{5}$$

Расположим датчики смещений, определяющие прогибы $w(\xi_r, \eta_r) = w_r$ в точках с координатами ξ_r, η_r, $r=1, \ldots, R$, так, чтобы $\sin \pi\xi_r \neq 0$, $\sin \pi\eta_r \neq 0$, $\sin [\pi(\xi_r \pm \xi_s)/2] \neq \neq 0$, $\sin [\pi(\eta_r \pm \eta_s)/2] \neq 0$ для s, $r=1, \ldots, R$, $s \neq r$, и положим $R = M^2$. Подставим в соотношение (5) вместо параметров (ξ, η) их значения (ξ_r, η_r). В результате получим алгебраическую систему уравнений для определения коэффициентов A_{pq}

$$\sum_{p,\,q=1}^{M} A_{pq} \sin \pi p\xi_r \sin \pi q\eta_r = w_r, \qquad r = 1, \ldots, M^2. \tag{6}$$

Определитель системы (6) равен кронекеровскому произведению определителей типа Вандермонда $|a_{ip} = \sin \pi p \xi_i|_1^M$ и $|b_{jq} = \sin \pi q \eta_j|_1^M$, если координаты точек измерения прогибов удовлетворяют условиям $\xi_i^* = \xi_i = \xi_{M+i} = \ldots = \xi_{M(M-1)+i}$, $i=1, \ldots, M$; $\eta_1^* = \eta_1 = \ldots = \eta_M, \ldots, \eta_M^* = \eta_{M(M-1)+1} = \ldots = \eta_{MM}$, т. е. точки измерения прогибов на пластинке образуют прямоугольную сетку. Решение системы (6) выпишем по формуле Крамера: $A_{pq} = \Delta_{pq}/\Delta$.

$$\Delta = \left[4^{M(M-1)} \prod_{p=1}^{M} \sin(\pi p \xi_p^*) \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant M} \left(\sin \frac{\pi}{2}(\xi_p^* - \xi_q^*) \sin \frac{\pi}{2}(\xi_p^* + \xi_q^*)\right)\right]^M \times$$
$$\times \left[\prod_{q=1}^{M} \sin(\pi \eta_q^*) \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant M} \left(\sin \frac{\pi}{2}(\eta_p^* - \eta_q^*) \sin \frac{\pi}{2}(\eta_p^* + \eta_q^*)\right)\right]^M.$$

Определитель Δ_{pq} равен определителю Δ, в котором столбец с номером $r = M(q-1)+p$ заменен на столбец правых частей w_r. Подставим в левую часть формулы (4) вместо w его представление (5), а вместо расходов Q_k значение расхода Q_0. (Значение расхода Q_0 можно вычислить, воспользовавшись условием разрешимости внутренней задачи Неймана: $Q_0 = -\dfrac{i\omega L}{\pi^2} \sum\limits_{p,\,q=1}^{M} A_{pq} [(-1)^p - 1][(-1)^q - 1]/pq)$. В результате определим неизвестное давление P, равное при $\xi_0 = \eta_0 = 1/2$ следующему выражению:

$$p = p^*, \; p^* = \sum_{k,\,m=0}^{\infty}{}_{*} \sum_{p,\,q=1}^{M} A_{pq} \frac{4pq \cos \pi k\xi \cos \pi m\eta\, [(-1)^{p+k} - 1][(-1)^{q+m} - 1] \times \times [\pi^4 (p^2+q^2)^2 - K^4]}{\pi^2 (1+\delta_{0n})(1+\delta_{0m})(p^2-k^2)(q^2-m^2)} +$$
$$+ \frac{4\rho_1 L K^4}{\rho\delta\pi^3} \sum_{k,m=0}^{\infty}{}_{*}^{*} \sum_{p,\,q=1}^{M} \frac{\cos \pi k\xi \cos \pi m\eta A_{pq} [(-1)^{p+k} - 1][(-1)^{q+m} - 1] \times \times \operatorname{cth}[\pi h (k^2+m^2)^{1/2}/L]}{(1+\delta_{0k})(1+\delta_{0m})(p^2-k^2)(q^2-m^2)(k^2+m^2)^{1/2}} - \tag{7}$$
$$- \frac{4\rho_1 L k^4}{\rho\delta\pi^3} \sum_{k,\,m=0}^{\infty}{}^{*} \sum_{p,\,q=1}^{M} \frac{\cos \pi k\xi \cos \pi m\eta \cos \frac{\pi k}{2} \cos \frac{\pi m}{2} [(-1)^{p+k} - 1][(-1)^{q+m} - 1]}{(1+\delta_{0k})(1+\delta_{0m})(k^2+m^2)^{1/2} \operatorname{sh}[\pi h (k^2+m^2)^{1/2}/L]}.$$

Символ Σ_* означает, что члены суммы при $p=k$ и $q=m$ равны нулю, символ Σ_*^* означает, что параметры суммирования одновременно в нуль не обращаются, а член суммы при $p=k$ и $q=m$ равен нулю.

Вернемся к задаче гашения колебаний. Закроем отверстие с координатами центра $(\xi_0, \eta_0, -1)$ и откроем отверстия с координатами центров $(\xi_{0n}, \eta_{0n}, -1)$, $n=1, \ldots, N$. Требуется определить расходы Q_n таким образом, чтобы прогиб пластинки w не превосходил наперед заданного числа ε. Подставим в уравнение (4) вместо давления P его значение P^*, определенное по формуле (7)

$$(\nabla^4 - K^4)\, w - \frac{\rho L^2 K^4}{\rho_1 \delta} \int_\Gamma w G_1(\zeta = 0)\, ds = P^* - i \frac{\omega \rho L^4}{Д\delta} \sum_{n=1}^{N} Q_n G^n(\zeta = 0) = f^*. \tag{8}$$

Обозначим через A интегродифференциальный оператор, определяемый левой частью равенства (8) на множестве достаточно гладких функций, удовлетворяющих крае-

вым условиям задачи (1). Будем считать, что параметр ω не является собственной частотой колебаний системы пластинка – жидкость. Тогда существует обратный оператор A^{-1} такой, что $w=A^{-1}f$ и $\|w\|\leqslant\|A^{-1}\|\,\|f^*\|\leqslant\|A^{-1}\|\varepsilon_1=\varepsilon$. Следовательно, если правая часть соотношения (8) по некоторой норме не превосходит ε_1, то задача гашения будет решена полностью. Рассмотрим равенство $P^*=\sum_{n=1}^{N}Q_n^*G^n(\zeta=0)$, $Q_n^*=i\omega\rho L^4D^{-1}\delta^{-1}Q_n$. Это равенство можно интерпретировать как приближение известной функции P^* системой известных функций G^n с неизвестными коэффициентами Q_n^*. Поскольку система функций G^n линейно независима на Γ [3], то данная задача разрешима и коэффициенты наилучшего приближения Q_n^* определяются из алгебраической системы уравнений, определитель которой является определителем Грама системы G^n.

$$\sum_{n=1}^{N}Q_n^*\int_\Gamma G^nG^m\,ds=d_m,\quad d_m=\int_\Gamma P^*G^m\,ds,\quad m=1,\ldots,N.$$

Число источников N определим из условия

$$\left\|P^*-\sum_{n=1}^{N}Q_n^*G^n(\zeta=0)\right\|\leqslant\varepsilon_1. \tag{9}$$

Рассмотрим случай, когда инерционная и упругая составляющие колебательного движения пластинки и амплитуды прогиба A_{pq} удовлетворяют соотношению

$$\sum_{p,q=1}^{M}A_{pq}\,[\pi^4(p^2+q^2)^2-K^4]\,[(-1)^p-1]\,[(-1)^q-1]\,p^{-1}q^{-1}=0. \tag{10}$$

В этом случае удобнее сравнивать коэффициенты фурье функций P^* и $\sum_{n=1}^{N}Q_n^*G^n$ по системе функций $\cos\pi r\xi\cos\pi s\eta$, $0\leqslant r,\ s\leqslant R-1$, $r^2+s^2\neq0$ и потребовать, чтобы первые $N=R^2$ коэффициентов фурье функции f^* обратились в нуль.

$$d_{rs}=-\sum_{p,q=1}^{M}{}_{*}A_{pq}\left\{[\pi^4(p^2+q^2)^2-K^4]\,\frac{pq\,[(-1)^{p+r}-1]\,[(-1)^{q+s}-1]\,(r^2+s^2)}{\pi^2(p^2-r^2)(q^2-s^2)}\times\right.$$
$$\times\operatorname{sh}\left[\frac{\pi h}{L}(r^2+s^2)^{1/2}\right]-\frac{\rho_1LK^4}{\rho\delta\pi^3}\left\{\frac{[(-1)^p-1]\,[(-1)^q-1]\cos\frac{\pi r}{2}\cos\frac{\pi s}{2}}{pq}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{[(-1)^{p+r}-1]\,[(-1)^{q+s}-1]\,pq\operatorname{ch}\left[\frac{\pi h}{L}(r^2+s^2)^{1/2}\right]}{(p^2-r^2)(q^2-s^2)}\right\}\right\}. \tag{11}$$

К полученной системе уравнений присоединим соотношение, вытекающее из условия разрешимости внутренней задачи Неймана и условия (10):

$$\sum_{n=1}^{N}Q_n^*=d_{00},\ d_{00}=\pi^2L^2\rho\rho_1^{-1}\delta^{-1}\sum_{p,q=1}^{M}A_{pq}\,(p^2+q^2)\,[(-1)^p-1]\,[(-1)^q-1]\,p^{-1}q^{-1} \tag{12}$$

Определитель системы (11), (12) является кронекеровским произведением определителей типа Вандермонда $|a_{ir}=\cos\pi r\xi_{0i}^*|$ и $|b_{js}=\cos\pi s\eta_{0j}|$, $0\leqslant r,\ s\leqslant R-1$, $1\leqslant i,\ j\leqslant R$, если $\xi_{01}^*=\xi_{01}=\xi_{0(R+1)}=\ldots=\xi_{0[R(R-1)+1]}=L/(R+1),\ldots,\ \xi_{0R}^*=\xi_{0R}=\xi_{0R}=\ldots=\xi_{0RR}=$ $=RL/(R+1)$, $\eta_{01}^*=\eta_{01}=\ldots=\eta_{0R}=L/(R+1),\ldots,\eta_{0R}^*=\eta_{0[R(R-1)+1]}=\ldots=\eta_{0RR}=$ $=RL/(R+1)$, т. е. центры источников образуют сетку с квадратными ячейками на нижней стенке объема V. Решение системы (12), (13) выпишем по формуле Крамера:

$$Q_n^*=\Delta_n/\Delta,\ \Delta=\left[4^{(R-1)^2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant R}\sin\frac{i+j}{2(R+1)}\sin\frac{i-j}{2(R+1)}\right]^{2R}$$

Δ_n – определитель, равный определителю Δ, в котором n-й столбец заменен столбцом правой части $d_{rs}=(d_{00},\ d_{10},\ldots,d_{R-1,0},\ldots,d_{R-1,R-1})^T$. Положим для определенности $R-1>M$, воспользуемся формулами (7), (9) и найдем число источников $N=R^2$ из равенства

$$A^*\left\{\frac{M^2(M+2)^2K^4+M^7(M+2)}{4\pi(R-1)^2}+\frac{M^5\rho\omega^2L^5}{36\pi^2Д\operatorname{sh}(\pi hR/L)}+\right.$$
$$\left.+8\omega^2\rho L^5M(M+1)\pi^{-3}(2R-1)^{-2}\operatorname{cth}[\pi h(2R-1)/L]\right\}=\varepsilon_1,\quad A^*=\max_{p,q}|A_{pq}|.$$

В качестве примера рассмотрим гашение изгибных колебаний с формой прогиба $w=\sin 2\pi\xi \sin \pi\eta$ при $K^4 \ll 1$. В этом случае можно пренебречь инерционной составляющей колебательного движения пластинки и присоединенной массой жидкости и представить прогиб w в форме $w = \int\limits_{\Gamma} f^* G_2\, ds$, где G_2 – функция Грина бигармонического уравнения с краевыми условиями задачи (1):

$$G_2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} 4\pi^{-4} (n^2 + m^2)^{-2} \sin \pi n\xi \sin \pi m\eta \times \sin \pi n\xi_1 \sin \pi m\eta_1.$$

Из неравенства Коши — Буняковского следует, что $\max\limits_{\xi,\eta} |w| \leqslant \|f^*\| \max\limits_{\xi,\eta} \left(\int\limits_{\Gamma} G_2^2\, ds\right)^{1/2} \leqslant$ $\leqslant \varepsilon_1 \max\limits_{\xi,\eta} \left(\int\limits_{\Gamma} G_2^2\, ds\right)^{1/2} = \varepsilon$, причем $\max\limits_{\xi,\eta} \left(\int\limits_{\Gamma} G_2^2\, ds\right) = (90)^{-2}$. Положим $\varepsilon=0{,}01$, тогда $R=2$, а расходы Q_n^* определяются как решение алгебраической системы $\sum\limits_{n=1}^{4} Q_n^* = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{4} Q_n^* \cos \pi\xi_{0n} = \alpha$,

$$\sum_{n=1}^{4} Q_n^* \cos \pi\eta_{0n} = 0, \quad \sum_{n=1}^{4} Q_n^* \cos \pi\xi_{0n} \cos \pi\eta_{0n} = 0, \quad \alpha = 200\pi^2 \operatorname{sh} (\pi h/L)/3,$$

решение которой имеет вид $Q_1^* = \alpha[2+\sqrt{3}]/36$, $Q_2^* = -\alpha[2+\sqrt{3}]/36$, $Q_3^* = \alpha[3+2\sqrt{3}]/36$, $Q_4^* = -\alpha[3+2\sqrt{3}]/36$ при $\xi_{01}^* = 1/3$, $\xi_{02}^* = 2/3$, $\eta_{01}^* = 1/3$, $\eta_{02}^* = 2/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вялышев А. И., Тартаковский Б. Д.* Компенсация излучения изгибноколеблющейся пластины при ее возбуждении источниками с произвольными импедансами — Акуст. журн., 1981, т. 27, № 4, с. 500—504.
2. *Приходько В. Ю., Федорюк М. В.* О гашении колебаний тонких цилиндрических бесконечных оболочек активным методом.— Акуст. журн., 1978, т. 24, № 3, с. 430—432.
3. *Алексидзе М. А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978. 351 с.

Московский горный институт

Поступило в редакцию 20.VI.1984

УДК 621.391.26.:681.883.67

ИЗМЕНЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК АЛГОРИТМА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКИ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРИ АМПЛИТУДНОМ КВАНТОВАНИИ

Казмирцак В. Ю., Тютекин Ю. В.

В работе [1] исследовано влияние квантования по уровню детерминированных сигналов, принимаемых на фоне помех, на характеристики приемной системы при корреляционной обработке.

В настоящей работе рассматривается влияние разрядности аналогово-цифрового преобразователя (АЦП) на отношение сигнал/шум и характеристику направленности антенно-приемной системы, реализующей квадратичную обработку случайного акустического поля.

Пусть с помощью M – элементной линейной антенны наблюдается широкополосное гауссовское поле, представляющее собой плоскую волну, распространяющуюся в свободном пространстве, на фоне распределенного шума. Шум считается белым гауссовским и независимым по элементам антенны. Можно показать, что в случае слабого сигнала и дискретной во времени обработки локально наиболее мощный алгоритм обнаружения сигнала основан на статистике

$$U(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{K} \frac{g_s(\omega_k)}{g_n^2(\omega_k)} \left| \sum_{m=1}^{M} z(\omega_k, r_m) \cdot \exp\left(-j \frac{\omega_k}{c} r_m \sin \varphi\right) \right|^2,$$