

УДК 534.222

**ЭВОЛЮЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ ОСИ
СЛАБОДИФРАГИРУЮЩИХ И СФОКУСИРОВАННЫХ ПУЧКОВ**

Ланидус Ю. Р., Солуян С. И.

Предложена модификация параксиального метода анализа нелинейного уравнения ограниченных акустических пучков. Изложенное приближение позволяет уточнить влияние дифракции на форму возмущения. Рассматриваются сфокусированные пучки.

Как известно, реализуемые на практике нелинейные акустические системы используют акустические пучки, а не плоские или другие одномерные волны [1]. Теоретическое изучение нелинейного распространения ограниченных акустических пучков проводилось на основе модельного уравнения Хохлова — Заболотской [2], приближенные аналитические решения которого [3, 4], равно как и решения, полученные численными методами [5, 6], известны. Тем не менее из-за отсутствия точных аналитических решений интерес к этому уравнению не ослабевает [7].

В настоящей работе используется и существенно развивается применявшийся ранее в работе [4] метод параксиального анализа уравнения Хохлова — Заболотской, к достоинствам которого следует отнести его сравнительную простоту и возможность учета различных амплитудных распределений.

Запишем уравнение Хохлова — Заболотской в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} U \frac{\partial U}{\partial \tau} \right] = \frac{c_0}{2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right], \quad (1)$$

здесь U — продольная компонента колебательной скорости, ε — нелинейный параметр, c_0 — скорость звука, x и r — продольная и поперечная координаты.

В безразмерных переменных $V=U/U_0$; $z=x/l_p$; $R=r/a$; $\theta=\omega\tau$, уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = \frac{N}{4} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} \right], \quad (2)$$

здесь $N=l_p/l_d$ — отношение длины образования разрыва $l_p=c_0^2/(\varepsilon\omega U_0)$ к дифракционной длине $l_d=\omega a^2/(2c_0)$; U_0 , ω , a — характерные амплитуда, частота и радиус пучка. Будем искать решение (2) в виде ряда

$$V(z, \theta, R) = V_0(z, \theta) + \frac{R^2}{2!} V_2(z, \theta) + \frac{R^4}{4!} V_4(z, \theta) + \dots \quad (3)$$

Подстановка ряда (3) в уравнение (2) позволяет получить следующую цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial V_0}{\partial z} - V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \theta} \right] &= \frac{N}{2} V_2, & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} (V_0 V_2) \right] &= \frac{N}{3} V_4, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial V_4}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} (V_0 V_4 + 6V_2^2) \right] &= \frac{3N}{10} V_6, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

Дальнейший анализ проводится на основе первых двух уравнений системы (4). Это ограничение позволяет найти приближенное решение системы, область применения которого достаточно широка.

Вводя обозначения

$$F = \frac{N}{2} \int V_2 d\theta; \quad P = \frac{N^2}{6} \iint V_4 d^2\theta, \quad (5)$$

можно переписать уравнения (4) в канонической форме, содержащей нелинейный оператор с общей главной частью:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - V_0 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \begin{pmatrix} V_0 \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Осуществляя в уравнении (6) замену переменной θ на $\xi = \theta + \int_0^z V_0 dz$, получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} V_0 \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Предполагая, что $P = P_0(\xi)$, из (7) получаем

$$F = \Phi_1(\xi) + zP_0(\xi), \quad (8)$$

$$V_0 = \Phi_0(\xi) + z\Phi_1(\xi) + \frac{z^2}{2} P_0(\xi). \quad (9)$$

Покажем, что представления (8) и (9) в виде функций ξ с учетом изменения V_0 вдоль z действительно справедливы. Рассматриваем квазиплоскую волну, поэтому «фазовую» переменную $\xi = \theta + zV_0 - \int_0^z zF dz$ можно интерпретировать как «быструю» переменную Римана, дополненную дифференциальным членом $-\int_0^z zF dz$, а амплитуда волны в нашем приближении будет функцией «медленной» переменной z . Следовательно, функцию $V_0(z, \xi)$ можно представить в виде разложения в ряд по z , т. е. в виде (9).

Вид функций Φ_0 ; Φ_1 ; P_0 определяется из граничных условий

$$\Phi_0(\theta) = V_0|_{z=0}, \quad \Phi_1(\theta) = \frac{N}{2} \int V_2|_{z=0} d\theta + c_0, \quad (10)$$

$$P_0(\theta) = \frac{N^2}{6} \iint V_4|_{z=0} d^2\theta + C_1 + C_2\theta,$$

а функции V_2 и V_4 , входящие в ряд (3), определяются на основе соотношения (5):

$$V_2 = \frac{2}{N} [\Phi_1'(\xi) + zP_0'(\xi)] \frac{\partial \xi}{\partial \theta}, \quad V_4 = \frac{6}{N^2} \left[P_0''(\xi) \left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right)^2 + P_0'(\xi) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right]. \quad (11)$$

Для определения постоянных коэффициентов C_0 ; C_1 , входящих в условия (10), воспользуемся законом сохранения импульса, из которого с точностью (3) имеем $\int_{-\infty}^{+\infty} V_0 d\theta = \text{const}$. Если предположить, что $V|_{z=0}$ есть периодическая функция по θ , тогда $C_2 = 0$.

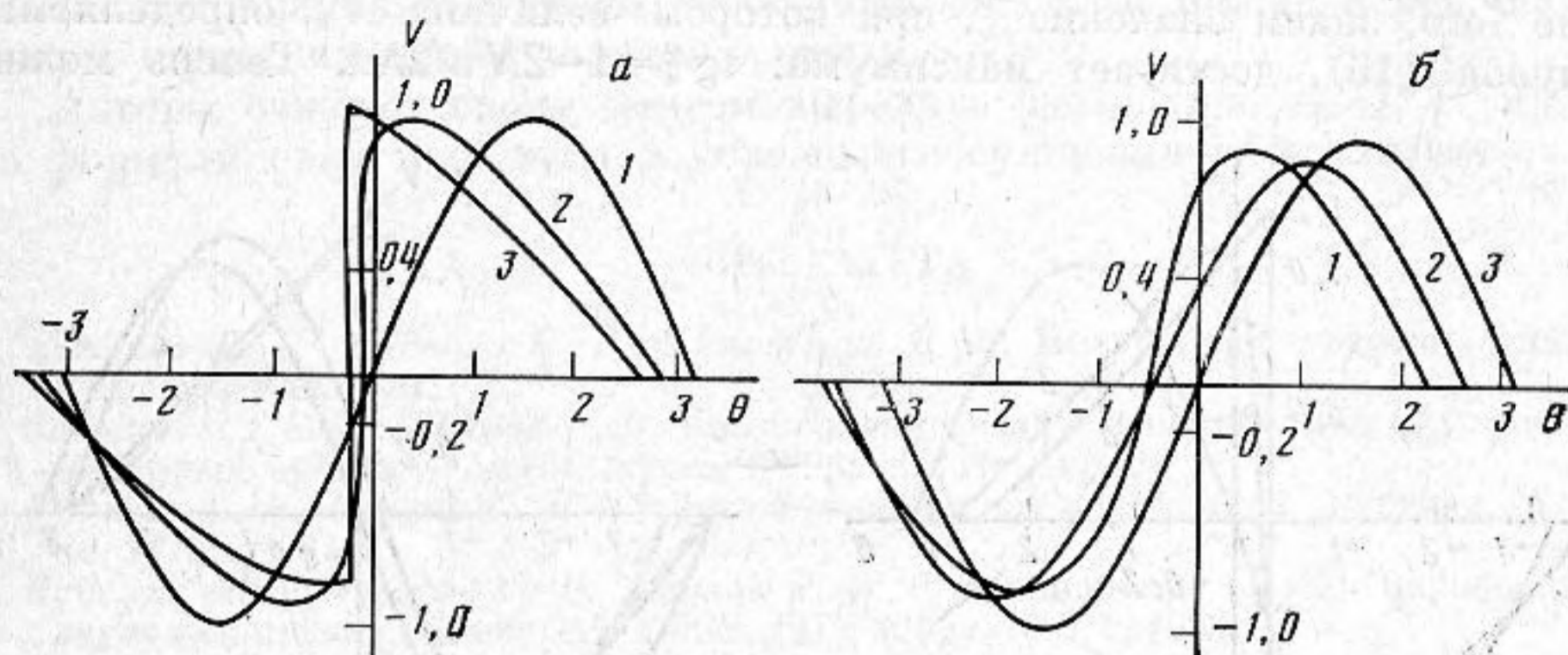
Если в работе [4] были получены формулы с точностью до малых членов $\sim N$, то соотношения (9–11) позволяют учесть члены $\sim N^2 z^2$. Первый отбрасываемый член $\sim N^2 z^3$. Отсюда область применимости решений определяется из условия $N^2 z^2 \ll 1$. Учет членов $\sim N^2$ позволяет гораздо лучше учесть дифракцию, чем это было сделано в [4]. А это в свою очередь дает возможность описывать не только форму волны, но получить количественные результаты как для интенсивностей, так и для пиковых значений возмущения.

Особый интерес представляет изучение поведения гармонических пучков. Поэтому граничное условие в виде

$$V|_{z=0} = f(R^2) \sin(\theta + \beta R^2), \quad (12)$$

где $f(0) = 1$; $\beta = \omega / (2R_k c_0)$. Условие (12) учитывает в квазиоптическом приближении сферичность фазового фронта волны с радиусом кривизны R_k . Разлагая (12) в ряд по степеням R^2 и учитывая (3) и (9), (10), имеем

$$V_0 = [1 + Nz\beta - N^2 z^2 (f''(0) - \beta^2)] \sin \xi - Nz f'(0) [1 + 2Nz\beta] \cos \xi - \frac{Nz^2}{4} f'(0). \quad (13)$$



Фиг. 1. *a* — профиль плоской волны с амплитудным распределением $f = e^{-R^2}$ на оси пучка для $N = 0,2$. 1, 2, 3 соответствуют $z = 0; 1; 1,5$; *b* — профиль плоской волны с амплитудным распределением $f = e^{-R^2}$ на оси пучка. 1 соответствует $N = 1$; $z = 0,5$, 2 — профиль волны в линейной среде, 3 — форма исходного сигнала

Закон сохранения импульса здесь выполняется с точностью до малых членов $\sim N^3 z^4$ и $\sim N^2 z^3 \beta$. Учитывая, что (13) получено с точностью до $\sim N^2 z^3$, окончательно получаем область применимости решения (13) в виде

$$N^2 z^3 \ll 1; N^2 z^3 \beta \ll 1. \quad (14)$$

Рассмотрим сначала пучки плоских волн $\beta = 0$. Для гауссового пучка $f(R^2) = e^{-R^2}$ (13) примет вид

$$V_0 = (1 - N^2 z^2) \sin \xi + Nz \cos \xi + \frac{Nz^2}{4}. \quad (15)$$

Решение (15) хорошо согласуется с результатами, полученными в работе [7]. Форма волны (15) дана на фиг. 1, *a*. Эта фигура демонстрирует несимметричность искажения фаз сжатия и разряжения, изменение длительности полупериодов, эффект превышения единицы. На фиг. 1, *b* показан профиль возмущения при значительной дифракции ($N = 1$).

Теперь более подробно остановимся на случае пучка плоских волн, амплитудное распределение которого дается функцией $f(R^2) = (1 - R^2)^m$, где $R \leq 1$. Из формулы (13) в этом случае имеем

$$V_0 = [1 - m(m - 1)N^2 z^2] \sin \xi + mNz \cos \xi + m \frac{N}{4} z^2. \quad (16)$$

Профиль волны, определяемый формулой (16) для $m = 2$, приведен на фиг. 2. Так как в пучках с резко выраженной границей дифракционные эффекты проявляются сильнее, то это приводит к более значительному изменению фазовых соотношений между гармониками, чем в гауссовом пучке, и как следствие дальнейший рост положительных пиковых значений и изменение длительности полупериодов. Сравнение фиг. 1, *a* и 2 подтверждает изложенное.

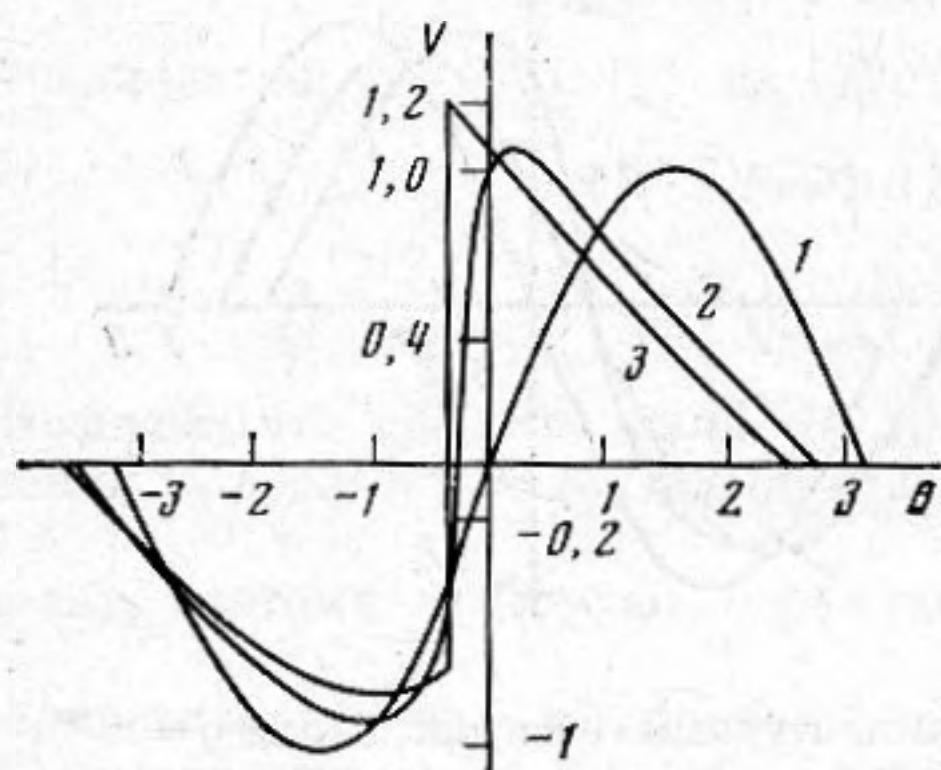
Определим положительные пиковые значения возмущения, даваемые соотношением (16) для $m=2$. При $z \leq z^*$ имеем

$$V_+ = \sqrt{1 + 4(Nz)^4} + \frac{Nz^2}{2}, \quad (17)$$

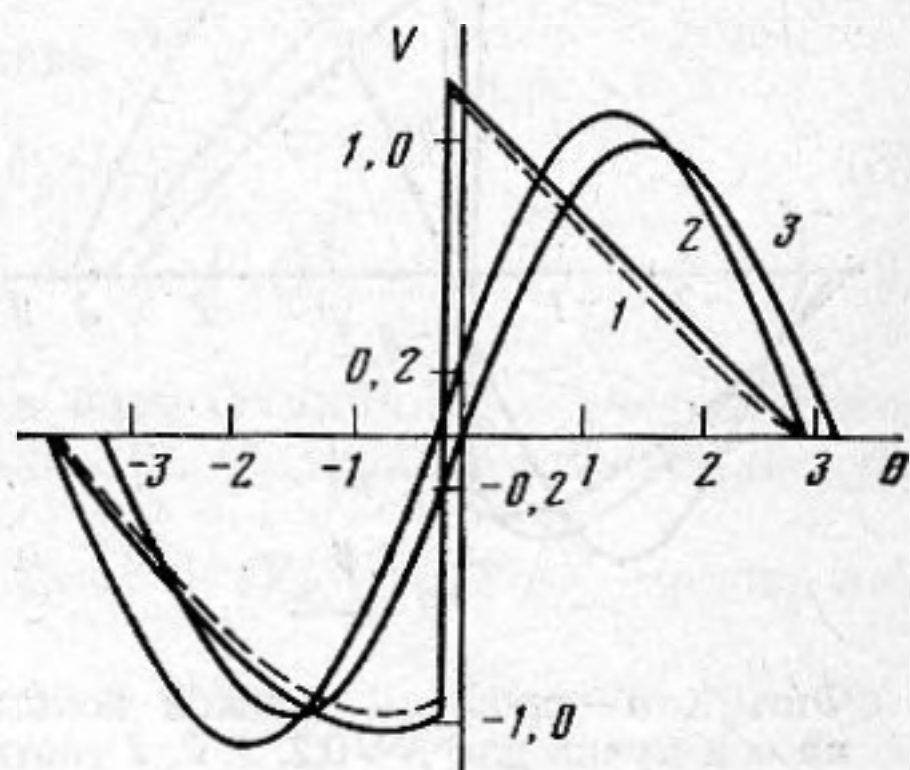
где параметр z^* соответствует такому профилю волны, когда разрыв проходит через V_+ . Найдем значение z^* . Предположим, что разрыв, как и в случае простой волны ($N=0$), проходит через точку $V_0=0$, тогда соответствующее значение θ_0 имеет вид

$$\theta_0 = -2Nz + \frac{Nz^2}{2} + \frac{Nz^3}{3}. \quad (18)$$

Кроме того, знаем значение ξ , при котором величина V_0 , определяемая формулой (16), достигает максимума: $\text{tg } \xi = 1 - 2N^2z/2Nz$. Теперь можно



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Профиль плоской волны с амплитудным распределением $f = (1 - R^2)^2$ на оси пучка для $N=0,2$. 1, 2, 3 соответствуют $z=0; 1; 1,5$

Фиг. 3. Профиль сфокусированной волны $\beta=0,5$; $N=0,2$; $z=1,5$ с амплитудным распределением $f = e^{-R^2}$ на оси пучка — 1, пунктир — результат численного счета [5]; 2 — профиль волны в линейной среде ($x/l_d=0,3$); 3 — исходный сигнал

написать уравнение для определения z^* . Для этого найдем значение $\text{max}(V_0)$ на линии разрыва:

$$\frac{1 - 2N^2z^2}{2Nz} = \text{tg} \left(z - 2Nz + \frac{Nz^2}{2} + \frac{Nz^3}{2} - \frac{2}{3}N^2z^3 \right), \quad (19)$$

пренебрегая всюду малыми членами $\sim N^3$ и высшего порядка малости. При $z > z^*$, V_+ определяется из (16), где в выражении для ξ переменная θ заменяется на θ_0 из (18).

Средняя за период интенсивность на основе соотношения (16) ($m=2$) определяется выражением

$$I = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N^2z^4}{2} \right), \quad (20)$$

которое может быть использовано при значениях $z \leq z^*$. Формулы (16–20) сравнивались для $N=0,2$ с результатами численного эксперимента [5]. При $z < 1,5$ погрешность составила менее 10%.

В заключение рассмотрим пучок сферически сходящихся волн. Форма возмущения ($\beta=0,5$) с амплитудным распределением $f(R^2) = e^{-R^2}$ показана на фиг. 3. Как видим, здесь наблюдается отклонение наших результатов по сравнению с результатами численного счета в сторону увеличения. Это связано с недостаточным учетом дифракции, ослабляющей сигнал на оси пучка.

Изложенный выше метод может быть применен для решения задач с сильно выраженной нелинейностью. В частности, для приведенных

амплитудных распределений удовлетворительные количественные результаты (погрешность $<10\%$) получаются при $N^2 z^3 < 0,1$; $N^2 z^3 \beta < 0,1$.

Дальнейшее уточнение решения (9) может быть проведено, если предположить, что $P = P_0(\xi) + zP_1(\xi) + z^2P_2(\xi) + \dots$. Функции $P_k (k \geq 1)$ определяются из последнего уравнения системы (4) ($V_6 = 0$). В частности, для P_1 получается выражение

$$P_1 = - \int P_0' \Phi_0' - 4(\Phi_1')^2 d\xi + C_3 + C_4 \xi + C_5 \xi^2. \quad (21)$$

Постоянные коэффициенты C_4, C_5 подбираются таким образом, чтобы функция P_1 была периодической по ξ . Коэффициент C_3 определяется законом сохранения импульса. Указанным способом можно в решении (9) учесть члены, имеющие порядок малости $\sim N^2 z^{k+2}$.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность О. В. Руденко за формулировку проблемы и полезные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981.
2. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков.— Акуст. журн., 1969, т. 15, № 1, с. 40.
3. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
4. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В. К нелинейной теории параксиальных звуковых пучков.— Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 5, с. 1053.
5. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
6. Жилейкин Я. М., Руденко О. В. Нелинейно-дифракционная трансформация акустических импульсов.— Акуст. журн., 1981, т. 27, № 3, с. 363.
7. Липидус Ю. Р., Руденко О. В. Новые приближения и результаты теории нелинейных акустических пучков.— Акуст. журн., 1984, т. 30, № 6, с. 797—802.

1-й Московский медицинский институт
им. И. М. Сеченова

Поступила в редакцию
22.V.1984