АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 6

УДК 551.463.21

КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Белобров А. В., Фукс И. М.

Решена задача дифракции плоской акустической волны на гладких статистически неровных абсолютно жесткой и мягкой поверхностях с крупными шероховатостями. Выписаны строгие неравенства, ограничивающие область применения метода касательной плоскости (метода Кирхгофа).

При решении задачи рассеяния волн на шероховатой поверхности с крупными по сравнению с длиной волны излучения шероховатостями широко применяется метод, предложенный в работах [1, 2] для регулярных поверхностей и обобщенный в работе [3] на статистически шероховатые поверхности,— метод касательной плоскости (метод Кирхгофа). В основе этого метода, как известно, лежит предположение о том, что значения волнового поля и его нормальной производной в каждой точке поверхности можно считать такими же, как и при отражении от плоскости, касательной к поверхности в данной точке. Качественные оценки показывают, что область применимости этого приближения ограничена неравенством

$$ak\cos\theta \gg 1, \tag{1}$$

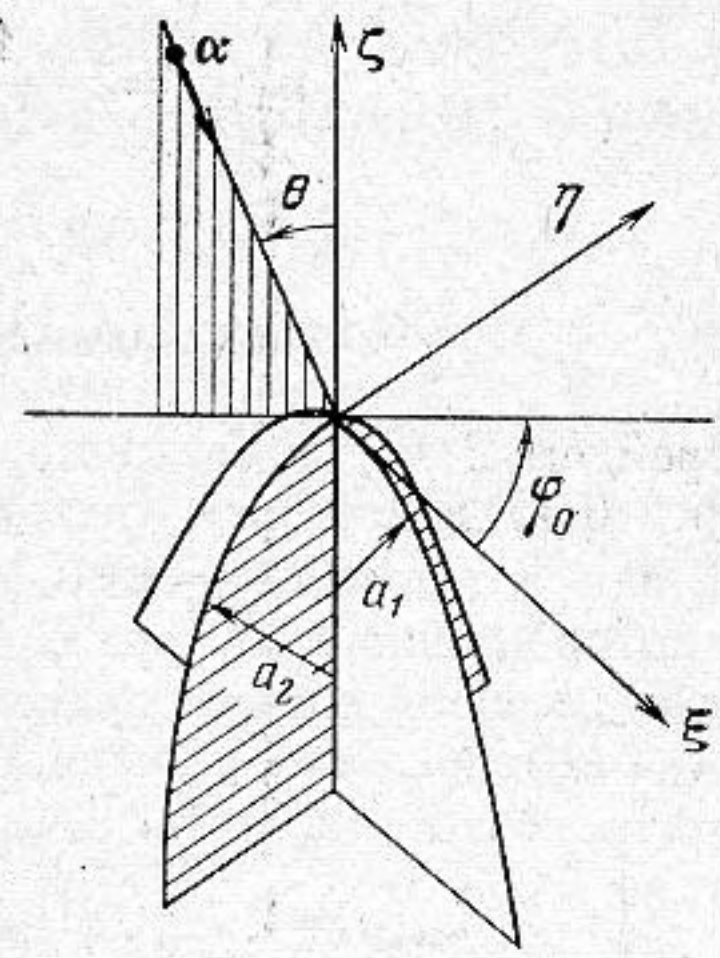
где a — характерный радиус кривизны поверхности, $k=2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны излучения, θ — угол между нормалью к поверхности и направлением облучения (угол падения).

За время, прошедшее с момента публикации указанных выше пионерских работ, с помощью этого метода было решено очень большое количество практически важных задач гидроакустики, радиофизики, оптики и т. д. (см., например, [4, 5] и цитированную там литературу). Дальнейшее развитие этого метода позволило учесть затенения поверхности [6, 7] и оценить роль многократных отражений [8, 9]. Однако лежащие в основе метода эвристические допущения, справедливые, по сути, только в приближении геометрической оптики или акустики (замена реальной поверхности в каждой ее точке касательной плоскостью возможна, строго говоря, только при $\lambda=0$), не подвергались до последнего времени ни критическому анализу, ни математическому обоснованию [10, 11]. Вместе с тем в целом ряде работ (см., например, ссылки в [4, 5]), выполненных в рамках метода касательной плоскости, предпринимались попытки анализа дифракционных явлений при рассеянии волн на неровных поверхностях. Например, исследование частотных зависимостей параметров рассеянных сигналов, т. е. эффектов, заведомо выходящих за границы геометрической оптики (акустики).

В данной работе поверхностные значения поля U и его нормальной производной $\partial U/\partial n$ не задаются априори, а рассматриваются как решения интегральных уравнений, вытекающих из точной постановки задачи дифракции. Это позволяет получить дифракционные поправки к поверхностным значениям U и $\partial U/\partial n$ и тем самым выписать строгие неравенства, ограничивающие метод касательной плоскости. Подстановка этих предельных значений в интеграл Кирхгофа позволяет вычислить дифракционные поправки к интенсивности рассеянного поля и исследовать их коротковолновую асимптотику.

Задача дифракции монохроматического волнового поля $U(\mathbf{R}_0)\exp(-i\omega t)$ ($\mathbf{R}$ — радиус-вектор в пространстве $\{x, y, z\}$) на произ-

вольной, но достаточно гладкой поверхности S (без ребер, изломов и особых точек), в двух предельных случаях абсолютно мягкой (U_s) и абсолютно жесткой (U_n) границах раздела сводится (см., например, [12]) к решению интегральных уравнений для функции $U_n(\mathbf{r})$ и $\partial U_s(\mathbf{r})/\partial n$ на поверхности $\mathbf{r}\in S$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке $\mathbf{r}$, направленный в то подпространство, где $U_0(\mathbf{R})\neq 0$):



$$U_n(\mathbf{r})=2U_0(\mathbf{r})+2\int\limits_S U_n(\mathbf{r}')\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}d^2\mathbf{r}', \tag{2а}$$

$$\frac{\partial U_s(\mathbf{r})}{\partial n}=2\frac{\partial U_0}{\partial n}-$$

$$-2\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_S \frac{\partial U_s(\mathbf{r}')}{\partial n'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')d^2\mathbf{r}', \tag{2б}$$

где $\mathbf{n}'=\mathbf{n}(\mathbf{r}')$ — нормаль к S в точке $\mathbf{r}'\in S$, $G(\mathbf{R},\ \mathbf{R}')=\exp(ik|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|)/|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|$ — функция Грина уравнения Гельмгольца в свободном пространстве; гармоническую зависимость полей от времени $\sim\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем. В силу линейности задачи, не ограничивая общности, достаточно рассмотреть дифракцию только плоской волны единичной амплитуды $U_0(\mathbf{R})=\exp(ik\boldsymbol{\alpha}\mathbf{R})$, где $\boldsymbol{\alpha}$ — единичный вектор в направлении распространения падающей волны. Будем искать решение уравнений (2а), (2б) в виде

$$U_n(\mathbf{r})=u_n(\mathbf{r})\exp(ik\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}), \tag{3а}$$

$$\partial U_s(\mathbf{r})/\partial n=ik(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n})u_s(\mathbf{r})\exp(ik\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}). \tag{3б}$$

Переходя в (2а), (2б) от $\mathbf{r}$ к переменной интегрирования $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}'-\mathbf{r}$ для медленно изменяющихся (по сравнению с быстроосциллирующим множителем $\exp(ik\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r})$ функций $u_n(\mathbf{r})$ и $u_s(\mathbf{r})$, получаем уравнения

$$u_n(\mathbf{r})=2+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S u_n(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})\frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{n}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})}{\rho^3}(ik\rho-1)e^{ik(\rho+\alpha\rho)}d^2\boldsymbol{\rho}, \tag{4а}$$

$$u_s(\mathbf{r})=2+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S u_s(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})\frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{n}(\mathbf{r})}{\rho^3}\frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})}{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n}(\mathbf{r})}(ik\rho-1)e^{ik(\rho+\alpha\rho)}d^2\rho. \tag{4б}$$

В предельном случае геометрической оптики ($k\to\infty$) интегральные члены в (4а), (4б) обращаются в нуль и, следовательно, $u_s(\mathbf{r})=u_n(\mathbf{r})=2$. Таким образом, приходим к приближению касательной плоскости: поле на абсолютно жесткой поверхности равно удвоенному значению поля падающей волны (3а), а на абсолютно мягкой — удваивается нормальная производная (3б). Наша же задача заключается в нахождении дифракционных поправок к этому геометрооптическому решению ($u_s=u_n=2$).

Рассмотрим сначала только уравнение (4а) для поля $u_n(\mathbf{r})$ на абсолютно жесткой поверхности. Анализ уравнения (4б) проводится совершенно аналогично и в дальнейшем приведем без вывода его решение $u_s(\mathbf{r})$.

Введем в каждой точке $\mathbf{r}\in S$ декартовую систему координат $\{\xi,\ \eta,\ \zeta\}$, причем ось ζ направим по нормали $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, а оси ξ и η — по касательным к главным направлениям на поверхности с радиусами кривизн $a_1(\mathbf{r})$ и $a_2(\mathbf{r})$ соответственно (фигура). Перейдем в (4а) от интегрирования по поверхности S к интегралу по плоскости $S_\perp(\mathbf{r})$, касательной к поверхности S в точке $\mathbf{r}$, воспользовавшись соотношением $n\zeta(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})d^2\boldsymbol{\rho}=d^2\boldsymbol{\rho}_\perp=d\xi d\eta$. Здесь $\boldsymbol{\rho}_\perp\in S_\perp(\mathbf{r})$ — радиус-вектор в плоскости $S_\perp$ с декартовыми координатами ξ и η. Учитывая, что при больших, но конечных значениях k основ-

ной вклад в интеграл по $d^2\rho$ в (4а) дает малая окрестность точки $\mathbf{r}$, уравнение поверхности S вблизи нее запишем в виде

$$\zeta(\rho_\perp)=-(\xi^2/2a_1)-(\eta^2/2a_2), \tag{5}$$

а ядро интегрального уравнения разложим в ряд по степеням ζ и удержим только первые два члена

$$u_n(\mathbf{r})=2-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_n(\mathbf{r}+\rho)\frac{ik\rho_\perp-1}{\rho_\perp^3}\zeta(\rho_\perp)\times$$

$$\times[1+ik\alpha_\zeta\zeta(\rho_\perp)]\left[1+0\left(\frac{k\zeta^2}{\rho_\perp},k^2\zeta^2\right)\right]e^{ik(\rho+\alpha_\perp\rho_\perp)}\,d^2\rho_\perp. \tag{6}$$

Перейдем в (6) к безразмерным координатам $\mathbf{p}=k\mathbf{r}$, $\mathbf{t}=k\rho_\perp$. Обозначим через $\theta(\mathbf{r})$ локальный (в точке $\mathbf{r}$) угол падения первичной плоской волны, так что $\alpha_\xi=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n}=-\cos\theta$. Угол между осью ξ и плоскостью падения $\widehat{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n}}$ (в которой лежат вектора $\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathbf{n}$) обозначим через φ_0 и перейдем в плоскости $S_\perp$ к полярным координатам t и φ вектора $\mathbf{t}$: $t_\xi=t\cos\varphi$, $t_\eta=t\sin\varphi$. Тогда интегральное уравнение (6) приобретает вид

$$u_n(\mathbf{p})=2+\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\infty}dt[Y_1(t,\varphi)+Y_2(t,\varphi)+0(1/k^3)]u_n(\mathbf{p}+\mathbf{t}), \tag{7}$$

где $Y_{1,2}(t,\varphi)$ — первые два члена разложения ядра по степеням $1/k$: $Y_1(t,\varphi)=(1/4\pi k)(it-1)\varkappa(\varphi)\exp[it(1+\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_0)]$, $Y_2(t,\varphi)=(it^2/4k)\cos\theta\varkappa(\varphi)Y_1(t,\varphi)$, $\varkappa(\varphi)=(\cos^2\varphi/a_1)+(\sin^2\varphi/a_2)$ — кривизна нормального сечения поверхности S в точке $\mathbf{r}$ плоскостью падения $\widehat{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n}}$. Решение уравнения (7) также будем искать в виде ряда по степеням k^{-n}: $u_n=u_n^{(0)}+u_n^{(1)}+u_n^{(2)}+\ldots$, где $u_n^{(j)}\sim k^{-j}$ Подставляя этот ряд в (7) и приравнивая между собой члены одного порядка малости, получаем с точностью до членов $\sim k^{-2}$:

$$u_n^{(0)}=2, \tag{8}$$

$$u_n^{(1)}=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\infty}dtY_1(t,\varphi)=-\frac{i}{2k\cos^3\theta}[A(1+\cos^2\theta)+B\cos 2\varphi_0\sin^2\theta],$$

$$u_n^{(2)}=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\infty}dtY_2(t,\varphi)+\frac{1}{2}[u_n^{(1)}]^2=$$

$$=-\frac{1}{8k^2\cos^6\theta}\sum_{m=0}^{2}T_{2m}L_{2m}(\theta)\cos 2m\varphi_0\,\mathrm{tg}^{2m}\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}[u_n^{(1)}]^2 \tag{9}$$

где введены обозначения:

$$A=(1/a_1)+(1/a_2),\quad B=(1/a_1)-(1/a_2),\quad T_0=A^2+(1/2)B^2,$$
$$T_2=2AB,\quad T_4=(1/2)B^2,\quad L_m(\theta)=Z_m^3+Z_m^2(3+\cos^2\theta)+ \tag{10}$$
$$+3Z_m(1+\sin^2\theta)+\sin^2\theta(5+\cos^3\theta),\quad Z_m=1+m\cos\theta.$$

Аналогичные вычисления для абсолютно мягкой поверхности дают

$$u_s^{(0)}=2,\quad u_s^{(1)}=-u_n^{(1)},\quad u_s^{(2)}=-u_n^{(2)}+[u_n^{(1)}]^2-$$
$$-\frac{\sin\theta}{8k^2\cos^2\theta}\sum_{m=1}^{2}P_{2m-1}M_{2m-1}\,\mathrm{tg}^{2m-1}\frac{\theta}{2}, \tag{11}$$

где

$$M_1=2A^2+B^2+3AB\cos 2\varphi_0,\ M_3=AB\cos 2\varphi_0+B^2\cos 4\varphi_0,$$

$$P_m=Z_m^2+Z_m(1+\cos^2\theta)+\sin^2\theta. \tag{12}$$

Из приведенных выше формул видно, что представление решений u_s и u_n интегральных уравнений (4а), (4б) в виде асимптотического ряда по обратным степеням k в действительности является разложением по малому параметру $\varepsilon=[ak\cos^3\theta]^{-1}\ll 1$, где $a=\min(a_1, a_2)$. При этом члены $u_n^{(1)}$ и $n_s^{(1)}$ первого порядка малости сдвинуты по фазе на $\pm\pi/2$ относительно геометрооптических значений $u_n^{(0)}=u_s^{(0)}=2$, соответствующих приближению касательной плоскости. Это означает, что дифракционные эффекты приводят к изменению фазы поверхностных значений U_n и $\partial U_s/\partial n$ на величины порядка ε, а поправки к их модулям имеют порядок ε^2. Поэтому для нахождения дифракционных поправок к квадратичным по полю величинам (например, к интенсивности рассеянного поля) необходимо иметь разложения u_n и u_s вплоть до членов $\sim\varepsilon^2$. Отметим, что при $a_1=a_2$ формулы (9) и (11) для $u_s^{(0)}$ и $u_n^{(1)}$ совпадают с результатами работы [13], где исследовалась коротковолновая асимптотика задачи дифракции на идеально отражающей сфере и были получены только первые ($\sim\varepsilon$) члены разложения поверхностных значений U_n и $\partial U_s/\partial n$.

Используя найденные выше асимптотические разложения поверхностных значений U_n и $\partial U_s/\partial n$, получим дифракционные поправки к методу касательной плоскости для обратно рассеянных полей U_s, U_n в дальней зоне:

$$U_{n,s}(\mathbf{R}_0)=\pm\frac{ike^{ikR_0}}{4\pi R_0}\int\limits_S(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n}(\mathbf{r}'))\,u_{n,s}(\mathbf{r}')\,e^{2ik\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}'}\,d^2\mathbf{r}'. \tag{13}$$

Здесь R_0 — расстояние от рассеивающей поверхности до точки наблюдения $\mathbf{R}_0=-\boldsymbol{\alpha}R_0$; верхний знак относится к U_n, нижний — к U_s. Уравнение рассеивающей поверхности S в системе координат $\{x, y, z\}$ зададим в виде $z=z(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}(x, y)$ — радиус-вектор в плоскости $z=0$. При $k\to\infty$ и не слишком больших углах падения $\theta_0(\cos\theta_0=-\alpha_z)$ основной вклад в интеграл (13) дают точки стационарной фазы (зеркальные точки) $\mathbf{r}_m$, в которых $\mathbf{n}(\mathbf{r}_m=-\boldsymbol{\alpha})$ и, следовательно,

$$\boldsymbol{\gamma}=\nabla_\perp z(\mathbf{r})\,|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m}=-\boldsymbol{\alpha}_\perp/\alpha_z, \tag{14}$$

где $\nabla_\perp\{\partial/\partial x,\ \partial/\partial y\}$, $\boldsymbol{\alpha}_\perp$ — проекция $\boldsymbol{\alpha}$ на плоскость $z=0$. Заметим, что в случае пологой поверхности ($\gamma^2\lesssim 1$) уравнение (14) будет иметь решения только при достаточно малых $\operatorname{tg}\theta_0\lesssim\gamma$. Ограничимся исследованием обратного рассеяния только в этой «квазизеркальной» области, предполагая, что вклад блестящих точек в рассеянное поле является определяющим, т. е. поле, рассчитанное в приближении геометрической оптики, намного превышает дифракционные поля. В окрестности зеркальных точек $\mathbf{r}_m$ можно, как и в предыдущем разделе, перейти в (13) от интегрирования по S к интегралу по касательной плоскости $S_{\perp m}$, а уравнение поверхности записать в виде (5). Вычисление интеграла (13) методом стационарной фазы приводит к результату:

$$U_{n,s}(\mathbf{R}_0)=\pm\frac{ik}{4R_0}\sum_m e^{ikR_m}\sqrt{a_{1m}a_{2m}}\left[1+\frac{i}{4k}\times\right.$$

$$\left.\times\left(a_{1m}\frac{\partial^2}{\partial\xi_m^2}+a_{2m}\frac{\partial^2}{\partial\eta_m^2}\right)\right]u_{n,s}(\mathbf{r})\,|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m}. \tag{15}$$

Суммирование в (15) производится по всем зеркальным точкам $\mathbf{r}_m$, главные радиусы кривизн в которых имеют значения a_{1m} и a_{2m} (в направлениях ξ_m и η_m соответственно). Подставляя в (15) асимптотические разло-

жения для u_n, u_s из (8)–(12) и учитывая, что в зеркальных точках $\theta=0$, а

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_m^2} u(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m} = \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial}{\partial\theta^2} u(\theta, \varphi_0)\Big|_{\substack{\theta=0,\\ \varphi_0=0,}} \tag{16а}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta_m^2} u(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m} = \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} u(\theta, q_0)\Big|_{\substack{\theta=0,\\ \varphi_0=\pi/2}}, \tag{16б}$$

получаем с точностью до членов порядка $1/k^2$:

$$U_n(\mathbf{R}_0) = \frac{1}{4R_0}\sum_m e^{ikR_m} K_m^{-1/2}\left[2+\frac{2i}{k}H_m+\frac{1}{k^2}(K_m-5H_m^2)\right], \tag{17а}$$

$$U_s(\mathbf{R}_0) = -\frac{1}{4R_0}\sum_m e^{ikR_m} K_m^{-1/2}\left[2-\frac{2i}{k}H_m+\frac{1}{k^2}(H_m^2-K_m)\right], \tag{17б}$$

где $K_m=1/a_{1m}a_{2m}$ – гауссовая (или полная) кривизна поверхности S в зеркальной точке $\mathbf{r}_m$, а $H_m=-(1/a_{1m}+1/a_{2m})/2$ – средняя кривизна.

Если разность фаз между полями, приходящими из различных зеркальных точек, достаточно велика

$$|k(R_n-R_m)|\gg 1,\ m\neq n \tag{18}$$

и зеркальных точек достаточно много, то интерференцией между ними можно пренебречь так, что для интенсивности $J|U|^2$ обратно рассеянного сигнала из (17а), (17б) следуют формулы некогерентного сложения интенсивностей от каждой зеркальной точки:

$$J_{n,s} = \sum_m J_{n,s}^{(m)}. \tag{19}$$

$$J_n^{(m)} = \frac{1}{4R_0}|K_m|^{-1}\left[1+\frac{1}{k^2}(K_m-4H_m^2)\right], \tag{20а}$$

$$J_s^{(m)} = \frac{1}{4R_0}|K_m|^{-1}\left[1-\frac{1}{k^2}(K_m-2H_m^2)\right]. \tag{20б}$$

Первые члены в квадратных скобках этих формул соответствуют приближению геометрической оптики и совпадают с результатами работы [14].

Если рассеивающая поверхность S имеет достаточно сложную форму, число зеркальных точек может оказаться настолько большим, что прямые вычисления по формуле (19) окажутся практически невыполнимыми. В этом случае естественным является статистический подход: уравнение поверхности $z=z(x, y)$ следует рассматривать как одну из реализаций случайной функции и вычислять статистические параметры случайной величины J («мгновенной интенсивности» – если смена реализаций происходит во времени) на ансамбле реализаций случайной функции $z=z(x, y)$. Ограничимся вычислением только первого момента – средней интенсивности:

$$I=\langle J\rangle=\sum_m \langle J^{(m)}(r_m)\rangle, \tag{21}$$

где $\langle\ldots\rangle$ – означает усреднение по всей реализации $z(x, y)$.

Отметим, что при этом пренебрегаем когерентной составляющей в рассеянном поле, которая отлична от нуля в обратно рассеянном сигнале только при строго нормальном облучении ($\theta_0=0$) и для высоких шероховатостей ($z\gg\lambda$) экспоненциально мала $\sim\exp(-2k^2\langle z^2\rangle)$. Поправки к приближению Кирхгофа для коэффициента отражения когерентной составляющей получены в [14].

Если ось ox совместить с плоскостью падения, т. е. положить $\alpha_x=\sin\theta_0$, $\alpha_y=0$, $\alpha_z=-\cos\theta_0$, то во всех зеркальных точках $\mathbf{r}_m$, согласно ус-

ловию (14), наклоны поверхности равны γ_0, где

$$\gamma_{0x}=(\partial z/\partial x)\,|_{\mathbf{r}_m}=\operatorname{tg}\theta_0,\quad \gamma_{0y}=(\partial z/\partial y)\,|_{\mathbf{r}_m}=0, \tag{22}$$

а K_m и H_m определяются значением вторых производных $z_{ik}''=(i,\ k=x,\ y)$:

$$K_m=\left.\frac{z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2}{(1+\gamma^2)^2}\right|_{\gamma=\gamma_0}=\cos^4\theta_0\,[z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2], \tag{23а}$$

$$H_m=\frac{1}{2}\left.\frac{(1+\gamma_y^2)\,z''_{xx}-2\gamma_x\gamma_y z''_{xy}+(1+\gamma_x^2)\,z''_{yy}}{(1+\gamma^2)^{3/2}}\right|_{\gamma=\gamma_0}=$$

$$=\frac{\cos\theta_0}{2}\,[z''_{xx}\cos^2\theta_0+z''_{yy}]. \tag{23б}$$

Таким образом, усреднение в (21) следует проводить по случайному числу зеркальных точек и случайным значениям z_{ik}'' в каждой из них при фиксированных значениях первых производных $\gamma=\gamma_0$. Это означает, что (21) можно записать в виде

$$I=\int\limits_{S_0} d^2\mathbf{r}\sum_m\langle\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)\,\delta(\gamma-\gamma_0)\,J(\gamma,z_{ik}'')\rangle, \tag{24}$$

где интегрирование по $d^2\mathbf{r}$ проводится по проекции S_0 поверхности S на плоскость $z=0$, а явная зависимость J от γ и z_{ik}'' определяется формулами (20а) и (20б). Обозначим через $P(\mathbf{r})$ плотность распределения зеркальных точек на плоскости S_0:

$$\sum_m\langle\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)\rangle=P(\mathbf{r}), \tag{25}$$

так, что $P(\mathbf{r})\,d^2\mathbf{r}$ — есть среднее число зеркальных точек на элементе площади $d^2\mathbf{r}$. С другой стороны, $P(\mathbf{r})$ очевидным соотношением связана с плотностью распределения наклонов $w(\gamma)$:

$$|P(\mathbf{r})\,d^2\mathbf{r}|=|w(\gamma)\,d^2\gamma|\,|_{\gamma=\gamma_0}. \tag{26}$$

Учитывая, что якобиан перехода от переменных γ к переменным $\mathbf{r}$ выражается через полную кривизну K_m поверхности в зеркальной точке

$$|d^2\gamma/d^2\mathbf{r}|=|z_{xx}''z_{yy}''-(z_{xy}'')^2|=|K_m|/\cos^4\theta_0, \tag{27}$$

и предполагая поверхность пространственно однородной (что позволяет считать поле наклонов $\gamma(\mathbf{r})$ некоррелированным с полем $z_{ik}''(\mathbf{r})$ в совпадающих точках поверхности), из (24) получаем

$$I_{n,s}=S_0\frac{w(\gamma_0)}{4R_0^2\cos^4\theta_0}(1+\Delta_{n,s}),\quad \Delta_{n,s}=\delta_{n,s}\frac{\cos^2\theta_0}{k^2}$$

$$\left[\cos^2\theta_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]^2 W(\mathbf{r})\,|_{\mathbf{r}=0}. \tag{28}$$

Здесь $\delta_{n,s}$ — принимает значения $\delta_n=-1$, $\delta_s={}^1/_2$, а дисперсии вторых производных $\langle(z_{ik}'')^2\rangle$ выражены через производные от пространственной автокорреляционной функции $W(\mathbf{r})=\langle z(\mathbf{r}_1+\mathbf{r})\,z\langle\mathbf{r})\rangle$.

Первое слагаемое в (28) в точности совпадает с результатом, следующим как из приближения касательной плоскости (см., например, [5], § 20), так и непосредственно из геометрической оптики.

При этом учет затенений поверхности (см. [8]) сводится к замене в (28) $w(\gamma_0)$ на эффективную плотность распределения наклонов освещенной части поверхности $w_э(\gamma_0)=w(\gamma_0)\,[1+\Lambda(\theta_0)]^{-1}$, где

$$\Lambda(\theta_0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\gamma_y\int\limits_{\operatorname{ctg}\theta_0}^{\infty}d\gamma_x w(-\gamma_x,\gamma_y)\,(\gamma_x\operatorname{tg}\theta_0-1).$$

Оценка второго слагаемого $\Delta_{n,s}$, связанного с дифракционными эффектами, позволяет получить погрешности и указать границы применимости метода касательной плоскости. Следует отметить, что в случае абсолютно жесткой поверхности учет дифракции приводит к уменьшению интенсивности обратно рассеянного сигнала в квазизеркальной области $\Delta_n<0$, а в случае абсолютно мягкой — к увеличению ($\Delta_s>0$), причем $2\Delta_s=-\Delta_n$. В частности, для статистически изотропных шероховатостей с гауссовой автокорреляционной функцией $W(\mathbf{r})=\sigma^2\exp(-r^2/2l^2)$ ($\sigma^2=\langle z^2(\mathbf{r})\rangle$ — дисперсия возвышений, l — радиус корреляций, дифракционные поправки $\Delta_{n,s}$ имеют вид

$$\Delta_{n,s}=\delta_{n,s}\cos^2\theta_0(1+\cos^2\theta_0)^2\frac{1}{k^2}\frac{d^4W(\mathbf{r})}{dr^4}\Big|_{r=0}=$$

$$=3\delta_{n,s}\cos^2\theta_0(1+\cos^2\theta_0)^2\frac{\sigma^2}{k^2l^4}. \qquad (29)$$

Видно, что неравенство $\Delta_{n,s}\ll 1$ приводит к значительно более слабым ограничениям на степень гладкости неровностей поверхности (в масштабе длины волны), чем обычно подразумеваемое неравенство (1). Довольно неожиданным является тот факт, что величина поправок $|\Delta_{n,s}|$ уменьшается с ростом угла падения θ_0 (заметим, что локальный угол падения в зеркальных точках при обратном рассеянии равен нулю). Объясняется это тем, что при увеличении угла падения θ_0 зеркальные точки перемещаются с вершин и впадин неровностей на все более крутые склоны (см. (22)), где, согласно формулам (23), характерные радиусы кривизны оказываются больше. Следует, однако, помнить, что при увеличении θ_0 уменьшается число зеркальных точек и за пределами квазизеркальной области асимптотическое разложение (28), полученное путем применения метода стационарной фазы к интегралу (13), становится неприменимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антокольский М. Л.* Отражение волн от шероховатой абсолютно отражающей поверхности.– Докл. АН СССР, 1948, т. 62, № 2, с. 203–206.
2. *Бреховских Л. М.* Дифракция звуковых волн на неровной поверхности.– Докл. АН СССР, 1951, т. 79, № 4, с. 585–588.
3. *Исакович М. А.* Рассеяние волн от статистически шероховатой поверхности.– ЖЭТФ, 1952, т. 23, № 3(9), с. 305–314.
4. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
5. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
6. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Об учете затенений при рассеянии волн на статистически неровной поверхности.– Изв. вузов. Радиофизика, 1964, т. 7, № 1, с. 101–112.
7. *Павельев А. Г.* О функции освещенности статистически неровной поверхности.– Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 5, с. 811–817.
8. *Копилович Л. Е., Фукс И. М.* Индикатрисы рассеяния и альбедо сильношероховатых поверхностей.– Изв. вузов. Радиофизика, 1981, т. 24, № 7, с. 840–850.
9. *Павельев А. Г.* Закон сохранения энергии в задаче о рассеянии радиоволн на неровной поверхности.– Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 2, с. 268–274.
10. *Воронович А. Г.* О пределах применимости приближения Кирхгофа в задачах рассеяния звука на неровной поверхности.– Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 4, с. 830–834.
11. *Лимонов Е. В.* Анализ погрешности двухмасштабной модели рассеяния электромагнитных волн морской поверхностью.– Радиотехника и электроника, 1984, т. 29, № 4, с. 716–723.
12. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
13. *Deppermann V. K., Franz W.* Theorie der Beugung an der Kugel unter Berücksichtigung der Kriechwelle.– Ann. der Phys., 1954, v. 14, № 6, s. 253–264.
14. *Kodis R. D.* A Note of the Theory of Scattering from an Irregular Surface.– IEEE Trans., 1966, AP-14, № 1, p. 77–82.

Институт радиофизики
и электроники АН УССР

Поступила в редакцию
24.V.1984