АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXII 1986 Вып. 2

УДК 534.

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ВЫТЯНУТОМ ЗАОСТРЕННОМ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОМ ТЕЛЕ

Васильев В. А.

Рассматривается рассеяние плоской звуковой волны заостренным телом вращения, диаметр которого много меньше длины и по длине которого укладывается много длин волн. Найден главный член асимптотики рассеянного поля.

В работе рассматривается дифракция плоской акустической волны на вытянутом заостренном абсолютно жестком теле вращения. Такая задача рассматривалась в работах [1—3]. В работах [1, 2] исследован случай тела, диаметр которого мал, а в [3] изучены тела, для которых $kd \simeq 1$, $d/L \sim 0$, где d и L — соответственно диаметр и длина тела, k — волновое число звука.

В данной работе расчет поля сделан для тела произвольного диаметра при условии, что отношение d/L мало. Рассеянное поле представлено формулой Грина, в которую вместо давления рассеянного поля $p|_S$ на поверхности тела приближенно подставлено давление рассеянного поля на цилиндре сравнения, а вместо $\partial p/\partial n|_S$ взято точное значение.

Приближенная замена рассеянного поля полем на цилиндре сравнения широко используется (см., например, [4, 5]), хотя до настоящего времени не было обоснования такой замены. Необходимое обоснование можно получить из работы [3]. Если воспользоваться приведенными в [3] выражениями для нормальных производных потенциалов простого и двойного слоев вытянутого тела, то можно показать, что поле, представленное формулой Грина, в которую вместо $\partial p/\partial n|_S$ и p/S подставлены соответственно нормальная производная рассеянной волны и давление рассеянной волны на цилиндре сравнения, асимптотически удовлетворяет условию $\partial p/\partial n|_S = -\partial p_0/\partial n|_S$, что и требуется ($p_0$ — давление в падающей волне).

Рассмотрим рассеяние плоской звуковой волны на вытянутом заостренном абсолютно жестком теле вращения, по длине которого укладывается много длин волн. Пусть ось x декартовой системы координат совмещена с осью тела и радиус a поперечного сечения тела задается в виде $a=f(x)$, $-L \leqslant x \leqslant L$, причем $f(-L)=f(L)=0$, $f'(L)=d \neq 0$, $f'(x)$ — много меньше единицы и $f(x)$ имеет внутри интервала $-L \leqslant x \leqslant L$ ограниченные производные любого порядка. Нас будет интересовать давление p рассеянной длины на больших расстояниях от тела.

Запишем давление $\tilde{p}$ в окружающей среде в виде

$$\tilde{p}(x, y, z) = p_0 e^{ik(\cos\alpha_0 x + \sin\alpha_0 y)} + p(x, y, z),$$

где p_0 и $p(x, y, z)$ — соответственно амплитуда давления падающей волны и давление рассеянной волны, α_0 — угол между направлением распространения падающей волны и осью x, k — волновое число звука в среде. Давление p будем представлять в следующем виде:

$$p = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[p\Big|_S \frac{\partial}{\partial n} g - g\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)\Big|_S \right] dS = p_1 + p_2, \tag{1}$$

где S — поверхность тела, $g=e^{ikr}/r$, r — расстояние от точки на поверхности S до точки (x, y, z) в среде, $\partial/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали $\mathbf{n}$ к S, p_1 и p_2 — потенциалы соответственно двойного и простого слоя промежуточного равенства в выражении (1).

Интересующее нас давление p найдем следующим образом. Вначале, воспользовавшись условием $(\partial\tilde{p}/\partial n)|_S=0$, найдем $(\partial p/\partial n)|_S$, подставив которое в выражение p_2 через интеграл по поверхности, вычислим p_2. Второе слагаемое в выражении (1) — давление p_1 — вычислим приближенно. Для этого подставим в интеграл, посредством которого определено p_1, вместо величины $p|_S$ давление рассеянного поля, создаваемого падающей волной на цилиндр сравнения. Цилиндром сравнения называется бесконечный цилиндр, ось которого совпадает с осью тела, и который проведен через кривую пересечения поверхности S с плоскостью, перпендикулярной оси и содержащей точку, в которой ищется значение $p|_S$.

Перейдем к вычислению p_2. Воспользовавшись условием $(\partial\tilde{p}/\partial n|_S$, запишем p_2 в виде

$$p_2=\frac{p_0}{4\pi}\iint\limits_S g\left[\left(\frac{\partial}{\partial n}e^{ik(\cos\alpha_0 x+\sin\alpha_0 y)}\right)\Big|_S\right]dS. \tag{2}$$

Введем на S координаты по формулам $x=x_0$, $y=f(x_0)\cos\varphi_0$, $z=f(x_0)\sin\varphi_0$.

В этих координатах выражение для вектора внешней нормали $\bar{\mathbf{n}}$ и элемента поверхности dS записывается следующим образом:

$$\bar{\mathbf{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}}(-f'(x_0),\cos\varphi_0,\sin\varphi_0), \tag{3}$$

$$dS=\sqrt{1+[f'(x_0)^2}f(x_0)\,dx_0\,d\varphi_0. \tag{4}$$

С помощью выражения для $\bar{\mathbf{n}}$ из (3) находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}e^{ik(\cos\alpha_0 x+\sin\alpha_0 y)}\right)\Big|_S=(\nabla e^{ik(\cos\alpha_0 x+\sin\alpha_0 y)},\bar{\mathbf{n}})|_S=$$
$$=\frac{ik}{\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}}(\sin\alpha_0\cos\varphi_0-f'(x_0)\cos\alpha_0)\,e^{ik(\cos\alpha_0 x_0+\sin\alpha_0\cos\varphi_0)f(x_0)}). \tag{5}$$

Рассеянное поле p будем искать в сферических координатах $x=R\cos\alpha$, $y=R\sin\alpha\cos\varphi$, $z=R\sin\alpha\sin\varphi$. Величина r в координатах R, α, φ может быть представлена в таком виде:

$$r=\sqrt{(R\cos\alpha-x_0)^2+(R\sin\alpha\cos\varphi-f(x_0)\cos\varphi_0)^2+(R\sin\alpha\sin\varphi-}$$
$$\overline{-f(x_0)\sin\varphi_0)^2}=\sqrt{R^2-2R(\cos\alpha x_0+\sin\alpha\cos(\varphi-\varphi_0)f(x_0))+}$$
$$\overline{+x_0^2+f^2(x_0)}=R-(\cos\alpha x_0+\sin\alpha\cos(\varphi-\varphi_0)f(x_0))+O\left(\frac{1}{R}\right). \tag{6}$$

Подставив в формулу (2) вместо dS, $\left(\frac{\partial}{\partial n}e^{ik(\cos\alpha_0 x+\sin\alpha_0 y)}\right)\Big|_S$ и r правые части выражений (4), (5), (6), и, ограничиваясь членами порядка $1/R$, получим следующее выражение:

$$p_2=\frac{ikp_0}{2}\frac{e^{ikR}}{R}\int\limits_{-L}^{L}e^{ik(\cos\alpha_0-\cos\alpha)x_0}\Phi(x_0,\alpha,\varphi)f(x_0)\,dx_0, \tag{7}$$

где

$$\Phi(x_0,\alpha,\varphi)=\int\limits_0^{2\pi}(\sin\alpha_0\cos\varphi_0-f'(x_0)\cos\alpha_0)\,e^{ik(\sin\alpha_0\cos\varphi_0-\sin\alpha\cos(\varphi-\varphi_0))f(x_0)}\,d\varphi_0 \tag{8}$$

Вычислим этот интеграл. Воспользовавшись формулами

$$e^{iz\cos\varphi}=\sum_{m=0}^{\infty} i^m\varepsilon_m J_m(z)\cos m\varphi,$$

$$\cos\varphi e^{iz\cos\varphi}=-i\sum_{m=0}^{\infty} i^m\varepsilon_m J_m'(z)\cos m\varphi,$$

где $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_2=\varepsilon_3=\ldots=2$, $J_m(z)$ — функция Бесселя порядка m, можно записать $\Phi(x_0, \alpha, \varphi)$ в таком виде:

$$\Phi(x_0,\alpha,\varphi)=-\int_0^{2\pi}\Big[\sum_{m=0}^{\infty}(-i)^m\varepsilon_m J_m(k\sin\alpha f(x_0))\cos m(\varphi-\varphi_0)\Big]\times$$

$$\times\Big\{\sum_{l=0}^{\infty} i^l\varepsilon_l[i\sin\alpha_0 J_l'(k\sin\alpha_0 f(x_0))+$$

$$+f'(x_0)\cos\alpha_0 J_l(k\sin\alpha_0 f(x_0))]\cos l\varphi_0\Big\}d\varphi_0=$$

$$=-2\pi\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m J_m(k\sin\alpha f(x_0))[i\sin\alpha_0 J_m'(k\sin\alpha_0 f(x_0))+$$

$$+f'(x_0)\cos\alpha_0 J_m(k\sin\alpha_0 f(x_0))]\cos m\varphi. \tag{9}$$

Подставив выражение (9) в (7), получим

$$p_2=\frac{kp_0}{2}\frac{e^{ikR}}{R}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i_m(\alpha)\cos m\varphi, \tag{10}$$

где

$$i_m(\alpha)=\int_{-L}^{L} e^{ik(\cos\alpha_0-\cos\alpha)x_0}J_m(k\sin\alpha f(x_0))\times$$

$$\times[\sin\alpha_0 J_m'(k\sin\alpha_0 f(x_0))-if'(x_0)\cos\alpha_0 J_m(k\sin\alpha_0 f(x_0))]f(x_0)\,dx_0. \tag{11}$$

При $N=(L/a_0)\to\infty$, где $a_0=\max\limits_{-L\leqslant x\leqslant L} f(x)$, можно получить асимптотические выражения функций $i_m(\alpha)$ для значений α, не равных α_0. Воспользуемся тем, что при $\alpha\neq\alpha_0$ экспонента подынтегрального выражения является быстроменяющейся функцией, в то время как остальные функции меняются медленно в силу плавности $f(x)$. Сделав замену $x=Lt$, получим следующее выражение для $i_m(\alpha)$:

$$i_m(\alpha)=La_0\int_{-1}^{1} e^{iN\psi(\cos\alpha_0-\cos\alpha)t}J_m(\psi\sin\alpha g(t))\times$$

$$\times\Big[\sin\alpha_0 J_m'(\psi\sin\alpha_0 g(t))-\frac{i}{N}g'(t)\cos\alpha_0 J_m(\psi\sin\alpha_0 g(t))\Big]g(t)\,dt, \tag{12}$$

где $g(t)=(1/a_0)f(tL)$, $\psi=ka_0$.

Из выражения (12) видно, что при больших $N\psi(\cos\alpha_0-\cos\alpha)$ экспонента меняется быстрее всех остальных функций, стоящих под знаком интеграла. Ограничиваясь главными членами по наклону $f(x)$ в точках

$x=\pm L$, имеем

$$i_0=\frac{i}{k^2}\frac{(1-\cos\alpha_0\cos\alpha)}{(\cos\alpha_0-\cos\alpha)^3}[c^2e^{ikL(\cos\alpha-\cos\alpha_0)}-d^2e^{ikL(\cos\alpha_0-\cos\alpha)}],$$

$$i_m=\frac{i(-1)^m(2m)!(\sin\alpha_0\sin\alpha)^m}{k^2 2^{2m}m!(m-1)!(\cos\alpha_0-\cos\alpha)^{2m+1}}[c^{2m}e^{ikL(\cos\alpha-\cos\alpha_0)}-$$
$$-d^{2m}e^{ikL(\cos\alpha_0-\cos\alpha)}],\quad m\geqslant 1, \tag{13}$$

где $c=f'(-L)$, $d=f'(L)$.

Подставив выражение (13) в формулу (10), получим следующее асимптотическое выражение для поля p_2 в области углов вне определенного интервала, содержащего угол α_0 (этот интервал с ростом N уменьшается, как $1/N$, при $\alpha_0\neq 0$, π и, как $1/\sqrt{N}$, при $\alpha_0=0$, π):

$$p_2=ip_0\frac{e^{ikR}}{2kR}\Big\{\frac{(1-\cos\alpha_0\cos\alpha)}{(\cos\alpha_0-\cos\alpha)^3}[c^2e^{ikL(\cos\alpha-\cos\alpha_0)}-d^2e^{ikL(\cos\alpha_0-\cos\alpha)}]+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!(\sin\alpha_0\sin\alpha)^m\cos m\varphi}{2^{2m-1}m!(m-1)!(\cos\alpha_0-\cos\alpha)^{2m+1}}\times$$
$$\times[c^{2m}e^{ikL(\cos\alpha-\cos\alpha_0)}-d^{2m}e^{ikL(\cos\alpha_0-\cos\alpha)}]. \tag{14}$$

Перейдем к оценке вида p_1. Подставив вместо $p|_S$ давление рассеянного поля на цилиндре сравнения, получим

$$p_1=-\frac{p_0}{4\pi}\int_{-L}^{L}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial n}g\right)\Big[e^{ik\cos\alpha_0x_0}\sum_{m=0}^{\infty}i^m\varepsilon_mJ_m'(k\sin\alpha_0f(x_0))\times$$
$$\times\frac{H_m(k\sin\alpha_0f(x_0))}{H_m'(k\sin\alpha_0f(x_0))}\cos m\varphi_0\Big]dS, \tag{15}$$

где $H_m(z)$ — функция Ханкеля первого рода порядка m.

Выражение $\partial g/\partial n$ получим из следующих равенств:

$$\partial g/\partial n=\left[\frac{ikr-1}{r^2}e^{ikr}(\nabla_0 r,\mathbf{n})\right]\Big|_S=\Big[\frac{ikr-1}{r^2}e^{ikr}\times$$
$$\times\left(\left(\frac{x_0-R\cos\alpha}{r},\frac{y_0-R\sin\alpha\cos\varphi}{r},\frac{z_0-R\sin\alpha\sin\varphi}{r}\right),\mathbf{n}\right)\Big]\Big|_S=$$
$$=\frac{ik}{R}e^{ikR}\frac{(f'(x_0)\cos\alpha-\sin\alpha\cos(\varphi-\varphi_0))}{\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}}\times$$
$$\times e^{-ik(\cos\alpha x_0+\sin\alpha\cos(\varphi-\varphi_0)f(x_0))}+o\left(\frac{1}{R}\right)\Big\}, \tag{16}$$

где ∇_0 — означает градиент r по переменным x_0, y_0, z_0.

Подставив в (15) вместо $\partial g/\partial n$ и ∂S выражения, задаваемые формулами (16) и (4), получим

$$p_1=\frac{-ikp_0}{4\pi R}e^{ikR}\int_{-L}^{L}\int_{0}^{2\pi}e^{ik(\cos\alpha_0-\cos\alpha)x_0}e^{-ik\sin\alpha\cos(\varphi-\varphi_0)f(x_0)}\times$$
$$\times(f'(x_0)\cos\alpha-\sin\alpha\cos(\varphi-\varphi_0))\Big[\sum_{m=0}^{\infty}i^m\varepsilon_mJ_m'(k\sin\alpha_0f(x_0))\times$$
$$\times\frac{H_m(k\sin\alpha_0f(x_0))}{H_m'(k\sin\alpha_0f(x_0))}\cos m\varphi_0\Big]f(x_0)\,dx_0\,d\varphi_0=$$

$$= \frac{-ikp_0}{4\pi R} e^{ikR} \int_{-L}^{L} \int_{0}^{2\pi} e^{ik(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)x_0} \Big[\sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m J_m'(k \sin\alpha_0 f(x_0)) \times$$

$$\times \frac{H_m(k \sin\alpha_0 f(x^0))}{H_m'(k \sin\alpha_0 f(x_0))} \cos m\varphi_0 \Big] \Big\{ \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l \varepsilon_l [\cos\alpha f'(x_0) J_l(k \sin\alpha f(x_0)) - \tag{17}$$

$$-i \sin\alpha J_l'(k \sin\alpha f(x_0))] \cos l(\varphi - \varphi_0) \Big\} f(x_0)\, dx_0\, d\varphi_0 =$$

$$= \frac{-ikp_0}{2R} e^{ikR} \int_{-L}^{L} e^{ik(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)x_0} \Big\{ \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m\varphi J_m'(k \sin\alpha_0 f(x_0)) \times$$

$$\times \frac{H_m(k \sin\alpha_0 f(x_0))}{H_m'(k \sin\alpha_0 f(x_0))} [\cos\alpha f'(x_0) J_m(k \sin\alpha f(x_0)) -$$

$$-i \sin\alpha J_m'(k \sin\alpha f(x_0))] \Big\} f(x_0)\, dx_0.$$

Найдем для p_1 асимптотическое выражение, аналогичное выражению (14) для p_2. Проделав необходимые вычисления и оставив в каждой гармонике по φ главные члены разложения по наклону $f(x)$ в точках $x = \pm L$, из формулы (17) получим следующее выражение:

$$p_1 = p_0 \frac{e^{ikR}}{2kR} \Big\{ \Big\{ \frac{(\sin\alpha \sin\alpha_0)^2}{4(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)^5} \Big[\Gamma'(5) + 2 \cdot 3! \pi i \operatorname{sgn}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) - 4! \times$$

$$\times \ln \Big| \frac{\cos\alpha_0 - \cos\alpha}{c \sin\alpha_0} \Big| \Big] - \frac{1}{2} \frac{\cos\alpha \sin^2\alpha_0}{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)^4} \times$$

$$\times \Big[\Gamma'(4) + 3\pi i \operatorname{sgn}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) - 3! \ln \Big| \frac{\cos\alpha_0 - \cos\alpha}{c \sin\alpha_0} \Big| \Big] \Big\} c^4 \times$$

$$\times e^{ikL(\cos\alpha - \cos\alpha_0)} - \Big\{ \frac{(\sin\alpha \sin\alpha_0)^2}{4(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)^5} \Big[\Gamma'(5) - 2 \cdot 3! \pi i \operatorname{sgn} \times \tag{18}$$

$$\times (\cos\alpha_0 - \cos\alpha) - 4! \ln \Big| \frac{\cos\alpha_0 - \cos\alpha}{d \sin\alpha_0} \Big| \Big] - \frac{1}{2} \frac{\cos\alpha \sin^2\alpha_0}{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)^4} \times$$

$$\times \Big[\Gamma'(4) - 3\pi i \operatorname{sgn}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) - 3! \ln \Big| \frac{\cos\alpha_0 - \cos\alpha}{d \sin\alpha_0} \Big| \Big] \Big\} d^4 e^{ikL(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m)! (\sin\alpha \sin\alpha_0)^m \cos m\varphi}{2^{m-1} m! (m-1)! (\cos\alpha_0 - \cos\alpha)^{2m+1}} [c^{2m} e^{ikL(\cos\alpha - \cos\alpha_0)} -$$

$$- d^{2m} e^{ikL(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)}] \Big\},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

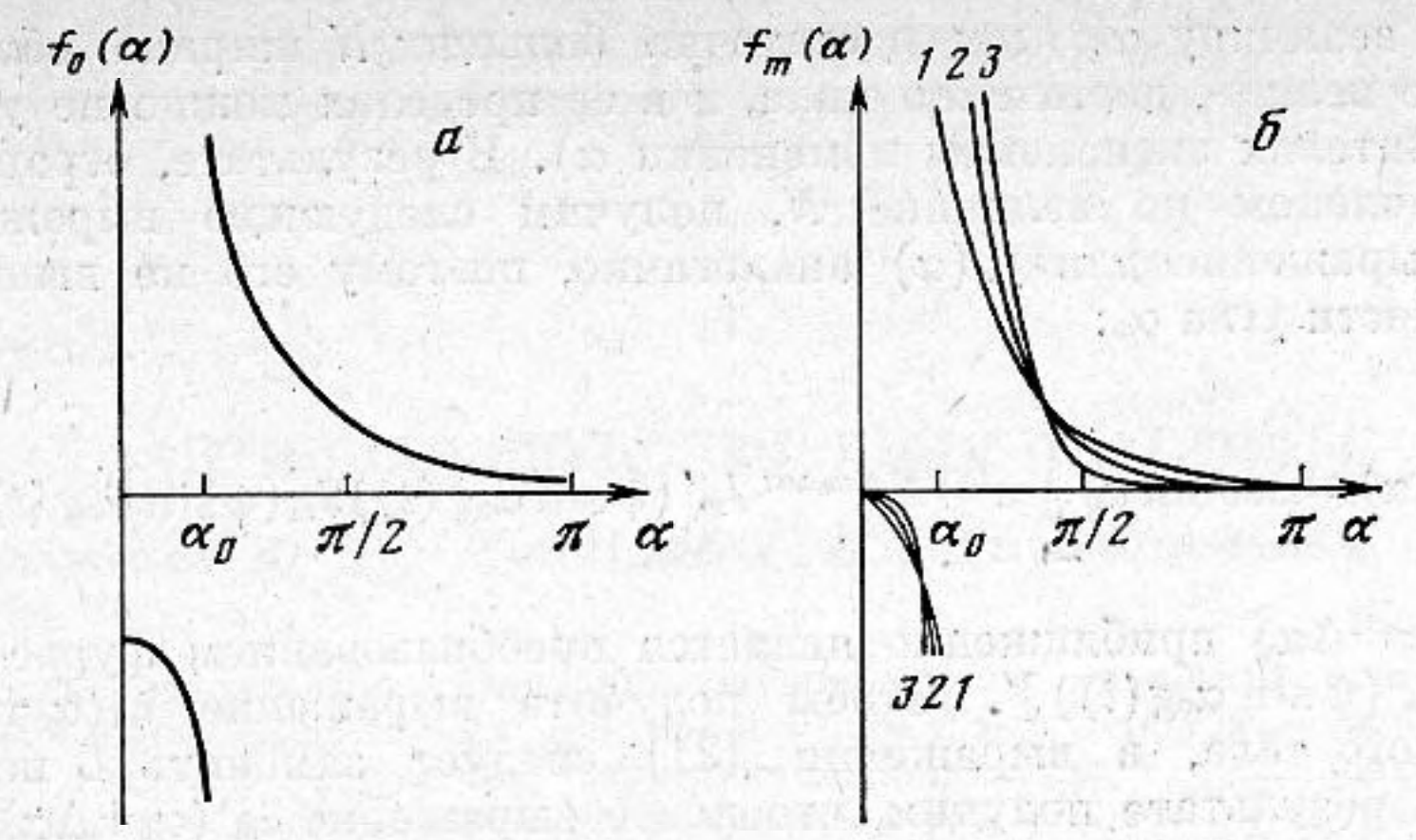
Сложив выражения (14) и (18), получим асимптотическое выражение для p, справедливое при $\alpha \neq \alpha_0$:

$$p = p_1 + p_2 = ip_0 \frac{e^{ikR}}{2kR} \Big\{ \frac{(1 - \cos\alpha_0 \cos\alpha)}{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)^3} [c^2 e^{ikL(\cos\alpha - \cos\alpha_0)} -$$

$$- d^2 e^{ikL(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)}] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m)! (\sin\alpha_0 \sin\alpha)^m \cos m\varphi}{2^{2m-2} m! (m-1)! (\cos\alpha_0 - \cos\alpha)^{2m+1}} \times$$

$$\times [c^{2m} e^{ikL(\cos\alpha - \cos\alpha_0)} - d^{2m} e^{ikL(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)}] \Big\}. \tag{19}$$

У нулевой гармоники в выражении (19) опущены члены порядка



Вид зависимости от угла множителей, входящих в формулу (19). *а* – угловой множитель $f_0(\alpha)=(1-\cos\alpha\cos\alpha_0)/(\cos\alpha_0-\cos\alpha)^3$, *б* – угловые множители $f_m(\alpha)=(\sin\alpha_0\sin\alpha)^m/(\cos\alpha_0-\cos\alpha)^{2m+1}$ для случая $m=1, 2, 3$

c^4, $c^4\ln|(\cos\alpha_0-\cos\alpha)/c\sin\alpha_0|$, d^4, $d^4\ln|(\cos\alpha_0-\cos\alpha)/d\sin\alpha_0|$, поскольку они малы по сравнению с членами порядка c^2 и d^2.

Выражения, стоящие в квадратных скобках формулы (19), являются осциллирующими функциями α. Они описывают интерференцию волн, отходящих от концов тела. Их абсолютная величина меняется от (c^2-d^2) до (c^2+d^2) для нулевой гармоники по φ и от $(c^{2m}-d^{2m})$ до $(c^{2m}+d^{2m})$ для остальных гармоник (здесь считается, что $c^2>d^2$). Если $c^2\neq d^2$, то для достаточно больших m осцилляции становятся незаметными; если c в несколько раз превосходит d, то осцилляции незаметны для всех гармоник и рассеянное поле вне некоторой окрестности угла α_0 имеет вид волны, отходящей от конца $x=-L$. Множители, зависящие от α и стоящие перед квадратными скобками формулы (19), описывают зависимость от α волн, отходящих от концов $x=\pm L$. Качественный характер зависимости этих множителей показан на фигуре.

При аффинном растяжении тела в n раз вдоль оси x давление нулевой и первой грамоник по φ вне некоторой окрестности угла α_0 уменьшается примерно в n^2 раз, давление m-й гармоники по φ $(m\geqslant 2)$ уменьшается примерно в n^{2m} раз (в формуле (19) следует заменить c и d соответственно на c/n и d/n – значения производной функции $f(x/n)$ в концах $x=\mp nL$ растянутого тела).

Вид рассеянного поля и его приближенное поведение в зависимости от коэффициента растяжения n в окрестности угла α_0, где рассеяние велико, можно получить из формулы (12) и аналогичной ей формулы (20):

$$j_m(\alpha)=La_0\int\limits_{-1}^{1} e^{iN\psi(\cos\alpha_0-\cos\alpha)t}J_m'(\psi\sin\alpha_0 g(t))\times$$
$$\times\frac{H_m(\psi\sin\alpha_0 g(t))}{H_m'(\psi\sin\alpha_0 g(t))}\Big[\frac{1}{N}\cos\alpha g'(t)J_m(\psi\sin\alpha g(t))-$$
$$-i\sin\alpha J_m'(\psi\sin\alpha g(t))\Big]g(t)\,dt, \qquad (20)$$

где $j_m(\alpha)$ – коэффициент разложения p_1 в следующий ряд:

$$p_1=kp_0\frac{e^{ikR}}{2R}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m j_m(\alpha)\cos m\varphi.$$

Для этого приближенно заменим $\cos\alpha$ в показателе экспоненты формул (12) и (20) на $\cos\alpha_0-\Delta\alpha\sin\alpha_0$. Подставив в остальные множители

вместо α величину α_0 (для достаточно больших N ширина области, где рассеяние велико, достаточно мала, и в ее пределах можно не учитывать в сомножителях экспоненты изменения α). В результате, ограничиваясь главным членом по величине N, получим следующее выражение для $i_m(\alpha)$ (выражение для $j_m(\alpha)$ аналогично, поэтому его не выписываем) в окрестности угла α_0:

$$i_m(\alpha_0+\Delta\alpha) \simeq La_0 \sin a_0 \int_{-1}^{1} e^{iN\psi \sin \alpha_0 \Delta\alpha t} J_m'(\psi \sin \alpha_0 g(t)) J_m(\psi \sin \alpha_0 g(t)) g(t)\, dt, \tag{21}$$

т. е. $i_m(\alpha_0+\Delta\alpha)$ приближенно является преобразованием фурье-функции $(1/2\psi)[J_m^2(\psi \sin \alpha_0 g(t))]'$. Чтобы получить выражение $i_m(\alpha_0+\Delta\alpha)$ для удлиненного тела, в выражении (21) следует заменить L на nL и N на nN. В результате получим, что новое выражение $i_m^1(\alpha_0+\Delta\alpha)$ записывается через старое таким образом:

$$i_m^1(\alpha_0+\Delta\alpha) \simeq n i_m(\alpha_0+n\Delta\alpha). \tag{22}$$

Из формулы (22) следует, что диаграмма направленности вытянутого тела в окрестности угла α_0 повторяет вид диаграммы направленности исходного тела с той разницей, что диаграмма растянутого тела сжата в n раз, а рассеянное поле в n раз больше — во столько раз, во сколько увеличивалась освещенная площадь. Рассеянная телом энергия также увеличивается в n раз.

Таким образом, при аффинном растяжении тела вдоль его оси рассеяние в направлениях $\alpha \neq \alpha_0$ стремится к нулю, рассеяние в направлениях, близких к конусу $\alpha=\alpha_0$, возрастает в n раз, а ширина области углов α, в которой рассеяние велико, уменьшается в n раз; диаграмма растянутого тела в окрестности конуса $\alpha=\alpha_0$ приближенно может быть получена сжатием в n раз диаграммы исходного тела.

Аналогичные рассуждения можно провести для случая вытянутого заостренного тела (не обязательно тела вращения), поверхность которого может быть охарактеризована импедансом, плавно зависящим от x, и для случая электромагнитных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Geer J.* The scattering of a scalar wave by a slender body of revolution.– SIAM J., Appl. Math., 1978, v. 34, № 2, p. 348–370.
2. *Федорюк М. В.* Рассеяние акустических волн жестким телом вращения.– Акуст. журн., 1981, т. 27, № 4, с. 605–609.
3. *Федорюк М. В.* Рассеяние плоской волны на цилиндрической поверхности с длинным возмущением.– Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1985, т. 49, № 1, с. 160–193.
4. *Васильев Д. Г., Симонов И. В.* Асимптотические оценки частот колебаний оболочки в жидкости. Препринт № 186. Ин-т проблем механики АН СССР, 1981, с. 41–42.
5. *Junger M. C.* Scattering by slender bodies of revolution.– JASA, 1982, v. 72(6), p. 1954–1956.

Акустический институт
им. Н. И. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7.V.1985