АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXII 1986 Вып. 2

УДК 534.874:534.26

# НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ ЛАЙТХИЛЛА В СВЯЗИ С ИЗЛУЧЕНИЕМ ЗВУКА КОМПАКТНЫМИ ВИХРЯМИ

*Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А.*

На основе теории Лайтхилла сформулирован подход к описанию излучения звука компактными областями завихренности с приближенным учетом обратного влияния излучения на поток. Получены два первых члена асимптотического разложения звукового поля по числу Маха потока в виде интегралов по области, где отлична от нуля завихренность. Такое представление поля особенно удобно для решения задач об излучении звука движущимися компактными вихрями, поскольку для этого достаточно знать нестационарные характеристики несжимаемого течения только в ядре вихря.

Теория Лайтхилла является приближенным методом описания вихревого движения сжимаемой жидкости при малых числах Маха $M$. На основе параметров течения несжимаемой жидкости она позволяет определить звуковое поле, порождаемое нестационарным движением вихрей [1]. Такое описание однако не является вполне точным уже потому, что оно не учитывает обратного влияния излучения звука на порождающий его поток и это приводит к накапливающейся по времени ошибке. Другими словами, такое описание движения сжимаемой жидкости справедливо только в пределах не очень больших промежутков времени. Для некоторых типов вихревых течений обратное влияние приводит к новому типу неустойчивости — акустической неустойчивости [2, 3]. В связи с этим представляет интерес хотя бы приближенно учесть это обратное влияние, по возможности опираясь лишь на модель динамики несжимаемой жидкости и теорию Лайтхилла.

Другой проблемой, заслуживающей внимания, является корректный учет высших членов мультипольного разложения звукового поля, порождаемого нестационарным движением вихрей. Принято считать, что асимметрия излучения связана лишь с конвекцией источников звука. Для прояснения этого вопроса из строгого результата Кроу [4] можно найти два члена разложения звукового поля по числу Маха, учитывающих явно как конвекцию вихря, так и отличие от нуля октупольного момента. В некоторых случаях (тонкие вихревые кольца) октупольный момент может значительно превосходить конвективный и, во всяком случае, должен учитываться вместе с ним. Указанные моменты важны с точки зрения корректного описания излучения звука таким объектом, как вихревое кольцо, которое будет рассмотрено авторами в дальнейшем.

Тщательный анализ уравнений Эйлера [4], проведенный с использованием метода сращиваемых асимптотических разложений, показывает, что в предположении малости $M$ и компактности вихря как источника звука ближнее и дальнее звуковое поле с точностью до членов $O(M^2)$ определяется решением неоднородного волнового уравнения

$$\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)p=\rho_0\frac{\partial^2 u_i^s u_j^s}{\partial x_i\,\partial x_j}, \tag{1}$$

где $u_i^s$ — соленоидальная часть полной скорости, $\rho_0$ и $c_0$ — постоянные плотность и скорость звука, $p=\rho c_0^2$ — акустическое давление, $\rho$ — возмущение плотности. Легко понять, что уравнение (1) не является акустической аналогией в смысле [1], так как соленоидальное поле скорости не является независимым, а определяется уравнениями $\operatorname{div}\mathbf{u}^s=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{u}^s=\mathbf{\Omega}$ и уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+\operatorname{rot}[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{u}^s]=-\operatorname{rot}[\boldsymbol{\Omega}, \nabla\varphi], \tag{2}$$

где $\nabla\varphi$ — потенциальная часть полной скорости, имеющая в ядре вихря порядок $\nabla\varphi=O(\mathbf{u}^s M^2)$, $\boldsymbol{\Omega}$ — завихренность. При равной нулю правой части в (2) эти уравнения описывают динамику поля скорости несжимаемой жидкости $\mathbf{v}$. Так как правая часть мала, то влияние сжимаемости на соленоидальное поле слабое и за не очень большие времена с той же степенью точности соленоидальные скорости в (1) можно заменить на несжимаемые $\mathbf{u}^s=\mathbf{v}(1+O(M^2))$, что приводит к известной аналогии Лайтхилла. Чтобы устранить возникающую неравномерность аналогии по времени, необходимо учесть обратное влияние излучаемого звука на порождающий его поток. Эта задача решается относительно просто в случаях, когда несжимаемое течение характеризуется дискретным спектром частот. Для этого нужно ввести в рассмотрение сохраняющиеся динамические переменные, такие как суммарные энергия, импульс, момент, являющиеся функционалами несжимаемого течения. Излучение звука всегда сопровождается потерей энергии, которая отбирается у несжимаемого течения, и, вообще говоря, потерей импульса и момента. Вычисляя поток соответствующей величины по известному в лайтхилловском приближении звуковому полю и составляя соответствующее уравнение баланса, можно приближенно учесть обратное влияние излучения звука на порождающий его поток. Эффективность такого подхода была продемонстрирована при объяснении физического механизма акустической неустойчивости вихря Кельвина [3, 5] и при рассмотрении распада системы излучающих точечных вихрей [6, 7]. Такой подход вообще чрезвычайно удобен при исследовании устойчивости любых стационарных вихрей в безграничной слабосжимаемой жидкости, возмущенное несжимаемое движение которых характеризуется дискретным набором действительных собственных частот $\omega_n$ и амплитудами возмущений $\varepsilon_n$ (такие вихри устойчивы в гидродинамическом смысле по отношению к рассматриваемым возмущениям). Особенность стационарных вихревых течений состоит в том, что для них справедлив вариационный принцип Арнольда [8]: стационарные состояния завихренной жидкости есть точки условного экстремума функционала кинетической энергии на множестве равнозавихренных течений. Поэтому в силу условия экстремальности для определения энергии возмущений $\Delta T$ (разности энергий возмущенного и стационарного течений) величины, квадратичной по возмущениям, достаточно лишь решения линеаризованной задачи. В качестве функционала, характеризующего течение, выбирается энергия возмущений $\Delta T_n$ отдельной гармоники. Так как при учете слабой сжимаемости компактный вихрь в своей эволюции проходит последовательность равнозавихренных состояний, то единственным параметром в $\Delta T_n$, который может изменяться под влиянием потерь энергии на излучение, будет амплитуда возмущения $\varepsilon_n$. Слабая сжимаемость, конечно, сказывается и на действительной частоте $\omega_n$. При учете излучения звука в правой части уравнения (2), если ее вычислять согласно теории Лайтхилла, появляются резонансные члены, которые приводят к действительным добавкам к частоте $\omega_n$. Этот сдвиг частоты, очевидно, пропорционален $M^2$ и мал по сравнению с $\omega_n$ (более подробно на его определении останавливаться не будем). Потери же энергии и изменения амплитуды возмущений $\varepsilon_n$ с точки зрения теории устойчивости более существенны. Они приводят к малым мнимым добавкам к частоте $\omega_n \to \omega_n + i\delta_n$, где знак $\delta_n$ определяет акустическую устойчивость или неустойчивость вихревого течения. Вследствие линейности возмущений эволюция каждой гармоники независима от остальных, и поэтому мнимая добавка $\delta_n$ находится из дифференциального уравнения $d(\Delta T_n)/dt=-W_n$, где $W_n$ — усредненная звуковая мощность, определяемая с помощью аналогии Лейтхилла для отдельной гармоники. Квадратичная зависимость $\Delta T_n$ и $W_n$ от амплитуды

$\varepsilon_n$ приводит для инкремента (декремента) к выражению

$$\delta_n = -W_n/2\Delta T_n. \tag{3}$$

Случай $\Delta T_n < 0$ соответствует акустически неустойчивым гармоникам, так как для создания и развития этих возмущений надо отбирать энергию у системы. При этом степень неустойчивости определяется скоростью отбора энергии, т. е. эффективностью данной гармоники как источника звука, а обратная величина $\tau = 1/\delta_n$ дает характерные времена справедливости акустической аналогии в таких задачах. Особо отметим, что вычисление инкрементов по формуле (3) основывается только на линейной динамике несжимаемой жидкости и потому может использоваться при исследовании устойчивости таких сравнительно сложных образований, как вихревые кольца, для которых точная постановка задачи в сжимаемой жидкости весьма затруднительна. Укажем здесь, что стационарные вихревые кольца соответствуют стационарному движению жидкости только в системе координат, движущейся вместе с кольцом. Поэтому при описанном выше исследовании вихревых колец необходимо пользоваться обобщением принципа Арнольда на случай движущихся сред [5].

Перейдем теперь к рассмотрению второго вопроса — определению поправок к главному члену звукового поля. У течений с кольцеобразными вихрями нестационарное движение часто происходит на фоне дрейфа всей вихревой системы с постоянной скоростью $\mathbf{V}_0$ («чехарда» вихревых колец, возмущения уединенного вихревого кольца). Повторяя с небольшими изменениями рассуждения Кроу, можно показать, что в этом случае звуковое поле за не очень большие времена с точностью до членов $O(M^2)$ определяется решением неоднородного конвективного волнового уравнения

$$\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{D^2}{Dt^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}\right)p = \rho_0 \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \equiv q(\boldsymbol{\xi}, t), \tag{4}$$

где $v_i$ — несжимаемое поле скорости, записанное в переменных $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{V}_0 t$, убывающее на бесконечности как $1/\xi^3$, $D/Dt \equiv \partial/\partial t - \mathbf{V}_0 \partial/\partial \boldsymbol{\xi}$. Указанная погрешность $O(M^2)$ позволяет, очевидно, получать только два члена в звуковом поле — главный ($\sim 1$) и следующий ($\sim M$). Однако акустическая аналогия в форме Лайтхилла (1) или (4) в отличие от альтернативных представлений Обермайера — Меринга или Пауэлла — Хоу [1] неудобна для решения модельных задач с локализованной завихренностью, так как звуковое поле, записанное в виде свертки источника $q$ с функцией Грина $G(\boldsymbol{\xi}, t)$, определяется интегралом по всему пространству. Поэтому преобразуем источник в правой части (4) к эквивалентному с точки зрения дальнего звукового поля, но локализованному по завихренности виду. Для этого источник $q(\boldsymbol{\xi}, t)$ представим в виде мультипольного разложения, удерживая только первые два не равных нулю члена.

Так как мультипольное разложение соответствует разложению источника по $\delta$-функциям и ее производным, рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J = \int q(\boldsymbol{\xi}, t) f(\boldsymbol{\xi})\, d^3\xi, \tag{5}$$

где $f(\boldsymbol{\xi})$ — произвольная пробная функция, убывающая на бесконечности. Перепишем $q$ тождественно в виде

$$q(\boldsymbol{\xi}, t) = \rho_0 \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \rho_0 \frac{\partial L_i}{\partial \xi_i} + \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}\left(\frac{v^2}{2}\right), \quad \mathbf{L} = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}].$$

Такая запись, явно выделяющая вихревой диполь Пауэлла, удобна для сравнения различных представлений источника. Перебрасывая производные по координатам в $q$ на пробную функцию $f(\boldsymbol{\xi})$ под интегралом (5) и пользуясь обращением в нуль возникающих при этом поверхностных интегралов, получим

$$J=-\rho_0\int L_i\frac{\partial f}{\partial\xi_i}d^3\xi+\rho_0\int\frac{v^2}{2}\delta_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}d^3\xi, \tag{6}$$

где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. Подставляя в (6) разложения

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi_i}=\frac{\partial f(0)}{\partial\xi_i}+\xi_j\frac{\partial^2 f(0)}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}+\frac{\xi_k\xi_j}{2}\frac{\partial^3 f(0)}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j\,\partial\xi_k}+\ldots,$$

$$\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}=\frac{\partial^2 f(0)}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}+\xi_k\frac{\partial^3 f(0)}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j\,\partial\xi_k}+\ldots,$$

в которых символами $\partial f(0)/\partial\xi_i$ обозначены соответствующие производные от функции $f$ в нуле, будем иметь

$$J=-\frac{\partial f(0)}{\partial\xi_i}K_i(t)+\frac{\partial^2 f(0)}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}Q_{ij}(t)-\frac{\partial^3 f(0)}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j\,\partial\xi_k}D_{ijk}(t)+\ldots, \tag{7}$$

где

$$K_i(t)=\rho_0\int L_i\,d^3\xi, \tag{8}$$

$$Q_{ij}(t)=-\rho_0\int\left(L_i\xi_j-\delta_{ij}\frac{v^2}{2}\right)d^3\xi, \tag{9}$$

$$D_{ijk}(t)=\frac{\rho_0}{2}\int(L_i\xi_j\xi_k-\delta_{ij}\xi_k v^2)\,d^3\xi. \tag{10}$$

В выражении (7) пространственные производные в нуле от пробной функции $f$ соответствуют производным от $\delta$-функции в разложении источника $q$, а величины $K_i$, $Q_{ij}$, $D_{ijk}$ определяют соответствующие мультипольные моменты — дипольный, квадрупольный, октупольный и т. д., именно

$$q(\xi,t)=\frac{\partial}{\partial\xi_i}[\delta^3(\xi)K_i(t)]+\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}[\delta^3(\xi)Q_{ij}(t)]+$$
$$+\frac{\partial^3}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j\,\partial\xi_k}[\delta^3(\xi)D_{ijk}(t)]. \tag{11}$$

Рассмотрим дипольный момент $K_i$ (8). С использованием векторного тождества

$$L_i=\frac{\partial v_i v_j}{\partial\xi_j}-\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial\xi_i}-v_i\frac{\partial v_j}{\partial\xi_j}, \tag{12}$$

сразу получим, что $K_i=0$. Действительно, первые два члена, будучи преобразованными в интегралы по поверхности, обращаются в нуль ввиду малости $\mathbf{v}$ на бесконечности, третий равен нулю, так как $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$.

Легко показать, что каждая дополнительная производная по координате в (11) приводит к дополнительной степени числа Маха при вычислении звукового поля, а так как дипольный момент $K_i=0$, то квадрупольный и октупольный моменты (9) и (10) дают соответственно главный и следующий по числу $M$ вклад в звуковое поле, не выходящий за пределы ошибки $O(M^2)$ уравнения (4).

Рассмотрим квадрупольный момент $Q_{ij}(t)$. Легко понять, что $Q_{ij}$ определяется только пауэлловской частью источника, т. е. первым членом в интеграле (9), так как второй представляет собой сохраняющуюся величину — кинетическую энергию несжимаемой жидкости и, следовательно, не имеет отношения к звуку. С учетом сохраняющихся величин несжимаемой жидкости можно представить $Q_{ij}$ в еще более удобной форме (Приложение), приводящей к аналогии Обермайера — Меринга

$$Q_{ij}(t)=\frac{\rho_0}{3}\frac{d}{dt}\int[\xi,\Omega]_i\xi_j\,d^3\xi. \tag{13}$$

Рассмотрим октупольный момент $D_{ijk}$ (10). Первая часть $D_{ijk}$, определяемая источником Пауэлла, уже записана в локализованной по завихренности форме. Преобразуем вторую часть, используя тензорное тождество

$$L_i\xi_j\xi_k = \frac{\partial(v_n v_i \xi_j \xi_k)}{\partial \xi_n} - \frac{1}{2}\frac{\partial(v^2\xi_j\xi_k)}{\partial\xi_i} - v_i v_j \xi_k -$$

$$- v_i v_k \xi_j + \frac{1}{2}\delta_{ij} v^2 \xi_k + \frac{1}{2}\delta_{ik} v^2 \xi_j. \qquad (14)$$

Сворачивая тождество (14) по очереди с $\delta_{ij}$ и $\delta_{jk}$ и интегрируя по всему пространству, с учетом обращения в нуль возникающих от производных поверхностных интегралов получим два равенства $\int \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{L})\, d^3\xi =$
$= -\int \mathbf{v}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi})\, d^3\xi + \int v^2 \boldsymbol{\xi}\, d^2\xi,\quad \int \mathbf{L}\xi^2\, d^3\xi = -2\int \mathbf{v}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi})\, d^3\xi + \int v^2 \boldsymbol{\xi}\, d^3\xi,\quad \xi = |\boldsymbol{\xi}|.$
Вычитая из второго равенства удвоенное первое и подставляя в (10), получим

$$D_{ijk} = \frac{\rho_0}{2}\int [L_i\xi_j\xi_k + \delta_{ij} L_k \xi^2 - 2\delta_{ij}\xi_k(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{L})]\, d^3\xi. \qquad (15)$$

Интегрирование в (14) идет теперь только по области, где отлична от нуля завихренность.

Решение уравнения (4) представляет собой свертку источника (7) с функцией Грина $G(\boldsymbol{\xi}, t)$ конвективного волнового оператора

$$p = \int q(\boldsymbol{\xi}', t')\, G(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}', t - t')\, d^3\xi'\, dt'. \qquad (16)$$

Для функции Грина справедливо выражение [9]

$$G(\boldsymbol{\xi}, t) = \delta\left(t - \frac{R_p}{c_0}\right) \Big/ 4\pi R^*, \qquad (17)$$

где $R_p = (1 - M_0^2) = (\mathbf{M}_0, \ \boldsymbol{\xi}) + R^*$, $R^* = [\xi^2(1 - M_0^2) + (\mathbf{M}_0, \ \boldsymbol{\xi})^2]^{1/2}$, $\mathbf{M}_0 = \mathbf{V}_0/c_0$. С учетом (11) и (17) интеграл свертки (16), определяющий звуковое поле, легко записывается в виде

$$p = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\frac{Q_{ij}(t - R_p/c_0)}{R^*} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^3}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j\,\partial\xi_k}\frac{D_{ijk}(t - R_p/c_0)}{R^*} + \ldots \qquad (18)$$

где $Q_{ij}$ и $D_{ijk}$ определяются формулами (13) и (15) соответственно. Для правильного определения дальнего звукового поля в (18) достаточно дифференцировать только фазу $t - R_p/c_0$, что дает

$$p = \frac{\ddot{Q}_{ij}(t - R_p/c_0)}{4\pi c_0^2 R^*}\frac{\partial R_p}{\partial\xi_i}\frac{\partial R_p}{\partial\xi_j} - \frac{\dddot{D}_{ijk}(t - R_p/c_0)}{4\pi c_0^3 R^*}\frac{\partial R_p}{\partial\xi_i}\frac{\partial R_p}{\partial\xi_j}\frac{\partial R_p}{\partial\xi_k} + \ldots$$

Приведем следующие оценки: $D_{ijk} \sim l\omega \dot{Q}_{ij}$, где $l$ и $\omega$ — характерные размер и частота вихря $l\omega/c_0 \sim M$, $1/R^* = (1/\xi)(1 + O(M^2))$, $\partial R_p/\partial\xi_i = \xi_i/\xi + M_{0i} +$ $+ O(M^2)$. Следовательно, с точностью до членов $O(M^2)$ звуковое поле определяется выражением

$$p = \frac{[\ddot{Q}_{ij}]}{4\pi c_0^2 \xi}\frac{\xi_i\xi_j}{\xi^2} + \frac{[\ddot{Q}_{ij}]}{4\pi c_0^2 \xi}\frac{M_{0j}\xi_i + M_{0i}\xi_j}{\xi} - \frac{[\dddot{D}_{ijk}]}{4\pi c_0^3 \xi}\frac{\xi_i\xi_j\xi_k}{\xi^3}. \qquad (19)$$

Анализ, проведенный при выводе (19), выявил разницу в альтернативных представлениях источников (она существенна при вычислении $D_{ijk}$), поэтому согласование различных подходов возможно лишь в главном по числу $M$ приближении. Эта разница явилась результатом того, что аналогия Лайтхилла в форме (1) или (4) получена без учета членов $O(M^2)$ в звуковом поле, в то время как другие аналогии получены формальным отбрасыванием членов $O(M^2)$ в исходном уравнении без учета их мультипольной структуры и потому они оказались справедливыми лишь в главном по числу $M$ приближении.

**Приложение**

Покажем, что $Q_{ij}$ (9) можно тождественно представить в виде

$$Q_{ij}(t)=\frac{\rho_0}{3}\frac{d}{dt}\int[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Omega}]_i\xi_j\,d^3\xi+A_{ij}, \qquad (\text{П}.1)$$

где $A_{ij}=\frac{2}{3}\delta_{ij}T+\frac{\rho_0}{3}\delta_{ij}V_{0k}\int[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Omega}]_k\,d^3\xi-\rho_0\int[\boldsymbol{\Omega},\mathbf{V}_0]_i\xi_j\,d^3\xi$ – постоянный тензор, не имеющий, следовательно, отношения к звуку. Уравнение Гельмгольца в системе координат $\boldsymbol{\xi}$ имеет вид

$$\partial\Omega_i/\partial t=-\varepsilon_{ijk}(\partial/\partial\xi_j)(L_k-L_{0k}), \qquad (\text{П}.2)$$

где $\varepsilon_{ijk}$ – символ Леви-Чивита, $\mathbf{L}_0=[\boldsymbol{\Omega},\mathbf{V}_0]$. С его помощью нетрудно получить равенство

$$\frac{d}{dt}\int[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Omega}]_i\xi_j\,d^3\xi=\int\left[\frac{\partial(L_i-L_{0i})\xi_j\xi_k}{\partial\xi_k}-\frac{\partial(L_k-L_{0k})\xi_j\xi_k}{\partial\xi_i}\right]d^3\xi-$$

$$-3\int L_i\xi_j\,d^3\xi+3\int L_{0i}\xi_j\,d^3\xi-\delta_{ij}\int(\boldsymbol{\xi},\mathbf{L}_0)\,d^3\xi+\delta_{ij}\int(\boldsymbol{\xi},\mathbf{L})\,d^3\xi. \qquad (\text{П}.3)$$

Первый интеграл в правой части, будучи преобразованным в интеграл по поверхности, обращается в нуль из-за обращения $\mathbf{L}$ в нуль вне области вихря. Последний интеграл с помощью тождества

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}(v_iv_j\xi_j)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi_i}(v^2\xi_i)-\frac{v^2}{2}+(\boldsymbol{\xi},\mathbf{L})$$

легко преобразуется в интеграл, определяющий кинетическую энергию жидкости $T/\rho_0$. Подставляя теперь (П.3) в (9), сразу получим (П.1). Покажем, что тензор $A_{ij}$ постоянен. Действительно, первый член в $A_{ij}$ есть интеграл движения, а второй и третий состоят из слагаемых вида $\int\Omega_i\xi_j d^3\xi$, умноженных на соответствующие компоненты постоянной скорости $\mathbf{V}_0$. С учетом (П.2) имеем равенство

$$\frac{d}{dt}\int\Omega_i\xi_j\,d^3\xi=-\varepsilon_{imn}\int\frac{\partial(L_n-L_{0n})\xi_j}{\partial\xi_m}d^3\xi+\varepsilon_{ijn}\int L_n\,d^3\xi-\varepsilon_{ijn}\int L_{0n}\,d^3\xi.$$

Все три члена в правой части этого равенства обращаются в нуль: первый после преобразования в интеграл по поверхности, второй и третий в силу тождества (12) и очевидного для компактных вихрей соотношения $\int\boldsymbol{\Omega}d^3\xi=0$. Поэтому $\int\Omega_i\xi_jd^3\xi=$ $=$const, а $A_{ij}$ – постоянный тензор.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Крайтон Д.* Акустика как ветвь гидромеханики.– В кн.: Современная гидродинамика: успехи и проблемы/Под ред. Бэтчелора Дж. и Моффата Г. М.: Мир, 1984. с. 359–412.
2. *Broadbent E. G., Moore D. W.* Acoustic destabilisation of vortises.– Phil. Trans. Roy. Soc., 1979, A. 290, p. 353–371.
3. *Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А.* Об акустической неустойчивости аксиального вихря.– Акуст. журн., 1983, т. 29, № 2, с. 192–198.
4. *Crow S. C.* Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem.– Stud. Appl. Math., 1970, v. 49, № 1, p. 21–44.
5. *Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А.* Энергетический аспект акустической неустойчивости некоторых стационарных вихрей.– Акуст. журн., 1985, т. 31, № 3, с. 348–352.
6. *Кляцкин В. И.* Излучение звука системой вихрей.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 6, с. 87–92.
7. *Грячик В. М.* Излучение звука линейными вихревыми нитями.– Изв. АН СССР. ФАО, 1983, т. 19, № 2, с. 203–205.
8. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
9. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.



Поступила в редакцию
4.IV.1985