АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXII 1986 Вып. 2

УДК 534.121.1

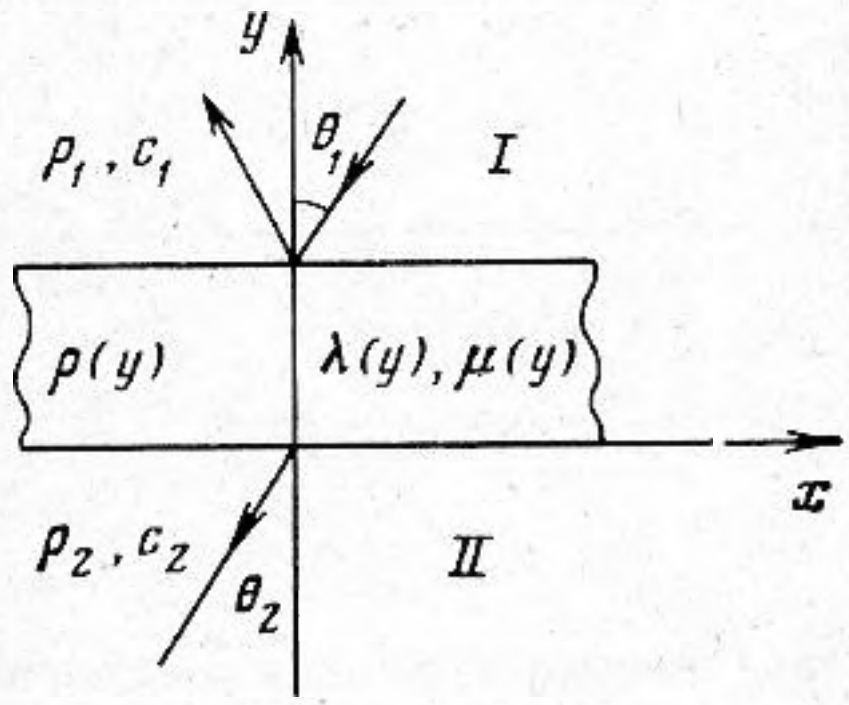
# РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ОТ ТВЕРДЫХ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

*Приходько В. Ю., Тютекин В. В.*

Реализован на ЭВМ импедансный метод расчета характеристик упругих волн в непрерывно-слоистых твердых средах. Показано, что этот метод математически эквивалентен дифференциальной ортогональной прогонке. Рассчитаны коэффициенты отражения звуковых волн от твердых слоев и полупространств с переменными материальными параметрами.

Дифракция звуковых волн на неоднородных телах является одной из малоисследованных проблем акустики. Трудности исследования этой проблемы связаны прежде всего с необходимостью решения динамических уравнений движения твердых сред.

В настоящее время имеются работы, дающие асимптотические оценки решений уравнений движения в области низких и высоких частот [1, 2]. В промежуточной области частот решения уравнений теории упругости могут быть получены различными численными методами при помощи ЭВМ. Ниже будет рассмотрена численная реализация импедансного метода, являющегося вариантом дифференциальной ортогональной прогонки [3].




Фиг. 1

Импедансный метод расчета различных волновых характеристик твердых слоистых сред предложен в работах [4—7]. Суть метода состоит в замене исходной краевой задачи математической физики соответствующей задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При численном решении полученных задач Коши на ЭВМ возникают две основные проблемы: неограниченное возрастание компонент тензора импедансов в определенных точках отрезка интегрирования и неустойчивость задачи Коши для тензора импедансов относительно малых изменений коэффициентов уравнений и граничных условий. Эти проблемы в ряде физических задач могут быть преодолены путем учета поглощения в твердом теле, описываемом комплексными значениями плотности материала или модуля Юнга. Другой путь решения указанных проблем состоит в преобразовании задачи Коши для тензора импедансов в задачу Коши для унитарной матрицы типа матрицы рассеяния. Таким путем в настоящей работе производится расчет коэффициента отражения от плоского неоднородного слоя.

Пусть из акустической среды I под углом $\theta$ на твердый слой падает звуковая волна давления (фиг. 1) $p=\exp[ik_1(x\sin\theta-y\cos\theta)]$. Требуется найти отраженную $p_r=R\exp[ik_1(x\sin\theta+y\cos\theta)]$ и прошедшую в акустическую среду II $p_w=W\exp[ik_2(x\sin\theta-y\cos\theta]$ звуковые волны. Здесь $R$ — коэффициент отражения, $W$ — коэффициент прохождения, $k_i=\omega/c_i$, $c_i$ — скорости звука в акустических средах $i=1, 2$. Параметры Ляме $\lambda$ и $\mu$, плотность материала слоя $\rho$ зависят от поперечной координаты $y$.

Коэффициент отражения можно выразить через значения тензора импедансов в следующем виде:

$$R=\exp(-2ik_1h\cos\theta)\,(\Delta_z-1)/(\Delta_z+1), \tag{1}$$

где $\Delta_z=ik_1\cos\theta/(\rho_1\omega^2z_{11})\det\|z\|\|_{y=h}$. Здесь тензор импедансов $z=\|z_{ij}\|$, $\boldsymbol{\sigma}_n=z\mathbf{u}$ связывает вектор нормальных напряжений $\boldsymbol{\sigma}_n=(\sigma_{xy},\ \sigma_{yy})$ и вектор смещений $\mathbf{u}=(u_x,\ u_y)$ в твердом слое. Тензор импедансов удовлетворяет матричному уравнению Рикатти

$$z'+z\Lambda z+Sz+zQ+P=0. \tag{2}$$

Здесь $\Lambda$, $S$, $Q$, $P$ $(2\times2)$-матрицы

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\mu^{-1} & 0\\ 0 & (\lambda+2\mu)^{-1}\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}0 & -ik\\ -ik\lambda/(\lambda+2\mu) & 0\end{pmatrix},$$

$$P_{11}=\rho\omega^2-4\mu k^2(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu),\quad P_{22}=\rho\omega^2,\quad P_{21}=P_{12}=0,$$

$S=Q^*$, $Q^*$ — эрмитово-сопряженная матрица, $k=k_1\sin\theta$.

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (2) находятся из условия непрерывности нормальных напряжений и смещений на границе акустической среды и твердого слоя

$$z(0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \rho_2\omega^2/ik_2\cos\theta\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для устранения неограниченного возрастания элементов матрицы импедансов на отрезке интегрирования введем вспомогательную матрицу [3]

$$V=(z+i\beta E)^{-1}(i\beta E-z). \tag{4}$$

Здесь $\beta=\mu(0)k_{t0}$, $k_{t0}^2=\rho(0)\omega^2/\mu(0)$, $E$ — единичная матрица.

Преобразование (4) является матричным аналогом подстановки Прюффера [3, 8]. В отличие от скалярного случая не удается получить дифференциальные уравнения для фазовой матрицы $\Phi$, которая связана с тензором импедансов соотношением

$$z=\operatorname{tg}\Phi. \tag{5}$$

Используя формулы (4, 5), легко получить связь между фазовой матрицей и матрицей $V=\exp(2i\Phi)$, а также дифференциальные уравнения для $V$:

$$V'+\frac{i}{2}[(V-E)\Lambda(E-V)-i(V-E)Q(V+E)+$$
$$+i(V+E)S(E-V)+(V+E)P(V+E)]=0. \tag{6}$$

Начальные условия (3) преобразованием (4) приводятся к виду

$$V(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1+\tilde z)/(1-\tilde z)\end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\tilde z=\rho_2c_2/(\rho(0)c_t(0)\cos\theta).$$

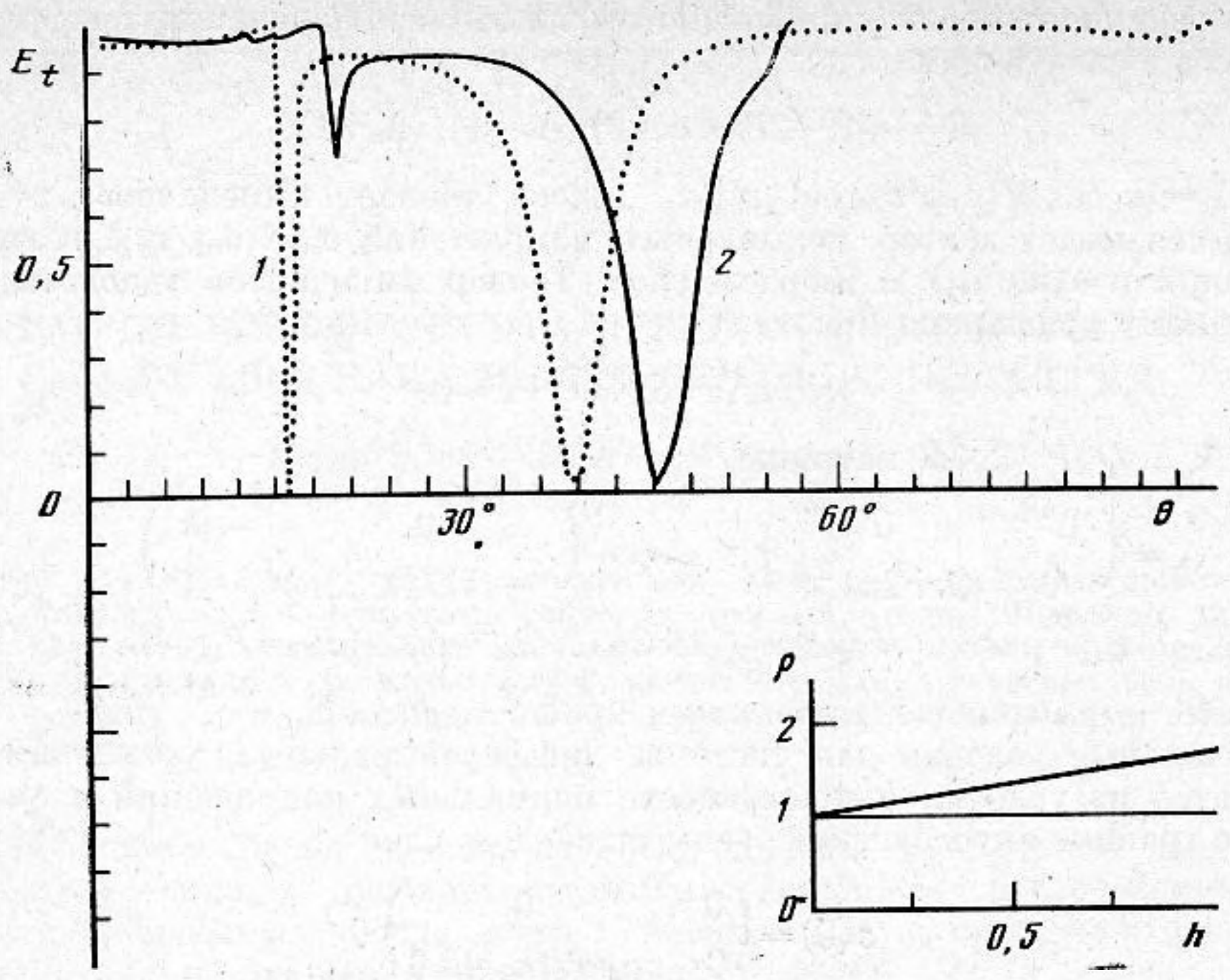
Таким образом, процедура вычисления коэффициента отражения звуковой волны от твердого неоднородного слоя сведена к интегрированию на отрезке $[0,\ h]$ задачи Коши (6, 7), вычислению тензора импедансов в точке $y=h$ по формуле

$$z(h)=i\beta(E-V)(E+V)^{-1} \tag{8}$$

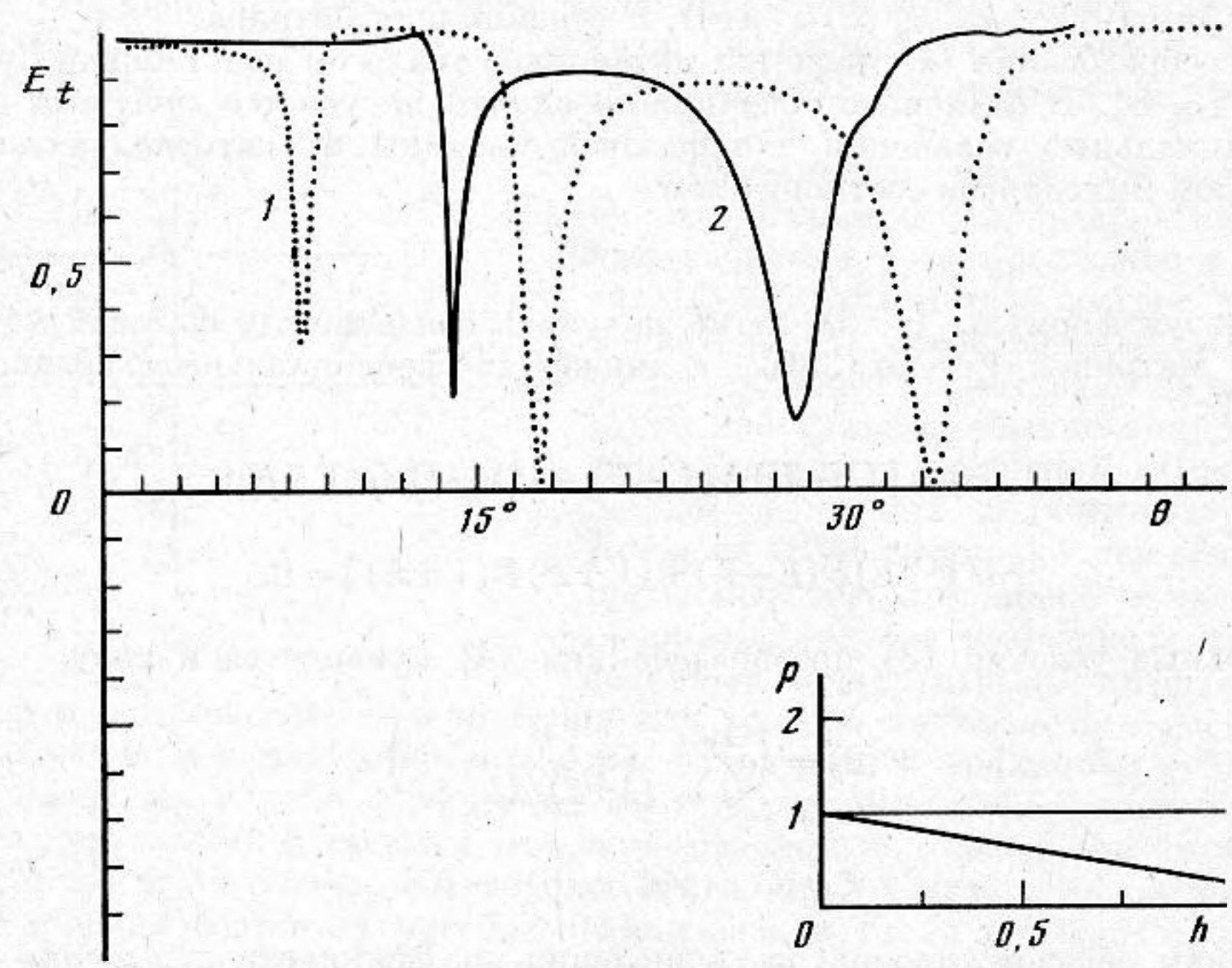
и подстановке $z$ в (1).

Отметим два основных преимущества рассмотренного выше метода.

Задача Коши (6, 7) в отличие от задачи (2, 3) является устойчивой относительно малых изменений коэффициентов уравнений и граничных условий. Устойчивость следует из эрмитовости начальных значений для




Фиг. 2. Угловая зависимость коэффициента отражения звуковой волны от твердого слоя: *1* – однородный слой с параметрами $c_l=6260$ м/с, $c_t=3080$ м/с, $\rho=2{,}7\cdot10^3$ кг/м$^3$; *2* – неоднородный слой с переменной плотностью $\rho(y)=\rho(1+2y/3h)$ $k_fh=4{,}35$

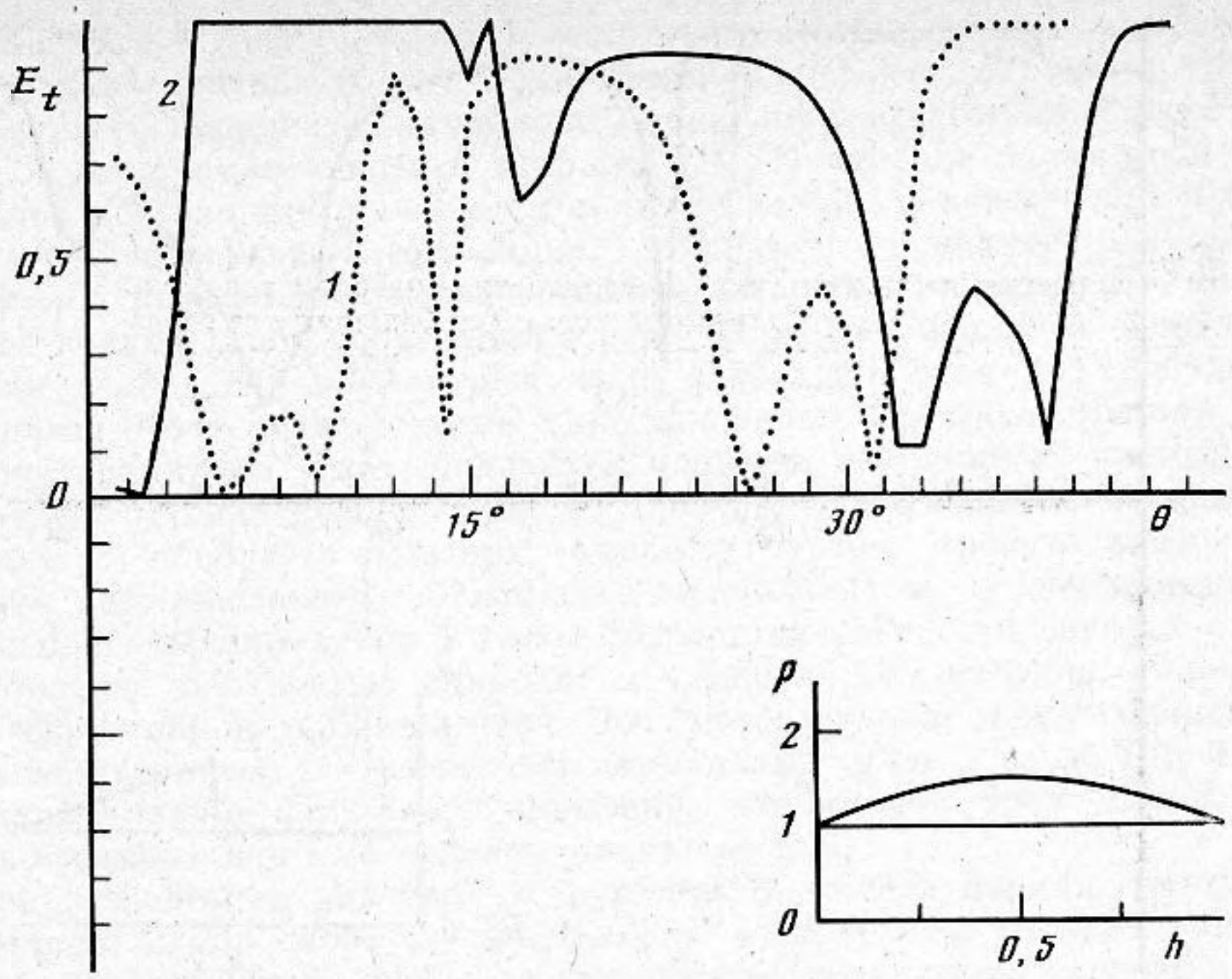



Фиг. 3. То же, что на фиг. 2, при $\rho(y)=\rho(1-2y/3h)$ $k_fh=8$

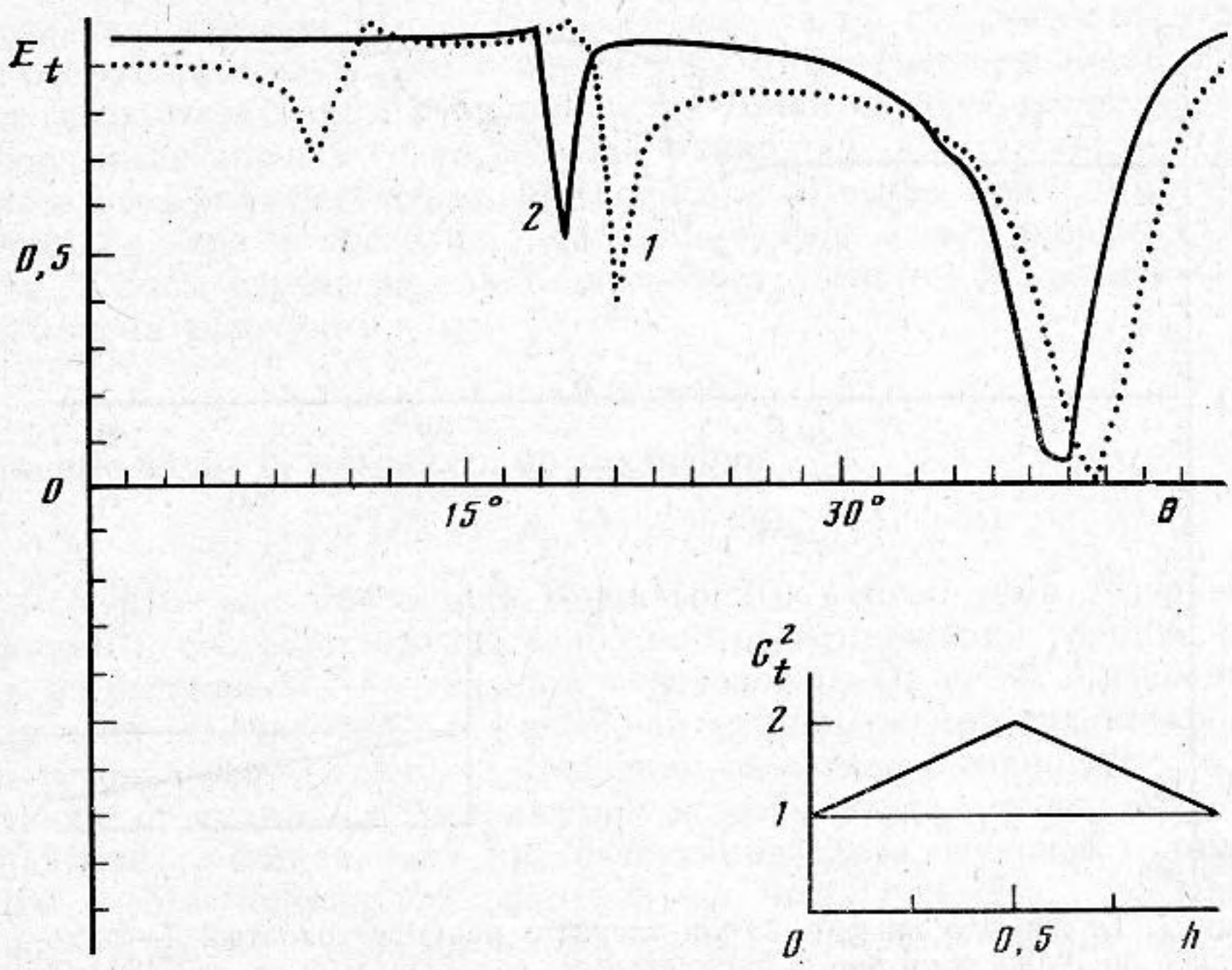
тензора импедансов и унитарности матрицы $V$ на отрезке интегрирования [3]:

$$V(0)\,V^*(0)=V(y)\,V^*(y), \quad \forall y\in[0,\ h]. \tag{9}$$

Тождество (9) гарантирует плавное поведение решения $V(y)$ на всем отрезке интегрирования, что позволяет использовать для решения задачи Коши на ЭВМ стандартные программы интегрирования методом Рунге – Кутта.

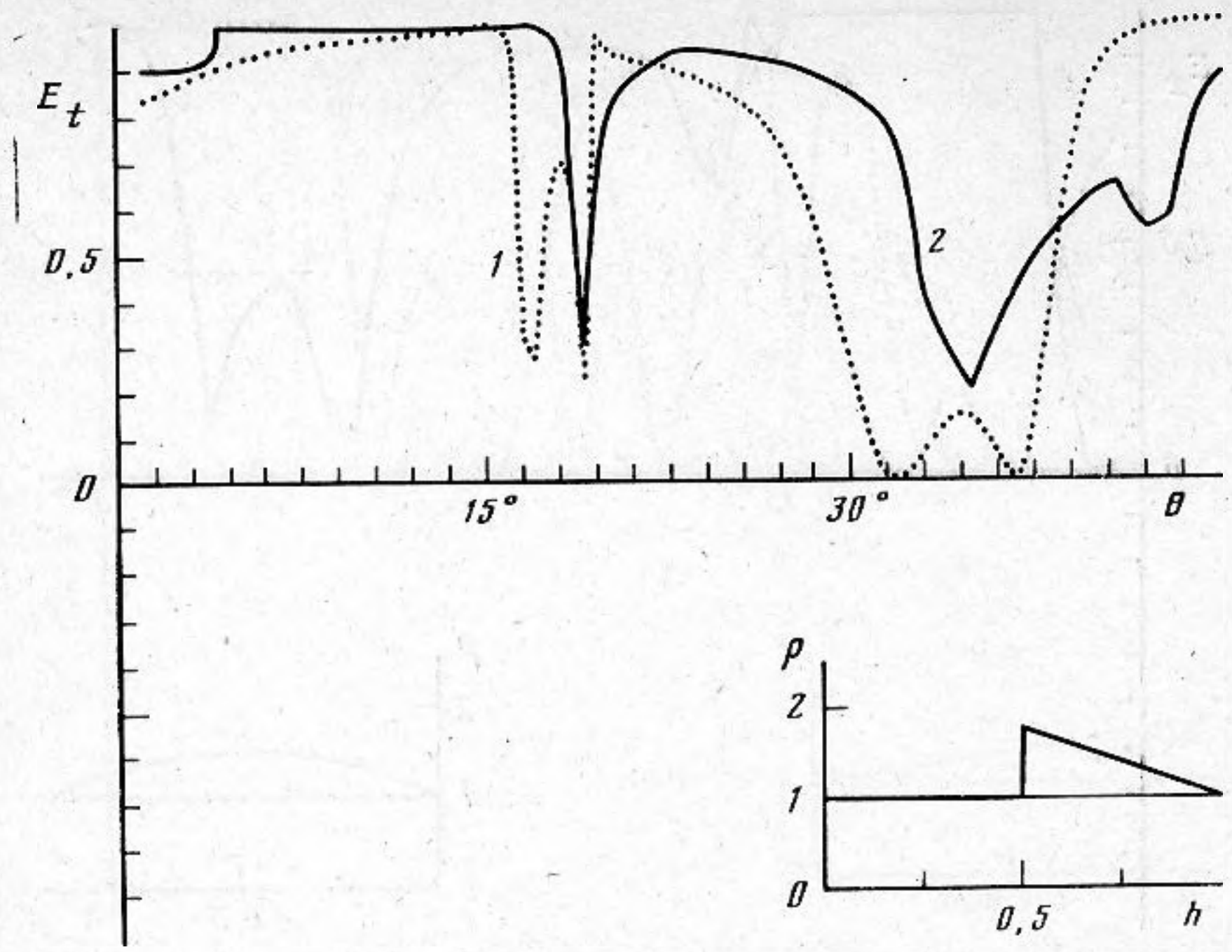



Фиг. 4. То же, что на фиг. 2, при $\rho(y)=\rho\left[2\left(y/h-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$
$k_t h=12{,}35$

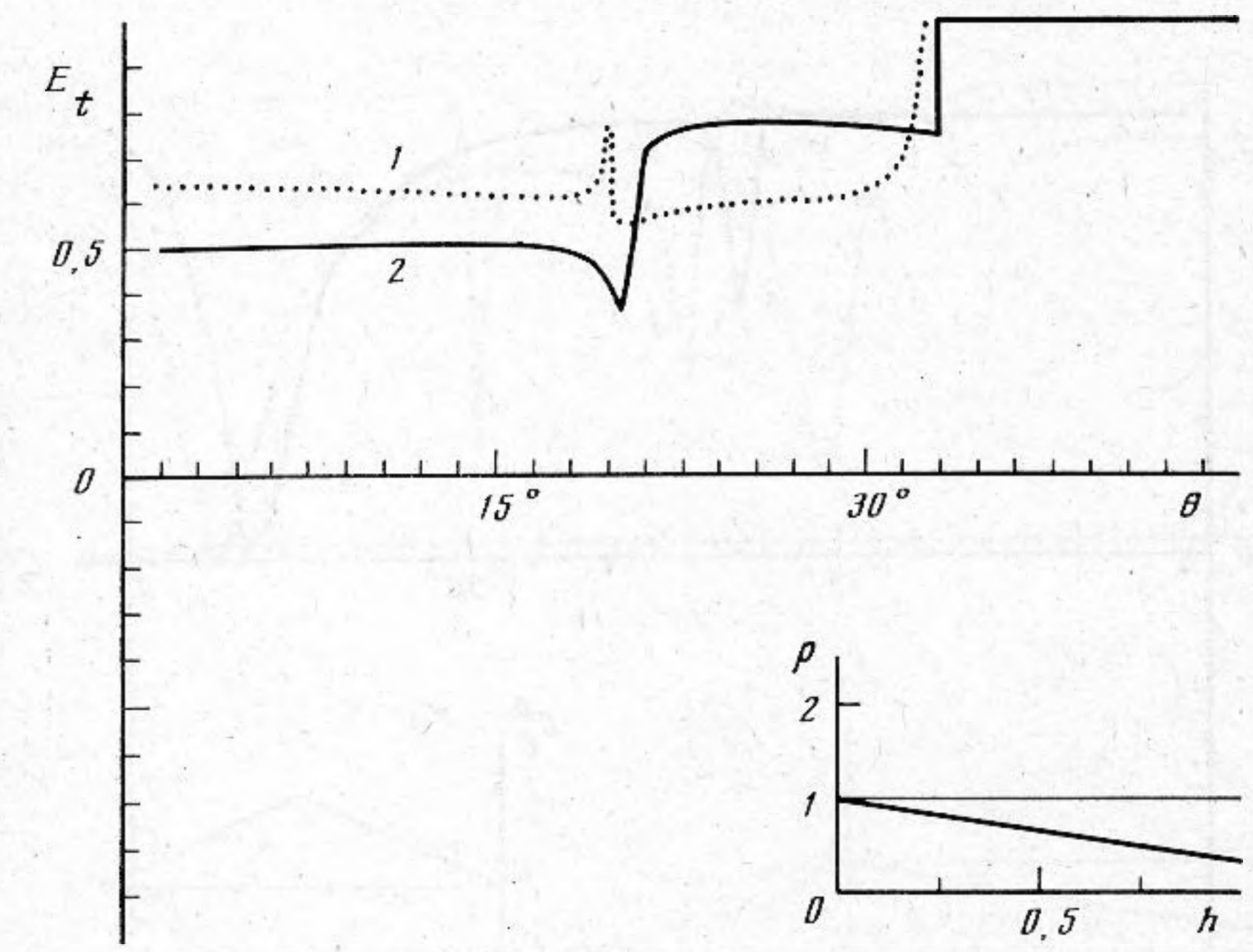



Фиг. 5. То же, что на фиг. 2, при $c_l=4350$ м/с, $c_t=2718$ м/с, $\rho=3\cdot10^3$ кг/м$^3$; плотность постоянна $\rho(y)=\rho$, переменные $c_l(y)$ и $c_t(y)$
$k_t h=7$

Расчет коэффициента отражения фактически сведен к «прямой» прогонке для матричного уравнения Рикатти. При необходимости вычисления полевых функций смещений и тензора напряжений в твердом слое производится «обратная» прогонка по формулам, приведенным в работе [7].




Фиг. 6. То же, что на фиг. 5, при постоянных коэффициентах Ляме и переменной плотности $k_l h=11$




Фиг. 7. То же, что на фиг. 2, для твердого полупространства: *1* – однородное полупространство с параметрами $c_{l1}=4350$ м/с, $c_{t1}=2718$ м/с, $\rho_1=3\cdot10^3$ кг/м$^3$; *2* – неоднородный слой с параметрами $c_l(0)=1350$ м/с, $c_t(0)=650$ м/с, $\rho(0)=1{,}24\cdot10^3$ кг/м$^3$, $\rho(y)=\rho(0)(1-2y/3h)$, $\mu(y)=\mu(0)(1+2y/3h)$, лежат на вышеописанном однородном полупространстве $k_l h=9$.

Ниже приведены результаты численной реализации на ЭВМ описанного выше метода расчета коэффициента отражения по энергии $E_t=|R|^2$ в зависимости от угла падения θ. В правом нижнем углу фиг. 2–7 изображены зависимости плотности ρ и коэффициента Ляме μ твердого слоя от координаты $y$. Прямые линии соответствуют постоянным значениям ρ и μ. Графики для $E_t$ в случае постоянных параметров твердого слоя,

находящегося в воде ($c_1=c_2=c_f$), получены интегрированием задачи Коши (6, 7), эквивалентной восьми обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка, и находятся в хорошем соответствии с теоретическими и экспериментальными данными [9]. Изменение параметров твердого слоя по толщине приводит к количественным и качественным изменениям характеристик рассеяния. Например, существенные сдвиги минимумов коэффициента отражения при плавных изменениях $\rho$, $\lambda$ и $\mu$ возникают вблизи углов совпадения следа падающей волны с волновыми числами лэмбовских нормальных волн в твердом слое со свободными границами. Это явление заметно даже для малых ($k_f h \simeq 0{,}5$) толщин слоя. В то же время при углах, близких к нормали, величина $E_t$ практически не зависит от вида неоднородностей (фиг. 2, 3). Смещение минимумов функции $E_t$ в области больших (меньших) углов, происходящее из-за влияния неоднородности, объясняется уменьшением (увеличением) интегральной скорости звука в слое. Возрастание скорости звука в слое с неоднородной плотностью приводит к уменьшению значения «усредненной» эффективной толщины слоя. Это обстоятельство может привести к уменьшению числа возбуждаемых нормальных волн в слое. Такой случай иллюстрирует фиг. 3, где показано, что вместо трех нормальных волн в неоднородном слое существуют только две.

При возрастании значений $h$ функция $E_t$ вблизи нормали также отличается от однородного случая. На фиг. 4 изображен тип неоднородности, придающий слою свойство, аналогичное однородному слою вблизи полуволнового резонанса.

Важной особенностью рассматриваемого метода является возможность расчета характеристик рассеяния звуковых волн от твердых сред с материальными параметрами, описываемыми функциями с разрывами первого рода (фиг. 6). Математическая корректность решения таких задач обусловливается тем, что в процессе расчета не используются производные от функций плотности и параметров Ляме. Непрерывность и унитарность соответствующих решений задач Коши следует из непрерывности тензора импедансов в точке разрыва функций $\lambda$, $\mu$, $\rho$. Отметим, что метод расчета коэффициента отражения, описанный выше, применим также для расчета спектра лэмбовских нормальных волн в неоднородных твердых слоях. В этом случае задача Коши задается системой уравнений (6) и начальными условиями

$$V(0)=E. \tag{10}$$

Волновые числа $k_L$ находятся из уравнения

$$\det\|(E-V(h,\,k))\,(E+V(h,\,k))^{-1}\|=0, \tag{11}$$

где $V(h,\,k)$ — решение задачи Коши (6, 10) в точке $y=h$. Начальные условия (10), соответствующие свободной от напряжений границе, получаются из условий (7) предельным переходом $\rho_2\to 0$, $c_2\to 0$. Уравнение (11) следует из (8), так как для свободной от напряжений границы выполняется условие $\det\|z(h,\,k)\|=0$. Значения лэмбовских волновых чисел можно также определить по минимумам коэффициента отражения (резонанс совпадений), возникающих при совпадении следа звуковой волны с волновым числом нормальной волны $k_{Li}=k_f\sin\theta_i$, $i=1,\,2,\ldots\,n$. Например, на фиг. 2 имеются два минимума ($n=2$), соответствующие продольным и изгибным (нулевым симметричным и антисимметричным) нормальным волнам. При увеличении $k_1 h$ число волн возрастает (фиг. 3—6).

Аналогично решается задача об отражении звуковой волны от неоднородного полупространства, которое можно моделировать системой «неоднородный слой на однородном полупространстве». В этом случае среда II (фиг. 1) характеризуется параметрами Ляме $\lambda_2$, $\mu_2$ и плотностью $\rho_2$. Начальные условия для соответствующей задачи Коши имеют вид

$$V(0)=(z_p+i\beta E)^{-1}(i\beta E-z_p). \tag{12}$$

Здесь $z_p$ — тензор характеристических импедансов однородного полупро-

странства

$$z_p=\frac{\mu_2 k_{t2}^2}{q}\begin{pmatrix} q_l & ik(1+2q/k_{t2}^2) \\ -ik(1+2q/k_{t2}^2) & q_t \end{pmatrix}$$

$q_l^2=k^2-k_{l2}^2$, $q_t^2=k^2-k_{t2}^2$, $q=q_l q_t-k^2$, $k_{l2}^2=\rho_2\omega^2/(\lambda_2+2\mu_2)$, $k_{t2}^2=\rho_2\omega^2/\mu_2$, $k=k_1\sin\theta$. Так как матрица $z_p$ — эрмитова, то решение задачи Коши (6, 12) является унитарной матрицей. Решение задачи Коши (6, 12) получено при помощи ЭВМ методом Рунге — Кутта и использовано для расчета коэффициента отражения от неоднородного полупространства (фиг. 7).

В заключение отметим, что расчет характеристик рассеяния звуковых волн от акустических непрерывно-слоистых сред, основанный на методе скалярных импедансов, является частным случаем рассмотренного выше метода. Чтобы получить соответствующие задачи Коши для акустических сред, достаточно в формулах (1)—(6) осуществить предельный переход при $\mu\to 0$, $c_t\to c_f$, $\rho\to\rho_f$. Тогда физические свойства твердого неоднородного слоя становятся адекватными акустическому неоднородному слою с переменной плотностью и скоростью звука. Аналогами уравнений движения твердой среды в напряжениях и закона Гука в акустическом случае являются уравнение Эйлера и уравнение неразрывности соответственно. Как в твердых, так и в акустических средах эти уравнения не имеют производных от функций, описывающих материальные свойства сред. Тензор напряжений в акустической среде имеет диагональный вид $\sigma_{ii}=-p$, а тензор импедансов имеет единственную отличную от нуля компоненту $z_{22}$, удовлетворяющую уравнению

$$z_{22}'+\frac{i\omega}{\rho_f}\left(\frac{1}{c_f^2}-\frac{\sin^2\theta}{c_1^2}\right)z_{22}^2-i\omega\rho_f=0.$$

Начальные условия в случае задачи отражения имеют вид

$$z_{22}(0)=-\rho_f(0)\,c_f(0)/\cos\theta. \tag{13}$$

Коэффициент отражения от слоя выражается через решение задач Коши в виде обычных формул Френеля:

$$R=\exp(-2ik_1h\cos\theta)\,(\tilde z(h)-1)/(\tilde z(h)+1),\quad \tilde z(h)=$$
$$=z_{22}(h)\cos\theta/\rho_f(0)\,c_f(0). \tag{14}$$

Хорошо изученные устойчивые задачи Коши [8—10] получаются из (13), (14) при преобразовании (5), где $\Phi$ — скалярная фазовая функция, удовлетворяющая уравнению $\Phi'+i/\rho_f c_f(\omega/c_f-k_1\sin\theta)\sin^2\Phi-i\omega\rho_f\cos^2\Phi=0$, и начальному условию $\Phi(0)=-\mathrm{arctg}\,(\rho_f(0)\,c_f(0)/\cos\theta)$.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Бабич В. М., Молотков И. А.* Математические методы в теории упругих волн.— Сб.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела, т. 10. ЛГУ, 1977.
2. *Аленицын А. Г.* Волны Рэлея в неоднородном слое, лежащем на полупространстве.— ПММ, 1973, т. 37, с. 895—899.
3. *Лидский В. Б., Нейгауз М. Г.* К методу прогонки в случае самосопряженной системы второго порядка.— Журн. вычисл. математики и мат. физики., 1962, т. 2, 1, 161—164.
4. *Мачевариани М. М., Тютекин В. В., Шкварников А. П.* Импедансный метод расчета характеристик упругих слоисто-неоднородных сред.— Акуст. журн., 1971, т. 17, № 1, с. 97—101.
5. *Тютекин В. В.* Импедансный метод расчета характеристик упругих неоднородных радиально-слоистых цилиндрических тел.— Акуст. журн., 1983, т. 29, № 4, с. 529—536.
6. *Краснушкин П. Е.* Метод пересчета импеданса в задачах о волнах в упругих телах.— Докл. АН СССР, 1980, т. 269, с. 332—335.
7. *Тютекин В. В.* Нормальные волны твердых слоистых неоднородных волноводов.— Акуст. журн., 1984, т. 30, № 3, с. 373—380.
8. *Абрамов А. А.* Вариант метода прогонки.— Журн. вычисл. математики и мат. физики., 1961, т. 1, 2, с. 349—351.
9. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957.
10. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1973.



Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академия наук СССР



Поступила в редакцию
10.I.1985