

УДК 534.2 : 532

К ВОПРОСУ О ПОТОКЕ ЭНЕРГИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ПОДАТЛИВЫМИ СТЕНКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУХА

Соболев А.Ф.

Получено выражение для среднего потока акустической энергии в облицованном цилиндрическом канале при наличии движения среды с учетом дополнительного потока энергии вдоль бесконечно тонкого пограничного слоя. Дополнительный поток энергии существен на низких частотах, когда моды неоднородны, и несуществен на высоких частотах, когда моды хорошо распространяющиеся.

К настоящему времени существует достаточно много работ, посвященных вопросу определения плотности акустической энергии и плотности потока акустической энергии в движущейся среде. Впервые выражения для плотности E и потока акустической энергии W в безвихревом в изоэнтропийном потоке в отсутствие границ были получены Блохинцевым Д. И. [1] в приближении геометрической акустики и Черновым Л. А. [2]:

$$E = \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{p(V_0, v)}{c_0^2}, \tag{1}$$

$$W = pv + \rho_0(V_0, v)v + \frac{V_0 p^2}{\rho_0 c_0^2} + \frac{V_0(V_0, v)p}{c_0^2}, \tag{2}$$

где p — акустическое давление, v — акустическая скорость, c_0 — скорость звука, ρ_0 — плотность воздуха в невозмущенном состоянии. Эти величины удовлетворяют закону сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div } W = 0. \tag{3}$$

Своего рода альтернативой (1), (2) являются выражения для плотности и потока энергии, полученные в работе [3]:

$$E_1 = \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2}, \tag{4}$$

$$W_1 = pv + V_0 \left[\frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2} \right], \tag{5}$$

которые также удовлетворяют закону сохранения энергии (3). В работах [4, 5] показывается, что выражения (4), (5) менее общие, чем (1), (2), в частности, на том основании, что они не переходят в уравнения Блохинцева в случае геометрической акустики, а также не применимы при вычислении потока энергии через границу двух сред с тангенциальным разрывом скорости. Представляет интерес работа [6], где установлена определенная связь между выражениями (1) и (4), которая заключается в том, что из обоих выражений для плотности энергии можно получить путем использования соответствующих вариационных принципов конвективное волновое уравнение.

В работах [7, 8] соотношения (1)–(3) были использованы для анализа передачи энергии в плоском канале со звукопоглощающими стенками при наличии потока воздуха. Учет поглощения приводит к нарушению принципа сохранения, т. е. к ситуации, аналогичной той, которая воз-

ника ранее [5] при использовании выражения (5) для вычисления потока энергии через границу двух сред с тангенциальным разрывом скорости, но без учета поглощения. Это проявляется в том, что поток энергии, падающий на стенку, не равен потоку энергии, поглощенному стенкой. Кроме того, в работе [7] показывается, что в случае неоднородных мод поток энергии по направлению к стенке почти всегда отрицателен, т. е. направлен от стенки, при этом направление потока энергии вдоль оси канала противоположно направлению, в котором волна затухает, хотя в целом баланс энергии соблюдается. Данный факт был использован этим автором в качестве подтверждения высказанного им предположения в работе [9] о возможности существования неустойчивости в канале с пассивным импедансом при наличии однородного потока, даже сколь угодно малого.

В данной работе исследуется возможность корректного использования системы уравнений (1)–(3) (более общей по сравнению с (3)–(5) согласно работе [5]) в цилиндрическом канале со звукопоглощающими стенками при наличии однородного по сечению канала потока воздуха.

Модель однородного потока в канале предполагает наличие бесконечно тонкого слоя вблизи стенки, в котором скорость потока скачком уменьшается до нуля. Чтобы учесть влияние этого слоя, нужно применить закон сохранения энергии к системе «среда плюс поглощающие стенки» с использованием условия непрерывности полной нормальной скорости на границе.

В настоящей работе получено выражение для потока энергии в облицованном канале, которое является обобщением выражения (2) (безусловно, справедливого в однородном потоке в отсутствие поглощающих границ) на случай импедансных границ, параллельных основному потоку. При выводе используется то обстоятельство, что вблизи мягкой границы поток, следуя колебательным движениям границы, не является строго параллельным оси канала, а имеет составляющую, направленную к границе, изменяющуюся с частотой падающей волны.

Рассмотрим участок цилиндрического канала длиной от 0 до z . Пусть под действием падающего давления $p = p_0 e^{-i\omega t}$ стенка совершает колебания, уравнение для которых имеет вид

$$A\ddot{\eta} + B\dot{\eta} + C\eta = p_0 e^{-i\omega t}, \quad (6)$$

где $\eta(z, \theta, t)$ — смещение поверхности относительно среднего положения, A, B, C — соответственно присоединенная масса, сопротивление и сжимаемость, приходящиеся на единицу площади поверхности, (\cdot) — означает дифференцирование по времени.

Колебаниям (6) соответствует энергия на единицу площади поверхности, равная сумме кинетической энергии движения присоединенной массы и потенциальной энергии упругости $\bar{E} = (A\dot{\eta}^2/2) + (C\eta^2/2)$. Суммарная энергия в выделенном участке цилиндрического канала равна

$$E_s = \int_{\tau} \left[\frac{\rho_0(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} + \frac{(\mathbf{V}_0, \mathbf{v})p}{c_0^2} \right] d\tau + \int_{S_{\text{бок}}} \left(\frac{A\dot{\eta}^2}{2} + \frac{C\eta^2}{2} \right) dS,$$

τ — объем выделенного участка канала, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности. Найдем, чему равно изменение энергии в единицу времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_s}{\partial t} = & \int_{\tau} \left[\rho_0 \left(\mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) + \frac{p}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{c_0^2} \left(\mathbf{V}_0, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \right] d\tau + \\ & + \int_{\tau} \frac{1}{c_0^2} (\mathbf{V}_0, \mathbf{v}) \frac{\partial p}{\partial t} d\tau + \int_{S_{\text{бок}}} (A\dot{\eta}\ddot{\eta} + C\eta\dot{\eta}) dS. \end{aligned} \quad (7)$$

Для преобразования этого соотношения воспользуемся линеаризован-

ными уравнениями гидродинамики:

$$\frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + V_0 \nabla p \right) + \rho_0 \nabla \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (V_0 \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0.$$

Подставим эти соотношения в выражение (7) и проведем преобразование объемного интеграла в поверхностный:

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} = - \int_S \left(p \mathbf{v} + \rho_0 (V_0, \mathbf{v}) \mathbf{v} + \frac{V_0 p^2}{\rho_0 c_0^2} + \frac{V_0 (V_0 \mathbf{v}) p}{c_0^2}, \mathbf{n} \right) dS + \int_{S_{\text{бок}}} (p \dot{\eta} - B \dot{\eta}^2) dS. \quad (8)$$

Здесь S — поверхность всего выделенного объема. Поскольку предполагается, что процесс установившийся и гармонический, то усреднение по периоду колебания дает $\partial E_s / \partial t = 0$. В результате выражение (8) принимает следующий вид:

$$\int_{S_0} [\overline{W_z(z)} - \overline{W_z(0)}] dS + V_0 a \int_0^z \int_0^{2\pi} (\rho_0 v_z v_n + p \eta_z') d\theta dz = - \int_0^z \int_0^{2\pi} a B \dot{\eta}^2 d\theta dz, \quad (9)$$

$$W_z = p v_z + \rho_0 V_0 v_z^2 + \frac{V_0 p^2}{\rho_0 c_0^2} + \frac{V_0^2 v_z p}{c_0^2}, \quad \eta_z' = \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial z}, \quad v_z, v_n$$

— осевая и нормальная к границе компоненты акустической скорости. Легко показать, что

$$V_0 a \int_0^z \int_0^{2\pi} (\rho_0 v_z v_n + p \eta_z') d\theta dz = V_0 a \int_0^{2\pi} \eta (p + \rho_0 V_0 v_z) |_0^z d\theta.$$

В этом случае уравнение для баланса энергии (9) можно переписать в виде

$$N(z) - N(0) = - a \int_0^z \int_0^{2\pi} B \overline{\dot{\eta}^2} d\theta dz, \quad (10)$$

$$N(z) = \int_{S_0} \overline{W_z(z)} dS + V_0 a \int_0^{2\pi} \overline{\eta(z) [p(z) + \rho_0 V_0 v_z(z)]} d\theta. \quad (11)$$

Выражение (11) является естественной модификацией выражения Блохинцева — Чернова для потока энергии в цилиндрическом канале при наличии податливых границ, параллельных основному потоку. Второе слагаемое в (11) можно интерпретировать, как дополнительный поток энергии, который «ползет» вдоль импедансной границы. Когда стенка абсолютно жесткая или когда воздушный поток равен нулю, дополнительный поток энергии исчезает. Из (10) следует, что для модифицированного потока энергии (а не для $\int_{S_0} \overline{W_z} dS$) выполняется обычный закон сохранения

акустической энергии, а именно разность потоков энергии (11) на торцевых поверхностях равна энергии, поглощаемой стенками канала. Как нетрудно видеть из (10), поток энергии через заданное сечение определяется с точностью до произвольной постоянной. Из (10) следует, что если $B > 0$ (пассивный импеданс), модифицированный поток энергии затухает в направлении своего распространения, а это означает отсутствие неустойчивости в таком канале. Это подтверждают рассмотренные ниже примеры распространения отдельных мод в цилиндрическом канале при $M < 1$. Следует отметить, что такой вывод справедлив только в том случае, если не учитывается влияние пограничного слоя, а также влияние потока на импеданс (преобразование пассивного импеданса в активный). В случае когда требуется оценка затухания или разности потоков энергии в

двух сечениях канала, зная произвольную постоянную нет необходимости. Действительно, так как затухание акустической энергии на единицу длины определяется производной dN/dz , из выражения (9) можно получить

$$dN/dz = -B \int_0^{2\pi} a \bar{\eta}^2 d\theta. \quad (12)$$

Аналогично из выражений (9) и (11) следует

$$N(z_2) - N(z_1) = -B \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} a \bar{\eta}^2 d\theta dz.$$

Определим вклад в поток энергии каждого из двух слагаемых (11) в конкретном случае распространения отдельных мод в цилиндрическом канале. Пусть распространяется волна, в которой давление $p_{mn} = A_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) e^{i\xi_{mn} z + im\theta - i\omega t}$, где ξ_{mn} и κ_{mn} определяются из следующей системы уравнений [10]:

$$\kappa_{mn} J_m'(\kappa_{mn} a) = ik\beta \left(1 - M \frac{\xi_{mn}}{k} \right)^2 J_m(\kappa_{mn} a), \quad (13)$$

$$\xi_{mn} = \frac{-Mk + \text{sign}(z) \sqrt{k^2 - \kappa_{mn}^2 (1 - M^2)}}{1 - M^2},$$

$J_m(\kappa_{mn} a)$ — функция Бесселя порядка m , (\prime) — означает дифференцирование по аргументу, $\beta = \rho_0 c_0 v_n / p$ — проводимость стенки, $M = V_0 / c_0$, $k = \omega / c_0$ — волновое число.

Выразим осевую и радиальную компоненты акустической скорости через давление и его производную с помощью уравнения движения

$$v_z = \xi_{mn} p_{mn} / [\rho_0 c_0 (k - M \xi_{mn})], \quad v_n = -i \frac{\partial p_{mn}}{\partial r} / [\rho_0 c_0 (k - M \xi_{mn})]. \quad (14)$$

Выражение для смещения η также находим в виде

$$\eta = \eta_0 e^{i(\xi_{mn} z + m\theta - \omega t)}. \quad (15)$$

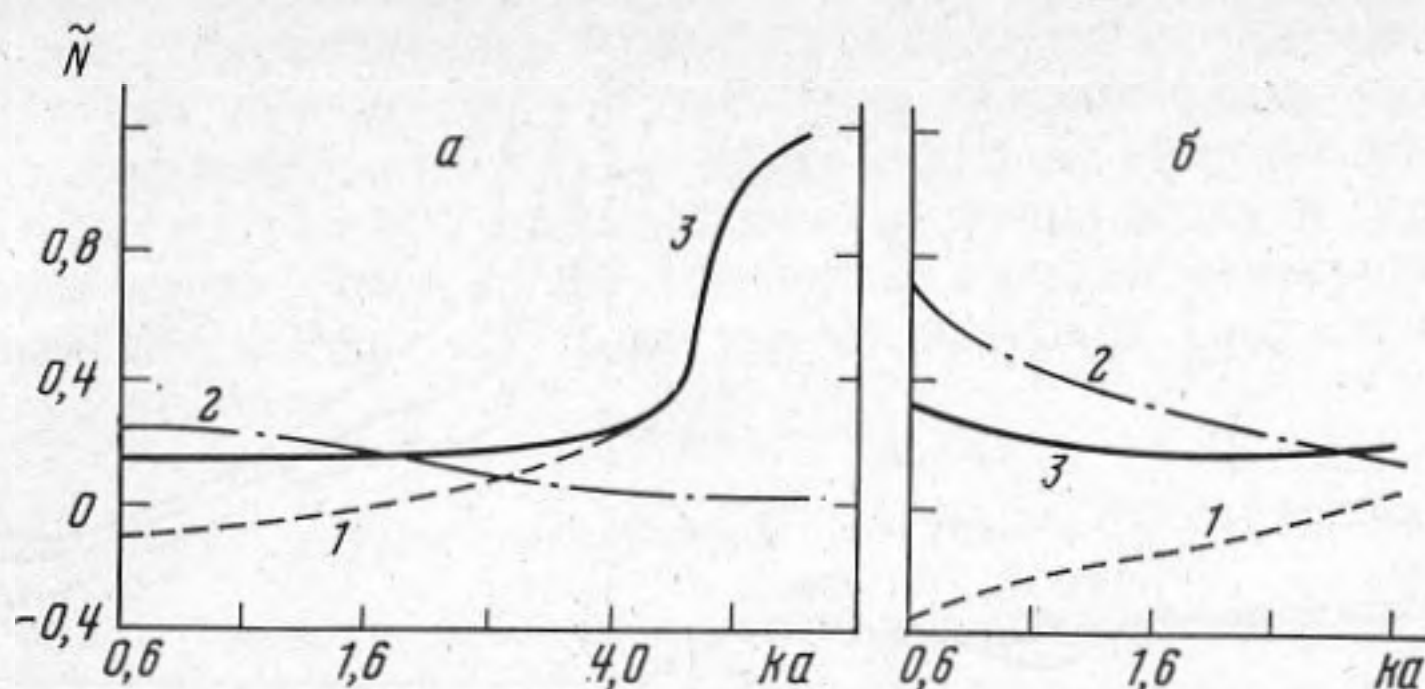
Воспользуемся соотношением $v_n|_{r=a} = \partial \eta / \partial t + V_0 \partial \eta / \partial z = -i\omega \eta + M c_0 \eta_z'$, тогда с учетом (13) — (15) получим

$$\eta = \frac{\partial p_{mn} / \partial r}{\rho_0 c_0^2 (k - M \xi_{mn})^2} \Big|_{r=a}; \quad \eta_z' = -\frac{p_{mn}(a) \beta \xi_{mn}}{k \rho_0 c_0^2}.$$

Для определения потока энергии по формуле (11) надо подставить действительные выражения для давления, скорости и смещения в эту формулу и усреднить по периоду колебания. В результате после необходимого интегрирования получим

$$\begin{aligned} \frac{N \rho_0 c_0}{\pi a^2} &= \frac{|A_{mn}|^2 |J_m(\kappa_{mn} a)|^2}{|1 - M \xi_{mn} / k|^2} \exp(-2 \text{Im} \xi_{mn} z) \times \\ &\times \left\{ -\frac{ka \text{Re}[\beta (1 - M \xi_{mn} / k)^2]}{2 \text{Re} \kappa_{mn} a \text{Im} \kappa_{mn} a} \text{Re} \sqrt{1 - \frac{\kappa_{mn}^2 (1 - M^2)}{k^2}} + \right. \\ &\left. + M \text{Re} \left[i\beta \frac{1 - M \xi_{mn} / k}{ka} \right] \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Рассмотрим предельный случай формулы (16) при $\text{Re} \beta \rightarrow 0$ в неподвижной среде ($M=0$). Предположим, что в случае реактивного адмитанса корни системы уравнений (13) известны. Положим $\kappa_{mn} = v_{mn}$, где v_{mn} — определяется из уравнения $v_{mn} a J_m'(v_{mn} a) / J_m(v_{mn} a) = -ka \text{Im} \beta$. Наличие малой действительной добавки в адмитансе приводит к появлению соот-



Фиг. 1. Частотная зависимость потока энергии моды (0,3) в цилиндрическом канале: 1 — первый член в формуле (16), 2 — второй член в формуле (16), 3 — сумма этих членов; а — $M=0,4$, б — $M=-0,4$

ветствующих добавок к v_{mn} , т. е. $\kappa_{mn} = v_{mn} + \varepsilon_{mn}$. Подставим это выражение в (13), тогда после разложения по формуле Тейлора и сохранения первых степеней по ε_{mn} получим

$$\varepsilon_{mn} = -ik \operatorname{Re} \beta \left/ \left[v_{mn} \left(1 - \frac{m^2}{v_{mn}^2 a^2} + \frac{(ka \operatorname{Im} \beta)^2}{(v_{mn} a)^2} \right) \right] \right.$$

В результате выражение для потока энергии в рассматриваемом предельном случае имеет вид

$$\frac{N \rho_0 c_0}{\pi a^2} = |A_{mn}|^2 |J_m(v_{mn} a)|^2 \left(1 - \frac{m^2}{v_{mn}^2 a^2} + \frac{(ka \operatorname{Im} \beta)^2}{(v_{mn} a)^2} \right) \operatorname{Re} \sqrt{1 - \frac{v_{mn}^2}{k^2}}.$$

Анализ формулы (16) показывает, что при хорошо распространяющихся мод, для которых выполняется условие $|\kappa_{mn}| \sqrt{1-M^2} < k$, первый член в фигурных скобках преобладает, следовательно, направление распространения энергии определяется величиной под знаком корня, однако для неоднородных волн ($|\kappa_{mn}| \sqrt{1-M^2} > k$) существенным становится второй член, который и определяет направление распространения акустической энергии.

Как видно из фиг. 1, на низких частотах, когда мода неоднородна, поток энергии, соответствующий первому члену, отрицателен, а поток энергии, соответствующий второму члену, и суммарный поток положительны. На высоких частотах, когда мода хорошо распространяется, поток энергии определяется первым членом в (16).

Таким образом, поток энергии вдоль пограничного слоя существует на низких частотах, когда моды неоднородны и несуществен на высоких частотах, когда моды однородны.

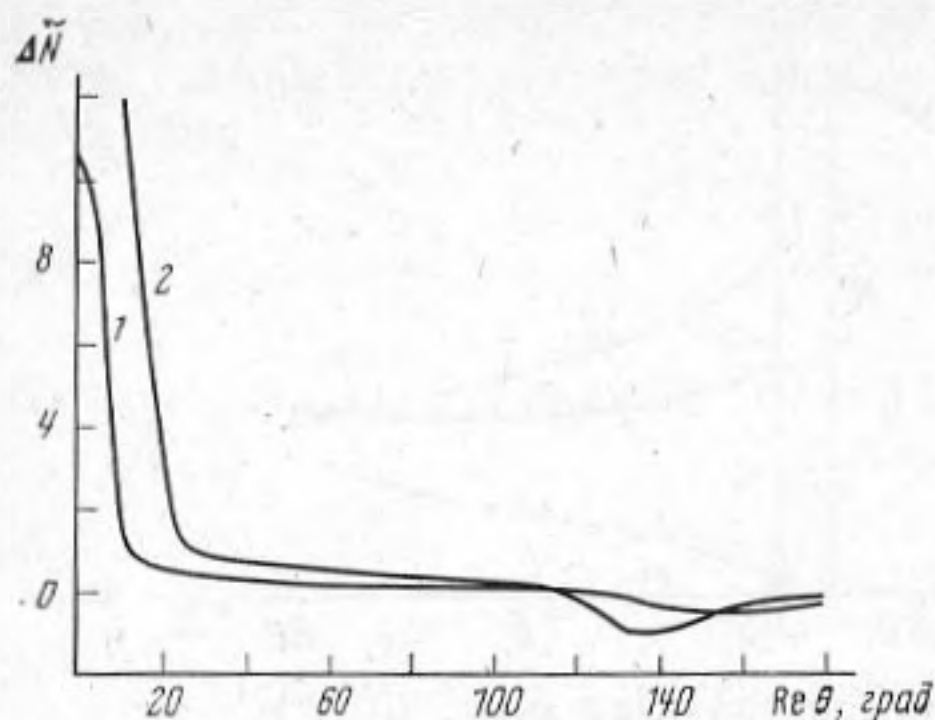
Затухание на единицу длины можно определять по формуле, получаемой из (12):

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{N \rho_0 c_0}{\pi a^2} \right) = -\frac{\operatorname{Re} \beta}{a} |J_m(\kappa_{mn} a)|^2 |A_{mn}|^2 \exp(-2 \operatorname{Im} \xi_{mn} z). \quad (17)$$

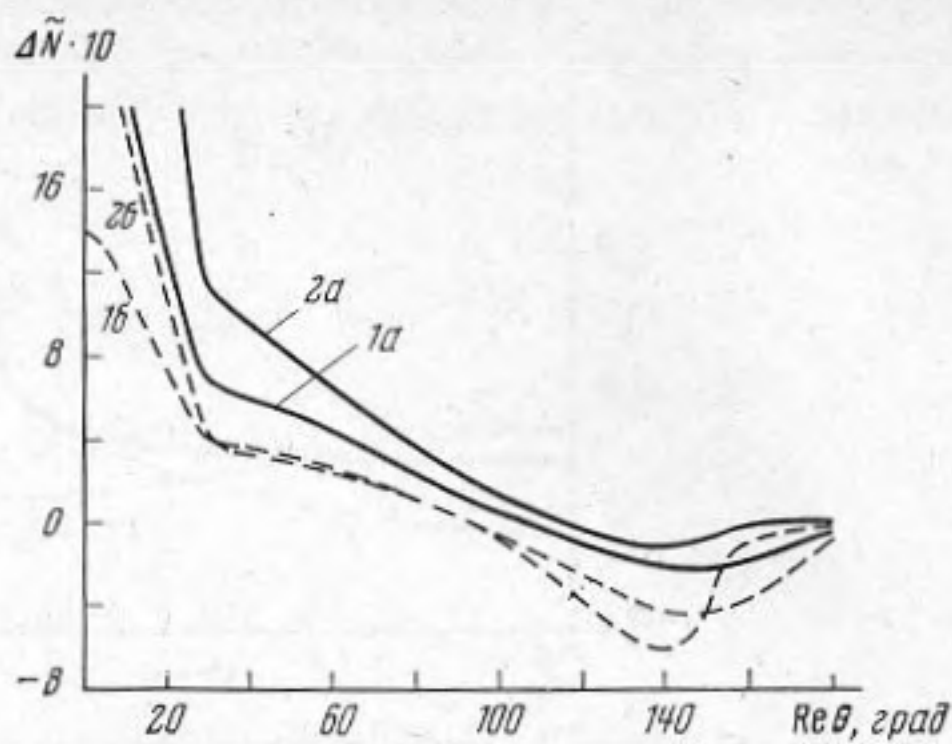
Из сравнения (17) с производной по z выражения (16) следует связь между проводимостью и корнями характеристического уравнения

$$\operatorname{Re} \beta = \frac{\operatorname{Im} \xi_{mn} a}{|1 - M \xi_{mn}/k|^2} \left\{ -\frac{ka \operatorname{Re}[\beta(1 - M \xi_{mn}/k)^2]}{2 \operatorname{Re} \kappa_{mn} a \operatorname{Im} \kappa_{mn} a} \operatorname{Re} \sqrt{1 - \frac{\kappa_{mn}^2 (1 - M^2)}{k^2}} + M \operatorname{Re} \left[i \beta \frac{1 - M \xi_{mn}/k}{ka} \right] \right\},$$

которая превращается в тождество при $M \rightarrow 0$, $\operatorname{Re} \beta \rightarrow 0$, $(\operatorname{Re} \xi_{mn} \operatorname{Im} \xi_{mn}) / (\operatorname{Re} \kappa_{mn} \operatorname{Im} \kappa_{mn}) = -1$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость потока энергии вдоль пограничного слоя от действительной части угла падения при $\text{Im } \xi = 0,1$ k : 1 — $M = 0,2$, 2 — $M = +0,4$

Фиг. 3. Зависимость потока энергии от действительной части угла падения при $\text{Im } \xi = 0,1$ k : 1 — $M = 0,2$, 2 — $M = 0,4$; а — над пограничным слоем, б — под пограничным слоем

Из выражения (17) следует, что поток акустической энергии по направлению к стенке фактически определяется действительной частью проводимости β . Вид формулы (17) дает основание полагать, что выражение (16) для потока энергии можно использовать и в случае импеданса, зависящего от уровня звукового давления.

Аналогичная ситуация возникает при падении плоской волны на границу раздела двух сред, движущихся с постоянными, но различными скоростями, при учете поглощения. Если толщина пограничного слоя много меньше длины падающей волны, пограничный слой можно заменить тангенциальным разрывом скорости.

Предположим, что граница $y=0$ разделяет две области. В первой области ($y>0$) существует однородный воздушный поток, направленный в положительном направлении оси z . Вторая область ($y<0$) предполагается покоящейся. Для простоты также предполагается, что плотности и скорости звука в обеих средах одинаковы.

Пусть на границу раздела из первой среды падает волна с гармонической зависимостью от времени ($\sim \exp(-i\omega t)$) $p_i = A \exp(i\xi z - i\kappa y)$. Поле в первой и второй средах соответственно равно $p = A[\exp(i\xi z - i\kappa y) + R \exp(i\xi z + i\kappa y)]$, $p_1 = AT \exp(i\xi_1 z - i\kappa_1 y)$, где

$$\xi = \frac{k \cos \theta}{1 + M \cos \theta} = \xi_1, \quad \kappa = \frac{k \sin \theta}{1 + M \cos \theta}, \quad \kappa_1 = \frac{k \sqrt{\sin^2 \theta + M^2 \cos^2 \theta}}{1 + M \cos \theta},$$

θ — угол между волновым вектором и положительной осью z , R — коэффициент отражения, T — коэффициент прохождения, индекс 1 относится ко второй среде. Если есть затухание в среде, величины ξ и θ комплексны, т. е. $\xi = \text{Re } \xi + i \text{Im } \xi$, $\theta = \text{Re } \theta + i \text{Im } \theta$. При составлении баланса энергии для единичного объема, содержащего поверхность раздела, в выражении для потока энергии возникает дополнительный член, равный разности потоков энергии по нормали к поверхности в первой и во второй средах. В соответствии с (2) поток энергии по нормали к поверхности на единицу площади равен в первой среде $N = p v_n + \rho_0 V_0 v_z v_n$, во второй среде $N_1 = p v_n^1$. Разность потоков энергии ΔN равна $\Delta N = \rho_0 V_0 v_z v_n + p \eta_z'$ и имеет точно такой же вид, как в выражении (9). Подставив выражения для скорости и смещения, легко можно получить

$$\Delta N = M \frac{|A|^2 \text{Im } \xi e^{-2 \text{Im } \xi z}}{\rho_0 c_0 |k - M \xi|^2} \text{Im} \left\{ \frac{(1 - |R|^2 + 2i \text{Im } R) \kappa^*}{k - M \xi^*} \right\}. \quad (18)$$

Выражение (18) можно трактовать как поток энергии вдоль пограничного слоя. При $M=0$ или $\text{Im } \xi=0$ (отсутствует затухание) $\Delta N=0$.

Поток энергии вдоль пограничного слоя (фиг. 2) максимален, когда

волновой вектор направлен по потоку воздуха. Направление потока энергии совпадает с направлением проекции волнового вектора на ось z при $0 \leq \operatorname{Re} \theta \leq \pi/2$ или при $\arccos(-M) \leq \operatorname{Re} \theta \leq \pi$. Характерным является возникновение локального максимума, когда волновой вектор составляет угол $\operatorname{Re}(\theta) = \arccos(-1/(1+M))$ с направлением потока воздуха. Это, в общем, соответствует характеру зависимости потока энергии непосредственно над пограничным слоем (фиг. 3), хотя уровни звуковой энергии здесь выше во всем диапазоне углов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука: Физматгиз, 1981, с. 208.
2. Чернов Л. А. Плотность и поток акустической энергии в движущейся среде.— ЖТФ, 1946, т. 16, № 6, с. 733–736.
3. Ryshow O. S., Shefter G. On the energy of acoustic waves propagation in moving media.— J. Applied Math. Mech., 1962, v. 26, p. 1293–1309.
4. Morfey C. L. Acoustic energy in nonuniform flows.— J. Sound Vibr., 1971, v. 14, № 2, p. 159–170.
5. Candel S. M. Acoustic conservation principles and an application to plane and modal propagation in nozzles and diffusers.— J. Sound Vibr., 1975, v. 41, № 2, p. 207–232.
6. Eversman W. Acoustic power balance in lined ducts.— AIAA Paper, 1979, № 79–0620.
7. Tester B. J. Acoustic energy flow in lined ducts. Containing uniform or «plug» flow.— J. Sound Vibr., 1973, v. 28, № 2, p. 205–215.
8. Старобинский Р. Н. Законы сохранения в акустике движущейся среды.— Тр. ЦИАМ, 1978, № 752, с. 95–107.
9. Tester B. J. The propagation and attenuation of sound in lined ducts containing uniform or «plug» flow.— J. Sound Vibr., 1973, v. 28, № 2, p. 151–203.
10. Мунин А. Г., Кузнецов В. М., Леонтьев Е. А. Аэродинамические источники шума. М.: Машиностроение, 1981, с. 248.

Поступила в редакцию
22.VIII.1985