трудно ожидать, что в реальных мелководных районах параметры среды будут достаточно однородны, особенно в случае слоистого дна на низких частотах, то следует сделать вывод, что метод определения характеристик мод из анализа пространственного спектра горизонтального разреза звукового поля по крайней мере в мелком море оказывается неприемлемым, а создание горизонтальных антенн для этой цели нецелесообразным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Толстой И., Клей К. С.* Акустика океана. М.: Мир, 1969.
2. *Елисеевнин В. А.* О работе горизонтальной антенны в водном слое.– Акуст. журн., 1979, т. 25, № 2, с. 227–233.
3. *Горская Н. В., Николаев Г. Н., Рычова Т. А., Салин Б. М.* Спектральный анализ при исследовании полей гармонических источников в акустических волноводах.– Акуст. журн., 1981, т. 27, № 2, 202–205.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
7.VIII.1984

УДК 533.9

О ЧИСЛЕ ЛУЧЕЙ, ПРИХОДЯЩИХ В ЗАДАННУЮ ТОЧКУ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Моисеев А. А.

Как известно [1], при распространении волн в случайно-неоднородных средах имеет место так называемая стохастическая многолучевость. В данной работе с помощью лучевого подхода рассмотрено влияние регулярной неоднородности среды на возникновение этого явления. А именно показано, что в отличие от однородных в среднем сред в неоднородной флуктуирующей среде области с развитой стохастической многолучевостью могут появляться уже на относительно небольших расстояниях от источника поля. Физически образование этих областей можно представить как результат флуктуационного «размазывания» в пространстве особенностей невозмущенной лучевой структуры типа каустик и фокальных точек. Таким образом, случайные неоднородности здесь не являются непосредственным источником многолучевости. Последняя возникает за счет фокусировки поля регулярной составляющей показателя преломления среды.

Для количественного исследования явления воспользуемся приближенными уравнениями, описывающими лучевую структуру поля в окрестности луча, который соединяет две заданные точки (источник и приемник) в среде без случайных неоднородностей:

$$\dot{p}_\alpha = n_\alpha, \qquad \dot{n}_\alpha = l_{\alpha\beta}(s)\, p_\beta + \nu_\alpha(s, \mathbf{p}). \tag{1}$$

Здесь s – длина дуги, отсчитываемая вдоль опорного луча, $\mathbf{p}=\{p_\alpha\}$, $\mathbf{n}=\{n_\alpha\}$, $\alpha=1,2$ – соответственно пространственное и угловое отклонения невозмущенного луча от опорного, а точкой обозначено дифференцирование по s. Вектор $\boldsymbol{\nu}(s,\mathbf{p})$ описывает флуктуации градиента логарифма показателя преломления среды. Симметричная квадратная матрица второго порядка $l(s)$ определяется средним профилем показателя преломления среды в окрестности опорного луча; по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Более подробно вывод и статистический анализ системы (1) приведен в работе [2].

Возмущенный луч $\mathbf{p}(s)$ проходит через заданные точки источника и приемника при выполнении условий $\mathbf{p}(0)=\mathbf{p}(S)=0$, где S – длина трассы, отсчитанная по опорному лучу. В совокупности с этими условиями уравнения (1) образуют стохастическую краевую задачу, которая в общем случае может иметь случайное число решений. Для ее анализа воспользуемся методом, предложенным в работе [3].

Введем четырехмерный вектор $\mathbf{x}(s)=\{\mathbf{p}(s), \mathbf{n}(s)\}$ и поставим к системе (1) произвольные начальные условия $\mathbf{x}(0)=\mathbf{a}$, причем $\mathbf{a}=\{\mathbf{a}^p, \mathbf{a}^n\}$. Рассмотрим матрицу $U(s)=\{\partial x_i(s)/\partial a_j\}$, $i,j=1,\ldots,4$. Разобьем ее на четыре клетки: $U=\{u^{\alpha\beta}\}$, $\alpha,\beta=1,2$, где каждая из клеток $u^{\alpha\beta}$ является квадратной матрицей второго порядка. Эти матрицы удовлетворяют уравнениям, непосредственно следующим из системы (1):

$$\dot{u}^{1\alpha} = u^{2\alpha}, \qquad \dot{u}^{2\alpha} = l(s)\, u^{1\alpha} + (\partial\boldsymbol{\nu}/\partial\mathbf{p})\, u^{1\alpha},$$
$$u^{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta} E. \tag{2}$$

Здесь E – единичная матрица второго порядка, $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронеккера, $(\partial\boldsymbol{\nu}/\partial\mathbf{p})_{\alpha\beta} \equiv \partial\nu_\alpha(s,\mathbf{p})/\partial p_\beta$.

Уравнения (1), (2) вместе с указанными начальными условиями образуют стохастическую задачу Коши, допускающую полное статистическое описание в марковском приближении [4]. А именно в предположении гауссовости поля флуктуаций среды $\boldsymbol{\nu}$, его квазиоднородности в перпендикулярной к опорному лучу плоскости и дельта-коррелированности по координате s для функции распределения решений этой задачи $W(\mathbf{x}, U; S, \mathbf{a})$ получим $W = W_1(\mathbf{x}, S, \mathbf{a})\, W_2(U; S)$, где распределения W_1, W_2

удовлетворяют следующим диффузионным уравнениям:

$$\frac{\partial W_1}{\partial s}+n_\alpha\frac{\partial W_1}{\partial p_\alpha}+l_{\alpha\beta}p_\beta\frac{\partial W_1}{\partial n_\alpha}=\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}(s,0)\frac{\partial^2 W_1}{\partial n_\alpha\,\partial n_\beta},$$

$$W_1|_{s=0}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}), \tag{3}$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial s}+u_{\alpha\beta}{}^{2\gamma}\frac{\partial W_2}{\partial u_{\alpha\beta}{}^{1\gamma}}+l_{\alpha\beta}u_{\beta\gamma}{}^{1\delta}\frac{\partial W_2}{\partial u_{\alpha\gamma}{}^{2\delta}}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b_{\alpha\beta}(s,\mathbf{p})}{\partial p_\gamma\,\partial p_\delta}\Bigg|_{\mathbf{p}=0}u_{\gamma\xi}{}^{1\lambda}u_{\delta\eta}{}^{1\mu}\frac{\partial^2 W_2}{\partial u_{\alpha\xi}{}^{2\lambda}\,\partial u_{\beta\eta}{}^{2\mu}},$$

$$W_2|_{s=0}=\prod_{\alpha,\beta=1,2}\delta(u^{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}E). \tag{4}$$

Здесь $b_{\alpha\beta}(s,\mathbf{p})$ – корреляционный тензор поля $\mathbf{v}$: $\langle v_\alpha(s_1,\mathbf{p}_1)v_\beta(s_2,\mathbf{p}_2)\rangle=b_{\alpha\beta}(s1,\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\times\times\delta(s_1-s_2)$; угловые скобки означают статистическое усреднение.

Среди множества решений системы уравнений (1), (2) при произвольных начальных данных $\mathbf{a}$ имеются и такие, которые являются решениями нужной нам краевой задачи. Чтобы выделить их, найдем, следуя [3], функцию

$$w(\mathbf{n};S)=\int d\mathbf{p}\,d\mathbf{a}\,dU\,W(\mathbf{x},U;S,\mathbf{a})\,|\det u^{12}|\delta(\mathbf{p})\delta(\mathbf{a}^p)\equiv$$

$$\equiv\langle|\det u^{12}(S)|\rangle\int d\mathbf{a}\,d\mathbf{p}\,W_1(\mathbf{x};S,\mathbf{a})\delta(\mathbf{a}^p)\delta(\mathbf{p}). \tag{5}$$

Благодаря сомножителям $\delta(\mathbf{a}^p)\delta(\mathbf{p})$ под знаком интеграла вклад в $w(\mathbf{n};S)$ вносят лишь такие решения задачи Коши, которые удовлетворяют требуемым граничным условиям. Кроме того, $w(\mathbf{n},S)$ нормирована на среднее число решений N стохастической краевой задачи [3]: $N=\int w(\mathbf{n},S)d\mathbf{n}$.

Чтобы найти функцию w, заметим, что уравнение (3) для W_1 допускает точное решение. Подставляя это решение в уравнение (5) и вычисляя интеграл по $\mathbf{a}$, получим искомый результат:

$$w(\mathbf{n};S)=NW^0(\mathbf{n};S);\qquad N=\langle|\det u^{12}(S)|\rangle/|\det\Phi(S)|. \tag{6}$$

Здесь W^0 совпадает с функцией распределения углов прихода возмущенных лучей в точку наблюдения, полученной методом инвариантного погружения, т. е. без учета возможной стохастической неединственности решения краевой задачи (см. [2]). Матрица $\Phi(S)$ определяется соотношением $\Phi_{\alpha\beta}(s)=\partial p_\alpha{}^0(s)/\partial a_\beta{}^n$, где $\mathbf{p}^0(s)$ есть решение системы уравнений (1) при $\mathbf{v}=0$.

Рассмотрим выражение (6) для N. Из него видно, что для вычисления среднего числа лучей, приходящих в точку приема, требуется знать функцию распределения элементов матрицы u^{12}, стоящей под знаком детерминанта, что связано с решением уравнения (4). Эта задача очень сложна и поэтому получить точное значение N не представляется возможным.

Однако из вида выражения (6) непосредственно следует сделанное выше утверждение об образовании областей стохастической многолучевости в окрестности каустик невозмущенного поля. Действительно, в числителе формулы для N стоит среднее значение неотрицательной случайной величины с ненулевой шириной распределения, т. е. величина положительная, в то время как знаменатель в точке касания опорным лучом каустики обращается в нуль. Таким образом, при приближении приемника в точке S_0, где $\det\Phi(S_0)=0$, среднее число попадающих в него лучей неограниченно возрастает.

Итак, в окрестности особенностей невозмущенной лучевой структуры образуются области с развитой стохастической многолучевостью. Чтобы получить представление об их размерах, можно, например, вычислить флуктуации величин $u^{\alpha\beta}(S)$ путем решения системы (2) методом возмущений. Опуская выкладки, приведем результат такого расчета для случая распространения звука в слоистом океане с крупномасштабными флуктуациями скорости звука.

Пусть источник и приемник расположены на оси подводного звукового канала. Ограничимся рассмотрением параксиальных, т. е. близких к оси канала лучей. В случае гладкого профиля скорости звука выходящие из источника параксиальные лучи описываются элементарными тригонометрическими функциями и формируют на оси канала бесконечный ряд фокальных точек [5]. Предположим, что приемник расположен на малом удалении Δ от m-й фокальной точки: $S=(mD/2)+\Delta$, где Δ – длина цикла приосевого луча, причем $\Delta\ll D$.

Если флуктуации скорости звука в среде изотропны и имеют радиус корреляции r и относительную величину $(\delta c/c)$, для среднего числа попадающих в приемник лучей N получим в данном случае оценку

$$N=\frac{1}{8\pi^2}\frac{D^2}{r^2|\Delta|}\left|\frac{\delta c}{c}\right|\sqrt{\frac{3m}{2\pi}rD}.$$

В частности, при типичных для океана значениях $\delta c/c \sim 10^{-4}$, $r \sim 100$ м, $D \sim 50$ км и общей длине трассы 100 км ($m=4$) область с развитой многолучевостью оказывается весьма малой: $N \sim 10$ при расстоянии Δ от приемника до фокальной точки порядка 100 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Флатте С.* Распространение звука во флуктуирующем океане. М.: Мир, 1982.
2. *Моисеев А. А.* О статистике лучей, приходящих в заданную точку неоднородной среды с флуктуирующими параметрами.– Акуст. журн., 1984, т. 30, № 2, с. 243–248.
3. *Саичев А. И.* Об одном статистическом варианте анализа двухточечной краевой задачи.– Изв. вузов. Радиофизика, 1980, т. 23, № 10, с. 1163–1176.
4. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
5. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.

Институт океанологии
им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
23.XII.1985

УДК 534.83

ОБ АКТИВНОМ ФОРМИРОВАНИИ РАССЕЯННОГО ЗВУКОВОГО ПОЛЯ

Урусовский И. А.

В работах [1–4] обсуждаются рассеянные поля, представленные суперпозицией сходящихся и расходящихся пространственных сферических гармоник с тем или иным набором отношений амплитуд расходящихся к амплитудам сходящихся гармоник (коэффициентов отражения) при различных постановках задачи активного гашения звука. Ввиду значительного разнообразия имеющихся постановок задачи представляет интерес описать объемные скорости источников, корректирующих рассеянное поле до любого из множества допустимых полей с соответственными коэффициентами отражения пространственных гармоник. Соответствующий расчет проведем для активной корректировки амплитуд расходящихся сферических гармоник монополями, распределенными по одной сферической поверхности, следуя схеме, принятой в работе [3]. Допустимыми будут только такие скорректированные рассеянные поля, для которых амплитуды сферических гармоник достаточно быстро стремятся к нулю с увеличением номера гармоники [3, 4] так, чтобы поверхностная плотность объемной скорости монополей оставалась конечной, а амплитуды ее сферических гармоник при этом также стремились к нулю.

В сферических координатах r, θ, φ звуковое давление в падающем поле, все источники которого полагаем расположенными при $r>R$ – снаружи указанной выше сферы $r=R$, радиус которой обозначим через R, при $r \leqslant R$ представляется суперпозицией пространственных сферических гармоник

$$\mathscr{P}(r, \theta, \varphi) = \sum_{q \geqslant 0} A_q j_n(kr) \psi_q(\theta, \varphi). \tag{1}$$

Здесь A_q – произвольные коэффициенты, $j_n(kr)$ – сферические бесселевы функции, k – волновое число, $\psi_q(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta)_{\sin}^{\cos} m\varphi$, $P_n^m(x)$ – присоединенные полиномы Лежандра, $m=m(q)$, $n=n(q)$; каждому q соответствует единственная пара индексов m и n, m пробегает значения от 0 до n, $n=0, 1, 2, \ldots$, нумерация пространственных гармоник ведется в порядке возрастания m при каждом фиксированном n и в порядке возрастания n; четным q соответствует косинус, нечетным – синус, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ подразумевается.

Звуковое давление $\bar{p}$, создаваемое поверхностью монополей в однородной среде, можно представить в виде

$$\bar{p}(r, \theta, \varphi) = \sum_{q \geqslant 0} w_q R_n(kr) \psi_q(\theta, \varphi), \tag{2}$$

где

$$R_n(kr) = j_n(kR) h_n^{(1)}(kr) \quad \text{при } r>R,$$
$$R_n(kr) = j_n(kr) h_n^{(1)}(kR) \quad \text{при } r<R,$$

w_q – амплитуды пространственных сферических гармоник корректирующего поля, связанные с распределенной по сфере $r=R$ поверхностной плотностью объемной скорости монополей $V(\theta, \varphi)$ формулами $V(\theta, \varphi) = \sum_{q \geqslant 0} V_q \psi_q(\theta, \varphi)$, $V_q = w_q/(\rho c k^2 R^2)$. Полагая, что в некотором сферическом слое $a \leqslant r \leqslant R$ отсутствуют источники звука и среда в нем однородна, звуковое давление $\tilde{p}$, рассеиваемое областью $r<a$, можно выразить в виде суперпозиции пространственных гармоник с амплитудами a_q:

$$\tilde{p}(r, \theta, \varphi) = \sum_{q \geqslant 0} a_q h_n^{(1)}(kr) \psi_q(\theta, \varphi), \qquad r \geqslant a. \tag{3}$$