

УДК 534.26

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОСТАВНЫХ ВОЛНОВОДОВ

Бобровицкий Ю. И., Тютюкин В. В.

Получены простые формулы для расчета потока мощности и плотности энергии нормальных волн в отдельных частях составных акустических волноводов. В качестве примеров эти характеристики рассчитаны для изгибно-колеблющейся пластины, контактирующей с жидким полупространством, и для тонкой упругой оболочки, заполненной жидкостью. Проанализированы зависимости от частоты долей потока и плотности энергии, относящихся к жидкости.

Прямые методы расчета энергетических характеристик волновода (среднего потока мощности F через сечение и энергии E — единицы длины или площади) обычно связаны с громоздкими вычислениями. Ряд авторов делали попытки упростить эти расчеты. Наиболее общий результат получен в работах [1, 2]:

$$F = -\omega \frac{\partial L}{\partial k}, \quad E = \omega \frac{\partial L}{\partial \omega} - L. \tag{1}$$

Здесь L — усредненная функция Лагранжа, т. е. интеграл по поперечным координатам от лагранжиана, усредненного по времени и продольным координатам, ω — круговая частота, k — вектор продольных волновых чисел. Неудобство формул (1) связано с необходимостью интегрирования по сечению волновода. Более простой метод расчета содержится в работах [3, 4]: для рэлеевских волн в полубесконечных средах величины F и E выражены через вектор смещений и матрицу импедансов на границах сред. Еще более простые формулы получены в работе [5], где показано, что энергетические характеристики пропорциональны производным от дисперсионного выражения и амплитуде одной из компонент смещения на границе волновода.

Цель настоящей статьи — установление связи между приведенными результатами и получение некоторых новых. Особое внимание уделено составным волноводам и вычислению энергетических характеристик в их отдельных частях. В качестве примеров рассмотрены пластина, лежащая на поверхности воды, и упругая оболочка с жидкостью, исследованы зависимости от частоты долей потока и плотности энергии в жидкости.

Рассмотрим плоский волновод ($|x| < \infty, 0 \leq y \leq H$), заполненный линейной средой, с лагранжианом

$$L = K - \Pi = \frac{1}{2} \left(\dot{u}^T M \dot{u} - \frac{\partial u^T}{\partial x} A \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u^T}{\partial x} 2B \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u^T}{\partial y} C \frac{\partial u}{\partial y} - u^T D u \right), \tag{2}$$

где $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ — действительная вектор-функция обобщенных смещений; K и Π — плотности кинетической и потенциальной энергий; прописные буквы обозначают действительные $n \times n$ -матрицы (M — инерционную, остальные — упругие), элементы которых являются функциями поперечной координаты y ; матрицы A, C, D, M — симметричны; точка означает производную по времени, индекс T — транспонирование. Лагранжиан (2) является действительной скалярной величиной и описывает широкий

класс акустических (жидких и твердых) волноводов без потерь. Величины

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial x} \right)} = A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \quad \mathbf{g} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial y} \right)} = B^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \quad (3)$$

представляют собой векторы напряжений, действующих в сечениях $x=0$ и $y=0$. Рассматривая распространение нормальной волны $\mathbf{u} = \text{Re}\{\mathbf{w} \cdot \exp[i\theta(x, t)]\}$, где \mathbf{w} — комплексные амплитуды смещений, $\theta(x, t) = kx - \omega t$ — фаза волны, в которой частота $\omega = -\partial\theta/\partial t$ и постоянная распространения $k = \partial\theta/\partial x$ действительны, нетрудно получить усредненную линейную плотность функции Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H \Lambda dy = \frac{1}{4} \int_0^H [\mathbf{w}^* (\omega^2 M - k^2 A - D) \mathbf{w} - \mathbf{w}'^* C \mathbf{w}' + ik(\mathbf{w}^* B \mathbf{w}' - \mathbf{w}'^* B^T \mathbf{w})] dy; \quad (4)$$

звездочка означает эрмитово сопряжение, штрих — производную по y . Непосредственной проверкой легко убедиться в правильности формул Уизема (1):

$$F = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^H \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} d\theta dy = \frac{\omega}{2} \int_0^H [k \mathbf{w}^* A \mathbf{w} + \text{Im}(\mathbf{w}^* B \mathbf{w}')] dy = -\omega \frac{\partial L}{\partial k},$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^H (\mathbf{K} + \mathbf{\Pi}) d\theta dy = \omega \frac{\partial L}{\partial \omega} - L.$$

С помощью интегрирования по частям преобразуем усредненную функцию Лагранжа (4) к следующему виду:

$$L = \frac{1}{4} \int_0^H \mathbf{w}^* l \mathbf{w} dy - \frac{1}{4} \mathbf{w}^* \mathbf{g} \Big|_0^H = \frac{1}{4} \int_0^H \mathbf{w}^* l \mathbf{w} dy - \frac{1}{4} \mathbf{W}^* \mathbf{G}. \quad (5)$$

Здесь

$$l \mathbf{w} = (C \mathbf{w}')' + ik(B + B^T) \mathbf{w}' + (\omega^2 M - D - k^2 A + ikB'^T) \mathbf{w} = 0 \quad (6)$$

— система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение нормальной волны по поперечной координате; $\mathbf{W} = [\mathbf{w}^T(0), \mathbf{w}^T(H)]^T$, $\mathbf{G} = [\mathbf{g}^T(0), \mathbf{g}^T(H)]^T$ — $2n$ -векторы смещений и напряжений на границах волновода $y=0, H$. Беря производные от (5) по k и ω для нормальной волны, удовлетворяющей уравнениям (6) и граничным условиям, скажем $\mathbf{G}=0$ (свободный волновод), получим формулы

$$F = \frac{\omega}{4} \mathbf{W}^* \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial k}, \quad E = -\frac{\omega}{4} \mathbf{W}^* \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \omega}, \quad (7)$$

содержащие только значения полевых величин на границе волновода. Если ввести импедансную матрицу Z , связывающую напряжения со скоростями на границах $\mathbf{G} = Z \mathbf{V}$, где $\mathbf{V} = -i\omega \mathbf{W}$, можно получить выражения

$$F = -\frac{i}{4} \mathbf{V}^* \frac{\partial Z}{\partial k} \mathbf{V}, \quad E = \frac{i}{4} \mathbf{V}^* \frac{\partial Z}{\partial \omega} \mathbf{V}, \quad (8)$$

аналогичные полученным в работах [3, 4] для рэлеевских волн в полубесконечных средах. Нетрудно показать, что для волновода без потерь матрица Z является косоэрмитовой ($Z^* = -Z$), так что характеристики (8) являются действительными величинами. Они выражаются через импедансы и вектор скоростей на границе. Импедансная матрица Z может быть найдена, например, методом работы [6]. Отметим, что она отличается от матрицы импедансов, рассматриваемых в этой работе, множителем $-i\omega$.

Эти формулы можно еще более упростить. Так, для свободного волновода граничные условия на кромках $y=0, H$ имеют вид $ZV=0$. Решая эту линейную однородную систему, получим дисперсионное уравнение и форму нормальной волны (амплитуды скоростей):

$$|Z|=0, V=v_\alpha V_0=[A_{\alpha 1}/A_{\alpha\alpha}, \dots, 1, \dots, A_{\alpha n}/A_{\alpha\alpha}]^T v_\alpha. \quad (9)$$

Здесь v_α — это α -я составляющая вектора V , т. е. амплитуда α -й компоненты скорости на границе волновода, а форма волны взята в виде алгебраических дополнений $A_{\alpha j}$ α -й строки матрицы Z , причем для определенности считается, что нормальная волна имеет единичную амплитуду, если α -я составляющая скорости на границе равна единице (форма единичной нормальной волны определяется вектором V_0). Тогда, поскольку $ZV=[0, \dots, |Z|/A_{\alpha\alpha}, \dots, 0]^T$, усредненная функция Лагранжа записывается как $L=iV^*ZV/4=i|v_\alpha|^2|Z|/4A_{\alpha\alpha}$, а энергетические характеристики равны

$$F = -\frac{i}{4}|v_\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{|Z|}{A_{\alpha\alpha}} \right), \quad E = \frac{i}{4}|v_\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{|Z|}{A_{\alpha\alpha}} \right). \quad (10)$$

Это и есть, по-видимому, наиболее простые формулы для вычисления энергетических характеристик волновода. Величина $|Z|/A_{\alpha\alpha}$ имеет смысл входного импеданса волновода относительно α -й составляющей внешней силы. Действительно, если на кромки волновода подействовать вектором внешних сил с одной отличной от нуля α -й составляющей $G \exp[i\theta(x, t)] = [0, \dots, g_\alpha, \dots, 0]^T \exp(ikx - i\omega t)$, то отклик на границах определяется как $V=Z^{-1}G$, откуда α -я составляющая скорости равна $v_\alpha = g_\alpha A_{\alpha\alpha}/|Z|$. Нетрудно видеть, что входной импеданс равен обратной величине элемента $Y_{\alpha\alpha}$ матрицы проводимостей $Y=Z^{-1}$. Таким образом, если известен входной импеданс волновода, то, определив, например, экспериментально амплитуду одной из составляющих скорости на границе $|v_\alpha|$, можно по формулам (10) вычислить поток и плотность энергии. Составляющая α выбирается из соображений удобства теоретического расчета входного импеданса или измерения амплитуды $|v_\alpha|$. Отметим, что формулы (10) по существу эквивалентны формулам, полученным в работе [5], и могут быть также выведены на основании результатов работы [7].

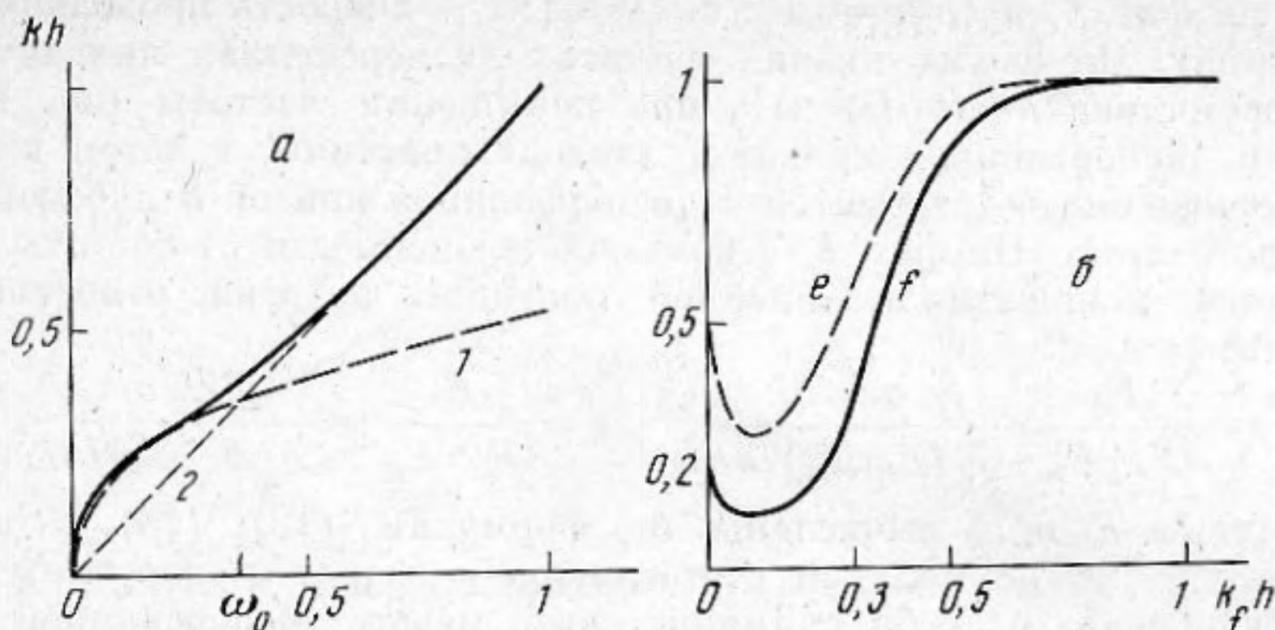
Для волновода с неподвижными границами $y=0, H$ смещения на границе равны нулю и энергетические характеристики определяются амплитудой одной из составляющих сил реакции g_α на границе и входной проводимостью волновода. В самом деле, если на границе имеет место равенство $V=YG$, то из формул (1), (5) находим

$$F = \frac{i}{4}|g_\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{|Y|}{B_{\alpha\alpha}} \right), \quad E = -\frac{i}{4}|g_\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{|Y|}{B_{\alpha\alpha}} \right), \quad (11)$$

где $B_{\alpha\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $(\alpha\alpha)$ матрицы Y , $|Y|=0$ — дисперсионное уравнение. Величина $|Y|/B_{\alpha\alpha}$, т. е. входная проводимость волновода по направлению α , определяется как отношение скорости v_α в силе реакции g_α в том случае, когда все скорости на границе равны нулю, кроме одной α -й: $v_\alpha \exp(ikx - i\omega t)$. Она равна обратной величине элемента $Z_{\alpha\alpha}$ матрицы импедансов Z .

Для волноводов со смешанными граничными условиями можно воспользоваться одной из формул (10), (11) в зависимости от граничных условий для выбранной компоненты α .

Выведем теперь аналогичные формулы для составных волноводов. Пусть имеется плоский волновод без потерь, который можно представить состоящим из двух более простых волноводов, соединенных вдоль линии, параллельной оси x . Примерами таких волноводов являются, например, лежащие один на другом два упругих слоя; Γ -образный тонкостенный стержень, состоящий из соединенных под прямым углом двух тонких упругих полос; цилиндрическая оболочка с жидкостью, состоящая из «сухой» оболочки и цилиндрического столба жидкости, и др. При распространении по составному волноводу нормальной волны на



Фиг. 1

линии соединения действуют силы реакции $g_j \exp(ikx - i\omega t)$, которые связаны со скоростями $v_j \exp(ikx - i\omega t)$ на этой линии через импедансы Z_j составных частей: $g_j = Z_j v_j$, $j = 1, 2$. Поскольку на линии соединения скорости составных частей одинаковы $v_1 = v_2 = v$, а сумма сил реакции равна нулю $g_1 + g_2 = (Z_1 + Z_2)v = 0$, то отсюда сразу можно получить дисперсионное уравнение $|Z_1 + Z_2| = 0$ и форму нормальной волны $v = v_\alpha v_0 = v_\alpha [A_{\alpha 1}/A_{\alpha \alpha}, \dots, 1, \dots, A_{\alpha n}/A_{\alpha \alpha}]^T$, где $A_{\alpha m}$ — алгебраические дополнения матрицы $Z = Z_1 + Z_2$, а v_α — амплитуда α -й составляющей скорости v на линии соединения. Написав далее усредненные функции Лагранжа для составных частей и повторив приведенные выше выкладки, получим поток F_j и плотность E_j для каждой составной части в отдельности:

$$F_j = -\frac{i}{4} |v_\alpha|^2 v_0^* \frac{\partial Z_j}{\partial k} v_0, \quad E_j = \frac{i}{4} |v_\alpha|^2 v_0^* \frac{\partial Z_j}{\partial \omega} v_0, \quad (12)$$

где $j = 1, 2$. Для сумм этих величин $F_1 + F_2$ и $E_1 + E_2$ квадратичные формы $v_0^* (Z_1 + Z_2) v_0$ упрощаются и дают формулы (10) для общего потока и энергии.

Таким образом, в составных волноводах поток и плотность энергии в отдельных частях, как и в волноводе в целом, определяются амплитудой какой-либо одной компоненты скорости $|v_\alpha|$ на линии соединения и матрицами импедансов составных частей относительно сил реакции. Если известны матрицы Z_1 и Z_2 , то, вычислив производные $\partial Z_j / \partial k$, ω и форму единичной нормальной волны v_0 и измерив амплитуду α -й составляющей скорости на линии соединения составных частей, по формулам (10) и (12) можно найти все необходимые энергетические характеристики волновода.

Рассмотрим два примера вычисления энергетических характеристик в составных волноводах, содержащих жидкость. Простейший из них — изгибно-колеблющаяся пластина на жидком полубесконечном пространстве. Известно [8], что в этой структуре на всех частотах существует волна рэлеевского типа, распространяющаяся без затухания вдоль поверхности (по оси x) и экспоненциально спадающая вглубь жидкости (по оси y). Ее постоянная распространения k превышает волновое число $k_f = \omega/c_f$ жидкости, а также изгибное волновое число «сухой» пластины. При распространении такой волны между пластиной и жидкостью действуют нормальные (по y) силы реакции, относительно которых импедансы пластины и жидкого полупространства равны

$$Z_p = i \left(\frac{Dk^4}{\omega} - \rho h \omega \right), \quad Z_f = -\frac{i \rho_f \omega}{\sqrt{k^2 - k_f^2}} \quad (13)$$

где D, ρ, h — изгибная жесткость, плотность и толщина пластины, ρ_f — плотность жидкости. На всех частотах импеданс жидкости массовый (жидкость ведет себя как присоединенная масса), а импеданс пластины упругий. Дисперсионное уравнение $Z_p + Z_f = 0$ имеет один действительный корень, зависимость которого от частоты изображена сплошной

линией на фиг. 1, а ($\rho_f/\rho=0,13$; $c_f/c_l=0,1$; c_l — скорость продольных волн в пластине). На самых низких частотах дисперсионная кривая описывается функцией $k=(\rho_f/D)^{1/3}\omega^{2/3}$, при повышении частоты она приближается к дисперсионной кривой 1 «сухой» пластины, а затем выше частоты совпадения ω_0 стремится к дисперсионной кривой 2 плоской волны в жидкости $k=k_f$. На фиг. 1, б показаны зависимости от частоты долей f и e потока мощности и линейной плотности энергии, относящихся к жидкости:

$$f = \frac{F_f}{F_f + F_p} = \frac{\partial Z_f / \partial k}{\partial (Z_f + Z_p) / \partial k}, \quad e = \frac{E_f}{E_f + E_p} = \frac{\partial Z_f / \partial \omega}{\partial (Z_f + Z_p) / \partial \omega}. \quad (14)$$

Величины F_f и E_f вычислены по формулам (12), (13), в которых $|v_a|$ — амплитуда нормальной составляющей скорости пластины; $v_0=1$; $j=f$, p . Обращает на себя внимание связь между дисперсионной кривой (фиг. 1, а) и зависимостями от частоты энергетических характеристик (фиг. 1, б). Как только дисперсионная кривая приближается к кривой «парциальной» дисперсии какой-либо составной части волновода, доли потока и плотности энергии в этой составной части возрастают. Так, на самых низких частотах по жидкости передается примерно 20% общего потока мощности. При увеличении частоты, когда дисперсионная кривая составного волновода приближается к кривой 1 (фиг. 1, а), доля потока f уменьшается вдвое. Но на высоких частотах, где дисперсионная кривая мало отличается от прямой 2, практически вся энергия передается по жидкости. Заметим, что область применимости классической теории изгибных колебаний пластин, которая здесь использовалась, для выбранных параметров ограничена частотой $k_f h \approx 3$.

В качестве второго примера рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку, заполненную неподвижной жидкостью. Нормальные волны в этом составном волноводе и их дисперсия изучались многими авторами (например, в [9–11]), однако энергетические оценки делались только в работе [12], где было рассчитано отношение потоков энергии в оболочке и жидкости для одной из осесимметричных волн.

При распространении по волноводу нормальной волны вида $u(r)\exp(ikx + im\varphi - i\omega t)$, где (x, r, φ) — цилиндрические координаты и m — целое число волн по окружности, между оболочкой и жидкостью действуют нормальные силы реакции, относительно которых импеданс жидкости равен

$$Z_f^{(m)} = -i\rho_f c_f \mu_f \begin{cases} J_m(\alpha) / \alpha J_m'(\alpha), & k_f > k, \\ I_m(\beta) / \beta I_m'(\beta), & k_f < k, \end{cases} \quad (15)$$

а импеданс «сухой» оболочки можно записать следующим образом:

$$Z_s^{(m)} = i\rho c_l \frac{h}{R} \frac{\Delta_m}{\delta_m}. \quad (16)$$

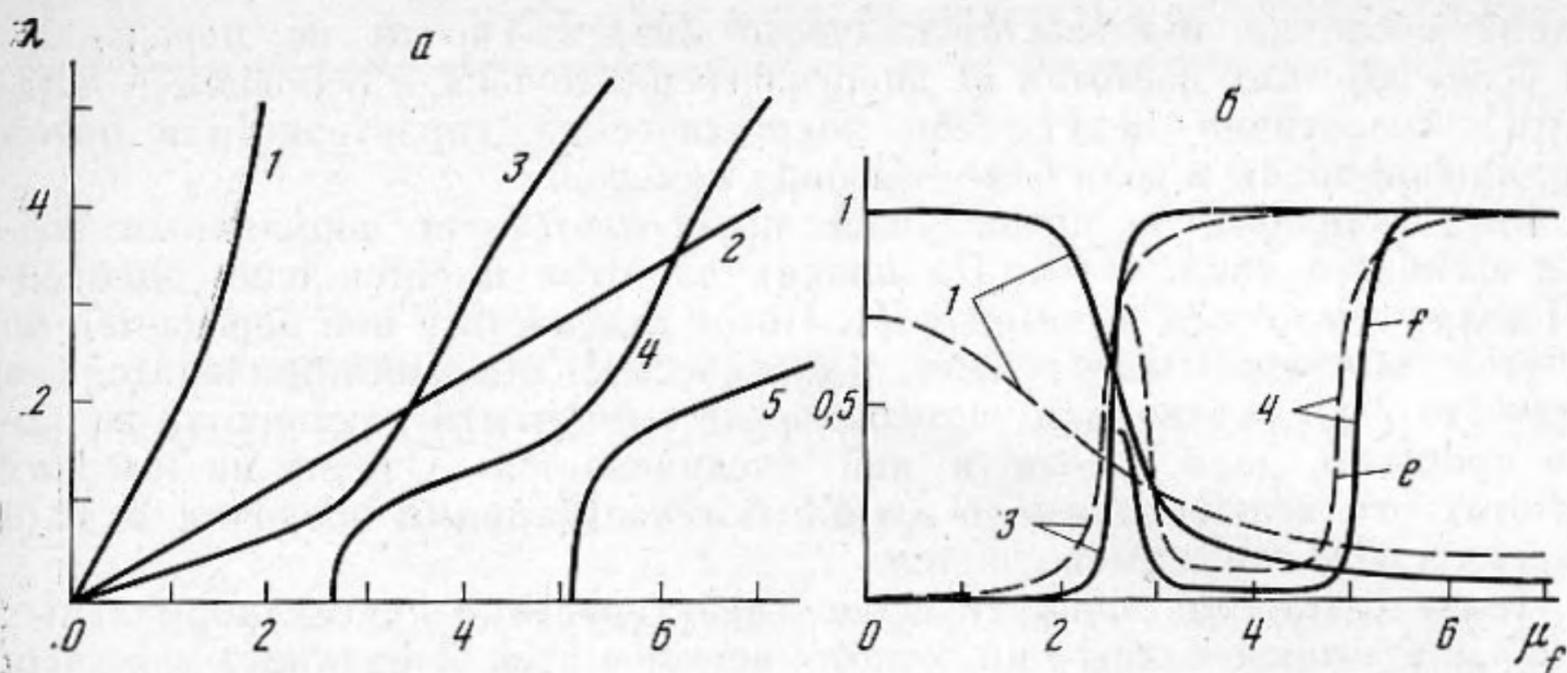
Здесь R, h, ρ, E_0, ν — радиус, толщина, плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона оболочки, $E_l = E_0 / (1 - \nu^2)$, $c_l = (E_l / \rho)^{1/2}$, $\lambda = kR$, ρ_f и c_f — плотность и скорость звука в жидкости, $\mu_f = \omega R / c_f$, $\mu_l = \omega R / c_l$, $\alpha = (\mu_f^2 - \lambda^2)^{1/2}$, $\beta = (\lambda^2 - \mu_f^2)^{1/2}$, $\varepsilon = h^2 / 12R^2$, J_m и I_m — функции Бесселя,

$$\Delta_m = NPQ + 2nprq - n^2N - p^2P - q^2Q, \quad \delta_m = NP - q^2, \quad N = \lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2 - \mu_l^2,$$

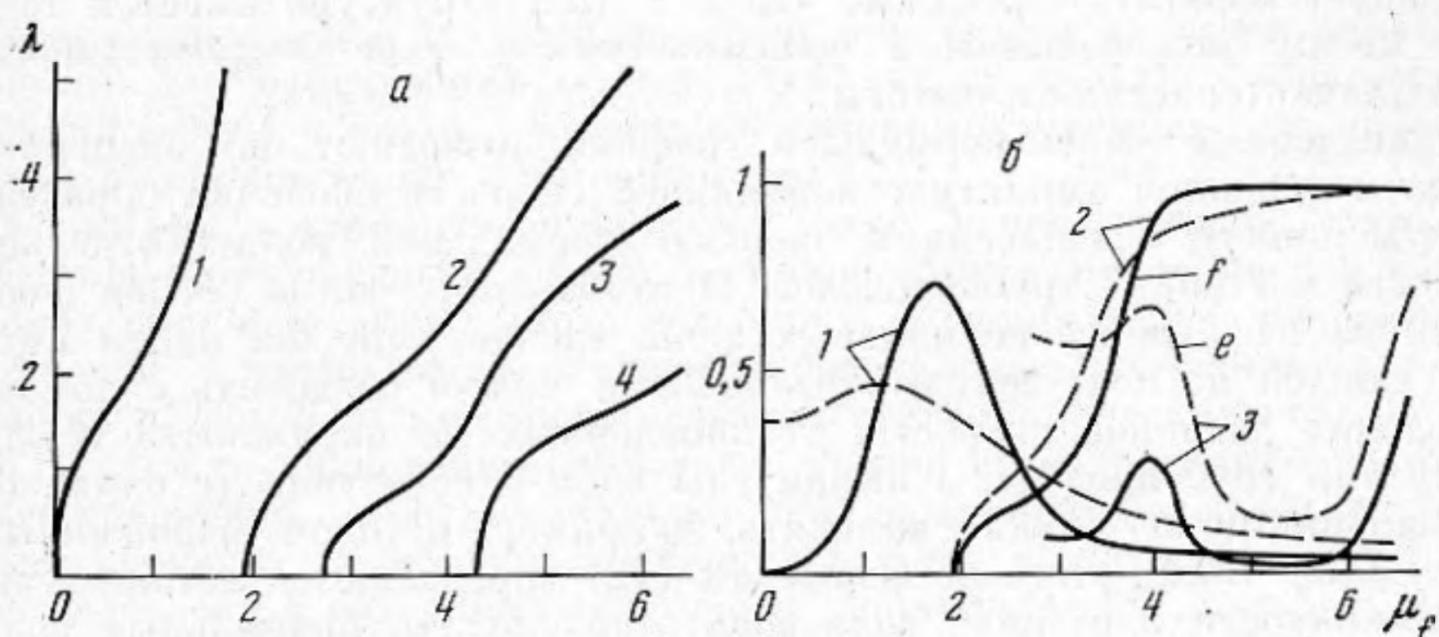
$$P = \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + m^2 - \mu_l^2 + \varepsilon [2(1-\nu)\lambda^2 + m^2], \quad Q = 1 - \mu_l^2 + \varepsilon (\lambda^2 + m^2)^2, \quad n = m(1 +$$

$$+ \varepsilon [(2-\nu)\lambda^2 + m^2]), \quad p = \nu\lambda, \quad q = \frac{1+\nu}{2} \lambda_m. \quad \text{Уравнение } \Delta_m = 0 \text{ является дис-}$$

персионным для нормальных волн в свободной оболочке, а уравнение $\delta_m = [(1-\nu)/2][\lambda^2 + m^2 - 2\mu_l^2 / (1-\nu)](\lambda^2 + m^2 - \mu_l^2) = 0$ — для волн в оболочке, у которой нормальные смещения равны нулю. Импеданс (15) также представлен отношением двух дисперсионных выражений: уравнение



Фиг. 2



Фиг. 3

$J_m(\alpha)/\alpha=0$ является дисперсионным для нормальных волн в свободном столбе жидкости, а уравнение $J_m'(\alpha)=0$ — для волн в столбе жидкости с неподвижными границами. При вычислении импеданса (16) использовались обычные уравнения тонких оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа — Лява.

Дисперсионное уравнение $Z_f^{(m)} + Z_s^{(m)} = 0$ нормальных волн в оболочке с жидкостью для каждого значения m имеет конечное число действительных корней безразмерной постоянной распространения λ . Для осесимметричных волн ($m=0$) действительные ветви дисперсии изображены на фиг. 2, а, а на фиг. 2, б приведены соответствующие им зависимости от частоты долей f и e потока плотности энергии в жидкости, определенных аналогично (14), для стальной оболочки с водой ($R/h=50$). Цифры у кривых указывают на порядковый номер нормальной волны. Значения энергетических характеристик вычислены по формулам (12), (15), (16).

Как видно из анализа фиг. 2, на низких частотах имеются три однородные осесимметричные нормальные волны. В жидкостной волне (с номером 1) почти вся энергия передается по воде, а в оболочечной (с номером 3), близкой к продольной волне, вся энергия сосредоточена в оболочке. Волна с номером 2 является чисто сдвиговой, вся ее энергия заключена в оболочке и поэтому на фиг. 2, б не представлена. На более высоких частотах первая нормальная волна стремится к изгибной волне оболочки и доли потока и плотности энергии в воде уменьшаются. Наоборот, третья нормальная волна при возрастании частоты становится все более связанной с водой и доли энергии в ней возрастают. Четвертая нормальная волна, зародившись на частоте кольцевого резонанса оболочки с жидкостью ($\mu_f=2,65$), на участке $\mu_f=3 \div 5$ связана с продольной

волной оболочки, и здесь по жидкости энергия почти не передается. На более высоких частотах ее энергия сосредоточена в основном в жидкости. Аналогично ведут себя энергетические характеристики пятой нормальной волны и волн более высоких номеров.

Фиг. 3 аналогична предыдущей, но соответствует нормальным волнам изгибного типа: $m=1$. На низких частотах имеется одна однородная волна (балочная, с номером 1). Поток мощности в ней передается по упругой оболочке, хотя часть кинетической энергии приходится на жидкость. При увеличении частоты, когда в жидкости начинаются волновые процессы, доля потока в ней увеличивается. Однако на высоких частотах эта волна связана с изгибными колебаниями оболочки и доля энергии в воде снова уменьшается.

Иначе ведут себя энергетические характеристики других нормальных волн. Для второй волны они монотонно стремятся к единице, для волн последующих номеров они имеют минимум, но на высоких частотах также стремятся к единице.

Следует обратить внимание, что и в этой структуре имеется тесная связь между дисперсионными зависимостями и зависимостями энергетических характеристик от частоты.

Приведенные выше формулы и графики позволяют по экспериментально измеренной амплитуде нормальной скорости оболочки определять поток мощности и запасенную энергию нормальной волны отдельно в жидкости и стенках трубопроводов. В тех случаях, когда сигнал формируется из нескольких нормальных волн, следует сначала найти амплитуды каждой из них: волны с разными m можно разделить с помощью нескольких датчиков скорости, установленных по окружности в одном из сечений трубопровода, а амплитуды волн одного типа (с одинаковыми значениями m) можно измерить, например, методом, изложенным в работе [13]. После этого по формулам (12) определяются потоки и энергия в жидкости и стенках волновода отдельно для нормальных волн и для сигнала в целом.

Полученные в статье результаты без труда обобщаются на волноводы, составленные из более чем двух частей, и на некоторые трехмерные волноводы, например на системы плоских слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
2. Bretherton F. P. Propagation in slowly varying waveguides.— Proc. Royal Soc. (London), 1968, V. A302, № 1471, p. 555—576.
3. Ingebrigtsen K. A., Tønning O. Elastic surface waves in crystals.— Phys. Rev., 1969, v. 184, № 3, p. 942—951.
4. Бирюков С. В. Метод импеданса в теории упругих поверхностных волн.— Акуст. журн., 1985, т. 31, № 5, с. 583—590.
5. Тюткин В. В., Бобровицкий Ю. И. Энергетические соотношения для акустических волноводов.— Докл. АН СССР, 1985, т. 285, № 4, с. 878—882.
6. Тюткин В. В. Нормальные волны твердых слоисто-неоднородных волноводов.— Акуст. журн., 1984, т. 30, № 3, с. 373—379.
7. Аскне Я., Нильссон О. Энергетические соотношения для волн в системах с временной и пространственной дисперсией.— Тр. ин-та инженеров по электронике и радиотехнике, 1969, т. 57, № 8, с. 83—84.
8. Kurtze G., Bolt R. On the interaction between plate bending waves and their radiation load.— Akustische Beihefte, 1959, v. 9, № 1, p. 238—242.
9. Lin T. C., Morgan G. W. Wave propagation through fluid contained in cylindrical elastic shell.— J. Acoust. Soc. Amer., 1956, v. 28, № 6, p. 1165—1176.
10. Селезов И. Т. О распространении малых возмущений в упругой цилиндрической оболочке, наполненной жидкостью.— Прикл. мех., 1965, т. 1, № 3, с. 10—16.
11. Меркулов В. Н., Приходько В. Ю., Тюткин В. В. Возбуждение и распространение нормальных волн в тонкой упругой цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью.— Акуст. журн., 1978, т. 24, № 5, с. 723—730.
12. Будрин С. В., Струмицкий В. Э. Об особенностях распространения нормальной низкочастотной волны в цилиндрическом волноводе.— Акуст. журн., 1980, № 4.
13. Климов С. П., Меркулов В. Н., Степанов Д. В., Тюткин В. В. Метод измерения фазовых скоростей и амплитуд нормальных волн в многомодовых волноводах.— Акуст. журн., 1980, т. 26, № 4, с. 622—623.

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова
Академии наук СССР
Акустический институт им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
13.II.1986