

УДК 534.213

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ПОЛУОТКРЫТОЙ ТРУБЕ

Галиуллин Р. Г., Чермяков Е. И.

Предложена приближенная акустическая теория субгармонических резонансных колебаний в полуоткрытой трубе в случае, когда ведущие члены субгармонического и резонансного колебаний имеют одинаковый порядок.

Исследование стоячих волн конечной амплитуды является одним из перспективных направлений в нелинейной акустике [1]. Теория таких колебаний важна в связи с практическим применением их для интенсификации процессов тепло- и массопереноса [2].

Рассмотрим цилиндрическую трубу, один конец которой открыт и сообщается с окружающей средой, а другой закрыт периодически колеблющимся поршнем. При частоте колебаний поршня, равной половине от резонансной, в трубе устанавливаются резонансные колебания, которые в отличие от обычных получили название субгармонических нелинейных [1, 3, 4]. Их возникновение связывают обычно с квадратичной нелинейностью уравнений движения. Однако при достаточно большой амплитуде вынуждающих колебаний подобное удвоение частоты может быть в основном связано с потерями с открытого конца трубы [3].

В настоящей работе ставится задача построения акустического приближения к теории субгармонических нелинейных резонансов в предположении, что амплитуда колебаний ограничивается в основном за счет нелинейных потерь с открытого конца трубы.

Пусть поршень, приводимый в движение кривошипно-шатунным механизмом, совершает колебания по закону $U_{\pi} = U_1 \cos(\omega t/2) + U_2 \sin \omega t$, где $\omega = n\omega_0$ ($n=1, 3, 5 \dots$), ω_0 — циклическая частота, соответствующая основной резонансной частоте столба газа, $U_1 = \omega l/2$, $U_2 = \omega l^2/4d$, l — амплитуда смещения поршня, d — длина шатуна [3].

Предположим, что поршень совершает малые (т. е. $kl \ll 1$, $k = \omega/c_0$, c_0 — скорость звука в невозмущенной среде) высокочастотные ($R\sqrt{\omega/2\nu} \gg 1$, где R — радиус трубы, ν — коэффициент кинематической вязкости) колебания в узкой ($R/L \ll 1$, L — длина трубы) трубе, когда движение можно считать одномерным и влиянием пограничного слоя на ядро течения можно пренебречь [5]. Тогда движение газа описывается системой уравнений

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad \frac{p}{\rho_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa, \quad (1)$$

где u , p , ρ — скорость, давление, плотность соответственно, индекс 0 относится к невозмущенному газу, $\kappa = c_p/c_v$. Пусть выполнено $u_m/\omega L \ll 1$, где u_m — амплитуда результирующих колебаний, т. е. нелинейность внутри трубы мала [5]. Рассматриваемые колебания осуществляются в разных условиях: колебание с частотой $\omega_1 = n\omega_0/2$ происходит вдали от резонанса, его максимальная безразмерная амплитуда связана с соответствующим числом Маха при движении поршня линейно, т. е. $\bar{u}_{1m} \sim M_1$ [1]. Колебание с частотой $\omega_2 = n\omega_0$ осуществляется в резонансном режиме, т. е. $\bar{u}_{2m} \sim M_2^{1/2}$ [5]. (Здесь $\bar{u} = u/c_0$, $\bar{p} = p/\rho_0 c_0^2$, $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$, $M_1 = U_1/c_0$, $M_2 = U_2/c_0$.) Следовательно, вопрос о том, следует ли то или иное колебание включить в первое приближение теории возмущений, решается срав-

нением M_1 и $M_2^{1/2}$. Рассмотрим случай, когда $M_1 \sim M_2^{1/2}$. Тогда в качестве малого параметра, по степеням которого ведется разложение, следует выбрать $\varepsilon \sim M_2^{1/2}$ (Предлагавшийся ранее рядом авторов параметр $\varepsilon \sim M^{1/2}$ в случае полуоткрытой трубы приводит к теории, не согласующейся с экспериментом [6].)

Решение системы уравнений первого приближения имеет вид

$$\bar{u}^{(1)} = r_2^{(1)} \sin(kx + \alpha_2^{(1)}) \cos \omega t + r_1^{(1)} \sin\left(\frac{kx}{2} + \alpha_1^{(1)}\right) \cos \frac{\omega t}{2}, \quad (2)$$

$$\bar{p}^{(1)} = -r_2^{(1)} \cos(kx + \alpha_2^{(1)}) \sin \omega t - r_1^{(1)} \cos\left(\frac{kx}{2} + \alpha_1^{(1)}\right) \sin \frac{\omega t}{2}.$$

В обозначениях приближений верхний индекс в скобках означает порядок приближения, нижние индексы принимают значения 1 или 2 в зависимости от того, колебания какой частоты они описывают: 1 — ω_1 , 2 — ω_2 , 11, 12, 21 — частотам, появившимся в результате взаимодействия этих колебаний.

При задании граничных условий для системы (1) на закрытом конце трубы (при $x=0$) используем приближенный переход от лагранжевых координат к эйлеровым [1]. В нашем случае это дает

$$U_{II} = u(0, t) + \xi \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} + \dots, \quad (3)$$

где смещение $\xi(x=0) = (2U_1/\omega) \sin(\omega t/2) - (U_2/\omega) \cos \omega t$. При подстановке решений (1) в (3) нужно удерживать лишь члены соответствующего порядка по ε .

Граничное условие на открытом конце (при $x=L$) должно получаться из рассмотрения течений вне трубы вблизи открытого конца и условий сшивания внешнего и внутреннего решений. Авторы [7] показали, что на открытом конце трубы кроме потерь на акустическое излучение имеются так называемые потери типа Бернулли, связанные с формированием струйного выброса, когда часть массы воздуха, находившегося в трубе, выбрасывается в окружающую среду безвозвратно. Потери типа Бернулли начинают преобладать уже с уровнем звукового давления порядка 140 дБ, чему соответствует амплитуда пульсаций скорости порядка 1 мс^{-1} . Следовательно, в фазе выброса на открытом конце должно быть $p - p_0 = (1/2) \rho u^2$. В [8] показано, что в фазе всасывания, когда труба наполняется воздухом из областей, прилегающих непосредственно к открытому концу, при выполнении условия $\omega R/V \ll 1$ (где V — максимальная скорость в отверстии), $p - p_0 = (1/2) \rho_0 u^2$. Коэффициент $1/2$ появляется здесь из-за пренебрежения вязкостью, что вполне допустимо в нашем случае, когда число Рейнольдса $Re = VR/\nu \sim 10^4$. В экспериментальной работе [9] было обнаружено, что давление на открытом конце трубы не содержит постоянной составляющей в отличие от скорости, которая ввиду отрыва струи в процессе выброса начинает пульсировать около некоторого постоянного значения $\langle u \rangle$. Полагая, что на открытом конце форма пульсаций скорости близка к синусоидальной, можно получить, что $\langle u \rangle = mV$, где $m \approx 1/\pi$. Конечно, величина коэффициента m определяется многими факторами (например, геометрией открытого конца трубы) и приведенное значение является оценочным. В общем случае, этот параметр должен быть определен экспериментально. Суммируя все изложенное выше, можно записать

$$p_0 - p(x=L) = iY u(x=L) - \frac{1}{2} \rho_0 \{ [u(x=L) + mV]^2 \}, \quad (4)$$

где учтено, что вблизи открытого конца среду можно считать несжимаемой. Фигурные скобки в (4) означают, что в окончательном выражении нужно опустить постоянные члены; $Y = 2\rho_0 \omega R/\pi$ — мнимая часть импеданса акустического излучения [5] (активную часть импеданса излучения считаем малой). Заметим, что использованное ранее в [5] нелиней-

ное граничное условие было более грубым, так как не учитывало нелинейное взаимодействие различных гармоник на открытом конце трубы. Для целей работы [5] это вполне оправдано, но в нашем случае такое взаимодействие необходимо учитывать.

Подставляя (2) в (3) и замечая, что условие (3) второго порядка малости для колебания 2, получим $\alpha_2^{(1)}=0$. Подставив (2) в (4), получаем условие резонанса $kL=\pi n/2+\arctg \bar{Y}$, где $\bar{Y}=Y/\rho_0 c_0$. Для узких труб $\bar{Y}\ll 1$, т. е. резонанс наступает при $kL\approx\pi n/2$. Для колебания 1 имеем: $r_1^{(1)} \sin \alpha_1^{(1)}=M_1$, $r_1^{(1)} \cos(kL/2+\alpha_1^{(1)})=0$, откуда $\alpha_1^{(1)}=\pi n/4$, $r_1^{(1)}=M_1/\sin \alpha_1^{(1)}$.

Уравнения второго приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0} \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}^{(2)}}{\partial x} &= -\bar{p}^{(1)} \frac{1}{c_0} \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial t} - \bar{u}^{(1)} \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial x}, \\ \frac{1}{c_0} \frac{\partial \bar{p}^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}^{(1)} \bar{u}^{(1)}), \quad \bar{p}^{(2)} = \bar{p}^{(2)} + \frac{\kappa-1}{2} (\bar{p}^{(1)})^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Возникший при обсуждении граничного условия параметр $V/\omega R$ совместно с параметром $u_m/\omega L$ позволяет оценить, какой вклад во второе приближение (5) внесут гармоники, возникающие из-за нелинейного взаимодействия внутри трубы, по сравнению с вкладом гармоник, обусловленных нелинейностью (4). Именно в нашем случае $u_m/\omega L\ll 1$, а $V/\omega R\gg 1$, следовательно, правой частью в (5) можно пренебречь и решать однородные уравнения. (Отметим, что этот вывод подтверждается прямым расчетом.)

Общее решение системы (5) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(2)} &= r_{11}^{(2)} \sin(kx + \alpha_{11}^{(2)}) \sin \omega t + r_{12}^{(2)} \sin\left(\frac{kx}{2} + \alpha_{12}^{(2)}\right) \sin \frac{\omega t}{2} - \\ &\quad - r_{21}^{(2)} \sin\left(\frac{3kx}{2} + \alpha_{21}^{(2)}\right) \sin \frac{3\omega t}{2}, \\ \bar{p}^{(2)} &= r_{11}^{(2)} \cos(kx + \alpha_{11}^{(2)}) \cos \omega t - r_{12}^{(2)} \cos\left(\frac{kx}{2} + \alpha_{12}^{(2)}\right) \cos \frac{\omega t}{2} - \\ &\quad - r_{21}^{(2)} \cos\left(\frac{3kx}{2} + \alpha_{21}^{(2)}\right) \cos \frac{3\omega t}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничное условие на поршне для (6) получим, сохранив члены второго порядка в (3):

$$\bar{u}^{(2)}(x=0) = r_2^{(1)} M_1 \sin \frac{\omega t}{2} + \left(M_2 - \frac{M_1^2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi n}{4} \right) \sin \omega t + r_2^{(1)} M_1 \sin \frac{3\omega t}{2}. \quad (7)$$

На открытом конце из (4) получим

$$\begin{aligned} \bar{p}^{(2)}(x=L) &= -\left(mVr_2^{(1)} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{M_1^2}{2} \right) \cos \omega t - r_1^{(1)} \left(\frac{r^{(1)}}{2} + mV \sin \frac{\pi n}{2} \right) \times \\ &\quad \times \cos \frac{\omega t}{2} - \frac{1}{2} r_2^{(1)} r_1^{(1)} \cos \frac{3\omega t}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (6) в (7) и (8), получим для определения постоянных системы уравнений:

$$\begin{aligned} r_{11}^{(2)} \sin \alpha_{11}^{(2)} &= M_2 - \frac{M_1^2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi n}{4}, \quad r_{11}^{(2)} \sin \alpha_{11}^{(2)} = mVr_2^{(1)} + \frac{M_1^2}{2} \sin \frac{\pi n}{2}, \\ r_{12}^{(2)} \sin \alpha_{12}^{(2)} &= r_2^{(1)} M_1, \quad r_{12}^{(2)} \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \alpha_{12}^{(2)}\right) = r_1^{(1)} A, \quad r_{21}^{(2)} \sin \alpha_{21}^{(2)} = r_2^{(1)} M_1, \end{aligned} \quad (9)$$

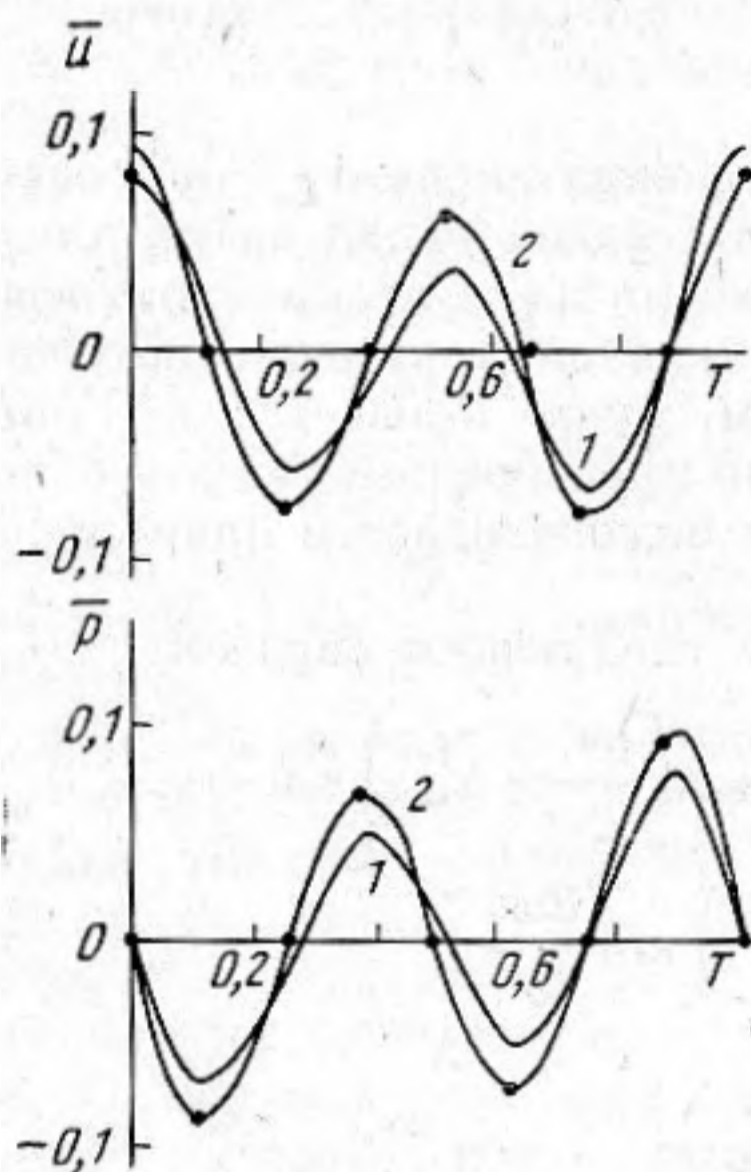
$$r_{21}^{(2)} \cos\left(\frac{3\pi n}{4} + \alpha_{21}^{(2)}\right) = \frac{1}{2} r_2^{(1)} r_1^{(1)}, \quad A = \frac{r_2^{(1)}}{2} + mV \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Принимая во внимание (2), запишем $V = r_2^{(1)} + r_2^{(1)}$. Тогда из условия совместности первой пары уравнений (9) получим $r_2^{(1)} = \{M_2/m + (M_1^2/m) \times [m/2 - \text{ctg}(\pi n/4)]\}^{1/2} - r_1^{(1)}/2$. Из остальных уравнений получаем

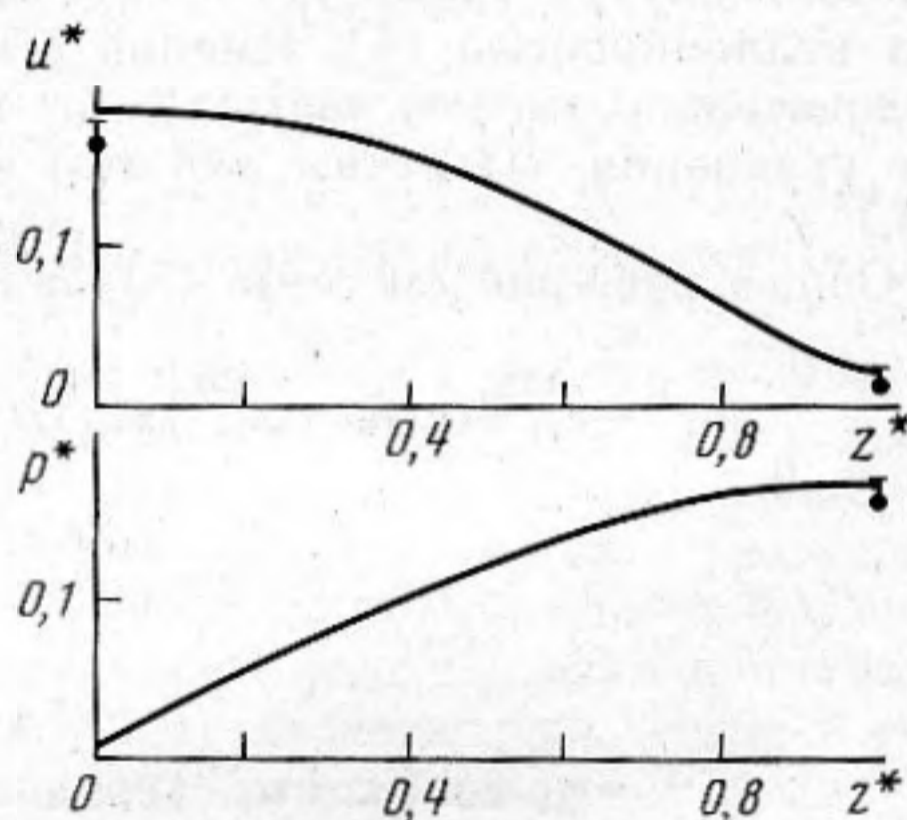
$$r_{12}^{(2)} = \sqrt{2} M_1 [r_2^{(1)2} + 2A(A + r_2^{(1)})]^{1/2}, \quad \alpha_{12}^{(2)} = \text{arctg}[r_2^{(1)} \sin(\pi n/2) / (2A + r_2^{(1)})],$$

$$r_{21}^{(2)} = \sqrt{5} r_2^{(1)} M_1, \quad \alpha_{21}^{(2)} = -\text{arctg}[(1/2) \sin(\pi n/2)].$$

На фиг. 1 представлены теоретические временные зависимости скорости и давления и экспериментальные результаты [10] для двух значе-



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимости $\bar{u}(t)$ на открытом конце трубы и $\bar{p}(t)$ вблизи поршня для трубы длиной $L = 2,566$ м при $M_1 = 1,503 \cdot 10^{-2}$ и $M_2 = 2,135 \cdot 10^{-3}$. Сплошные линии — теория, 1 — $m = 0,5$, 2 — $m = 0,3$; точки — эксперимент [10]

Фиг. 2. Распределения нормированных размахов давления и скорости по длине трубы. $p^* = (p_{\max} - p_{\min}) / \rho_0 c_0^2$, $u^* = (u_{\max} - u_{\min}) / c_0$, $z^* = (L - x) / L$, $m = 0,3$. Сплошные линии — теория, точки — эксперимент [10]

ний m . Данные хорошо согласуются качественно, а кривые с $m = 0,3$ полностью совпадают с экспериментом, что подтверждает сделанную ранее оценку для m . Более того, экспериментальное исследование [6] показывает, что при $\text{Re} \rightarrow \infty$ $m \rightarrow 0,3$. (Вообще говоря, по [6] m в зависимости от Re может меняться от 1 до 0,3).

Эпюры нормированных размахов давления и скорости даны на фиг. 2. Там же показаны имеющиеся экспериментальные результаты: значение размаха скорости на поршне и открытом конце, размах давления на поршне по [10].

Среди экспериментальных данных [10] был выбран случай, когда $M_1 = 1,503 \cdot 10^{-2}$, $M_2 = 2,135 \cdot 10^{-3}$, $\omega = 210,61$ с^{-1} , а открытый конец трубы снабжен широким фланцем с большим радиусом закругления. Такие значения параметров обеспечивают возможность применения предложенной здесь теории. Геометрия открытого конца выбрана из соображений о величине Re : чтобы граничное условие (4) можно было применять, Re должно быть максимально большим. Заметим, что в экспериментах [10] амплитуда скорости достигала 30 мс^{-1} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
2. Галицкий Б. М., Рыжов Ю. А., Якуш Е. В. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977. 256 с.
3. Keller J. J. Subharmonic Non-linear Acoustic Resonances in Open Tubes. Pt I: Theory.— ZAMP, 1977, v. 28, p. 419—431.
4. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
5. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Халимов Г. Г. Нелинейные колебания газа в полукрытой трубе.— Акуст. журн., 1982, т. 28, № 5, с. 617—621.
6. Sturtevant B. Nonlinear gas oscillations in pipes. Part 2. Experiment.— JFM, 1974, v. 63, pt 1, p. 97—120.
7. Ingard U., Ising H. Acoustic nonlinearity of an orifice.— J. Acoust. Soc. Amer., 1967, v. 42, № 1, p. 6—17.
8. Hersch A. S., Rogers T. Fluid Mechanical Model of the Acoustic Impedance of Small Orifices.— AIAA Pap., 1975, v. 495, p. 1—10.
9. Галиуллин Р. Г., Халимов Г. Г. Исследование нелинейных колебаний газа в открытых трубах.— Инж.-физ. ж., 1979, т. 37, № 6, с. 1043—1050.
10. Sturtevant B., Keller J. J. Subharmonic nonlinear acoustic resonances in open tubes. Pt II. Experimental Investigation of the Open End Boundary Condition.— ZAMP, 1978, v. 29, p. 473—485.

Казанский государственный
университет им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступила в редакцию
3.IV.1985