АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXII 1986 Вып. 5

УДК 551.463

ОБ ОДНОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ АКУСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА НА ВНУТРЕННИХ ВОЛНАХ В ПОДВОДНОМ ЗВУКОВОМ КАНАЛЕ

Сазонтов А. Г., Фарфель В. А.

Исследуется влияние внутренних волн на распространение тонального акустического сигнала в подводном звуковом канале. В борновском приближении получено общее выражение для сечения трансформации нормальных мод на объемных неоднородностях среды. На спектре Гаррета – Манка, описывающем случайное поле внутренних волн, вычислены коэффициенты экстинкции в зависимости от номера моды акустического волновода.

Как известно, при распространении звука в хаотически-неоднородных волноводах происходит ослабление когерентной компоненты, обусловленное процессами рассеяния. В связи с этим возникает задача о нахождении сечения рассеяния и соответствующего декремента затухания среднего поля. Для волноводов с шероховатыми стенками решение этой задачи подробно изложено в монографии [1]. Вычисление коэффициентов экстинкции нормальных мод в волноводах с объемными неоднородностями приведено в [2], где при получении конечных формул считалось, что средний акустический показатель преломления равен единице, а в качестве спектра флуктуаций использовалась упрощенная модель с гауссовой корреляционной функцией.

Настоящая работа посвящена нахождению сечения трансформации мод акустического волновода на объемных неоднородностях океанической среды. При этом основное внимание уделено изучению эффектов, связанных с регулярной рефракцией, статистической анизотропией и неоднородностью распределения флуктуаций показателя преломления по сечению волновода.

Рассмотрим океанический звуковой волновод, в котором акустический показатель преломления наряду с регулярной составляющей $n_0(z)$ (z — вертикальная координата) содержит также флуктуационную компоненту $\mu(\mathbf{r}, z)$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости). Будем считать, что неоднородности занимают некоторую область пространства с характерным линейным горизонтальным размером L и на эту область падает акустическая волна, поле давления которой $p_0(\mathbf{r}, z)$ представляет собой неоднородную плоскую волну, имеющую по вертикали структуру n-й нормальной моды

$$p_0(\mathbf{r}, z)=A_n\varphi_n(z)\exp(i\beta_n\mathbf{n}_i\mathbf{r}). \tag{1}$$

Здесь A_n — коэффициент возбуждения, $\mathbf{n}_i$ — единичный вектор в направлении распространения, $\varphi_n(z)$ и β_n^2 — соответственно собственная функция и собственное значение, принадлежащие дискретному спектру оператора $d^2/dz^2+k^2n_0^2(z)$ (k — волновое число в однородной среде). В результате действия флуктуаций звуковое поле во всем пространстве волновода исказится и примет вид $p(\mathbf{r}, z)=p_0(\mathbf{r}, z)+p_s(\mathbf{r}, z)$, где $p_s(\mathbf{r}, z)$ соответствует рассеянным волнам. При выполнении условия $[\langle\mu^2\rangle]^{1/2}\ll n_0$ для нахождения $p_s(\mathbf{r}, z)$ ограничимся борновским приближением

$$\Delta p_s(\mathbf{r}, z)+k^2n_0^2(z)p_s(\mathbf{r}, z)=-2k^2n_0(z)\mu(\mathbf{r}, z)p_0(\mathbf{r}, z). \tag{2}$$

Уравнение (2) необходимо дополнить стандартными граничными усло-

виями на невозмущенной свободной поверхности $z=0$ и дне $z=H$ [1], а также условием излучения на бесконечности. Решение неоднородного уравнения (2) дается выражением $p_s(\mathbf{r}, z)=-2k^2\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}'; z, z')n_0(z')\times\times p_0(\mathbf{r}', z')d^2\mathbf{r}'dz'$,
где

$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z, z')=-\frac{i}{4}\sum_m \varphi_m(z)\varphi_m(z')H_0^1(\beta_m|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ — функция Грина регулярного волновода (см., например, [3]), $H_0^1(\cdot)$ — функция Ханкеля первого рода, суммирование производится по всем распространяющимся модам. На расстояниях, принадлежащих зоне дифракции Фраунгофера (т. е. при выполнении условий $r\gg L$, $r\gg kLl_\perp$, где $l_\perp$ — горизонтальный радиус корреляции флуктуаций), для $p_s(\mathbf{r}, z)$ следует

$$p_s(\mathbf{r}, z)=-\frac{ik^2A_ne^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi r}}\sum_m \frac{\varphi_m(z)}{\sqrt{\beta_m}}e^{i\beta_m r}\int_S \mu_{nm}(\mathbf{r}')e^{i(\beta_n\mathbf{n}_i-\beta_m\mathbf{n}_s)\mathbf{r}'}d^2\mathbf{r}'. \qquad (3)$$

Здесь $\mathbf{n}_s=\mathbf{r}/r$ — единичный вектор в направлении рассеяния, S — горизонтальная площадь области, занятой неоднородностями (начало координат помещено внутри рассеивающего объема и r — расстояние от него до точки наблюдения),

$$\mu_{nm}(\mathbf{r})=\int_0^H n_0(z)\mu(\mathbf{r}, z)\varphi_n(z)\varphi_m(z)dz.$$

Ниже нам понадобится среднее за период одного колебания $2\pi/\omega$ значение плотности потока акустической энергии на единицу горизонтальной площади, которое определяется посредством

$$\mathbf{\Pi}=(2\omega\rho)^{-1}\,\mathrm{Im}\int_0^H p^*\nabla_\perp p\,dz \qquad (4)$$

(ρ — плотность среды, $\nabla_\perp$ — горизонтальный градиент). Согласно (4), плотность потока энергии в первичной волне (1) равна

$$\mathbf{\Pi}_0=\mathbf{n}_i|A_n|^2(\beta_n/2\omega\rho). \qquad (5)$$

Вычислим теперь среднюю плотность потока однократно рассеянной энергии $\mathbf{\Pi}_s$ в волновой зоне. Для этого подставим (3) в (4) и усредним полученное соотношение по ансамблю реализаций случайного поля μ, полагая, что неоднородности в пределах занимаемой ими области являются статистически однородными и изотропными по горизонтали, так что соответствующая корреляционная функция может быть представлена в виде $\langle\mu(\mathbf{r}', z')\mu(\mathbf{r}'', z'')\rangle=B_\mu(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|, z'-z'', (z'+z'')/2)$. При этом будем считать, что B_μ медленно (в масштабе вертикального радиуса корреляции) зависит от координаты центра тяжести $(z_1+z_2)/2$. В результате для $\mathbf{\Pi}_s$ нетрудно найти

$$\mathbf{\Pi}_s=\mathbf{n}_s\pi k^4|A_n|^2S(\omega\rho r)^{-1}\sum_m F_\mu^{nm}(\beta_n\mathbf{n}_i-\beta_m n_s), \qquad (6)$$

где $F_\mu^{nm}(\varkappa)$ дается формулой

$$F_\mu^{nm}(\varkappa)=\int_0^H dz_1\int_0^H dz_2\, n_0(z_1)n_0(z_2)F_\mu(\varkappa, z_1, z_2)\varphi_n(z_1)\varphi_m(z_1)\varphi_n(z_2)\varphi_m(z_2), \qquad (7)$$

[1] В дальнейшем нас будет интересовать поле на больших расстояниях от рассеивающего объема, при этом наиболее существенными являются волны, не взаимодействующие с дном и поверхностью, и поэтому детальный вид граничных условий не имеет особого значения.

в которой

$$F_\mu(\boldsymbol{\varkappa}, z_1, z_2)=\int_{-\infty}^{\infty} B_\mu(\boldsymbol{\rho}, z_1, z_2)\exp(-i\boldsymbol{\varkappa\rho})\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{(2\pi)^2}$$

двумерный спектр флуктуаций, $\boldsymbol{\varkappa}=(\varkappa_x, \varkappa_y)$ — волновой вектор в горизонтальной плоскости. Дифференциальное сечение рассеяния единицы площади случайно-неоднородной среды записывается следующим образом:

$$\sigma_n(\varphi)=|\mathbf{\Pi}_s|r/|\mathbf{\Pi}_0|S, \tag{8}$$

где φ — угол рассеяния (угол между векторами $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}_s$). Привлекая соотношения (5), (6), из (8) имеем

$$\sigma_n(\varphi)=2\pi k^4\beta_n^{-1}\sum_m F_\mu^{nm}(\beta_n\mathbf{n}_i-\beta_m\mathbf{n}_s). \tag{9}$$

Для изотропных по горизонтали флуктуаций из (9) вытекает

$$\sigma_n(\varphi)=2\pi k^4\beta_n^{-1}\sum_m F_\mu^{nm}([\beta_n^2-2\beta_n\beta_m\cos\varphi+\beta_m^2]^{1/2}). \tag{10}$$

Обратимся к вычислению пространственного декремента затухания среднего поля по мощности. Искомая величина представляет собой полный поперечник рассеяния

$$\sigma_n^t=2\int_0^\pi \sigma_n(\varphi)\,d\varphi. \tag{11}$$

Принимая здесь $\beta_n^2-2\beta_n\beta_m\cos\varphi+\beta_m^2=\varkappa^2$ за новую переменную интегрирования, можно переписать (11) в виде

$$\sigma_n^t=\sum_m\sigma_{nm}=\sum_m\frac{8\pi k^4}{\beta_n}\int_{|\beta_n-\beta_m|}^{\beta_n+\beta_m}\frac{F_\mu^{nm}(\varkappa)\varkappa\,d\varkappa}{[[(\beta_n+\beta_m)^2-\varkappa^2][\varkappa^2-(\beta_n-\beta_m)^2]]^{1/2}} \tag{12}$$

где σ_{nm} имеет смысл сечения трансформации n-й моды в m-ю, M — число распространяющихся мод. Проанализируем выражение для σ_n^t в предельных случаях. Пусть неоднородности являются крупномасштабными по горизонтали, т. е. $kl_\perp\gg1$. Делая подстановку $\varkappa_y^2=\varkappa^2-(\beta_n-\beta_m)^2$ и заменяя верхний предел интегрирования в (12) на бесконечность, для σ_n^t получим

$$\sigma_n^t=\frac{8\pi k^4}{\beta_n}\sum_{m=0}^M\frac{1}{\sqrt{\beta_m\beta_n}}\int_0^\infty F_\mu^{nm}([(\beta_n-\beta_m)^2+\varkappa_y^2]^{1/2})\,d\varkappa_y\,(kl_\perp\gg1). \tag{13а}$$

При $kl_\perp\ll1$ в существенной области интегрирования можно пренебречь изменением спектра $F_\mu^{nm}(\varkappa)$, считая его мало отличающимся от значения при $\varkappa=0$. Тогда

$$\sigma_n^t=4\pi k^4\beta_n^{-1}\sum_{m=0}^M F_\mu^{nm}(\beta_n-\beta_m). \tag{13б}$$

Рассчитаем корреляционную матрицу $F_\mu^{nm}(\boldsymbol{\varkappa})$, определяемую формулой (7), в случае, когда регулярный профиль скорости звука плавно изменяется на вертикальном радиусе корреляции флуктуаций и длине волны (так что для определения $\varphi_n(z)$ и β_n вполне допустимо использование ВКБ-приближения).

Рассмотрим моды акустического волновода, локализованные в области между двумя горизонтами поворота z_n' и z_n''. ВКБ-решение для $\varphi_n(z)$

имеет вид [4]

$$\varphi_n(z)=\begin{cases} C_n\gamma_n(z)^{-1/2}\cos\Phi_n(z), & z_n''<z<z_n', \\ \infty 0, & z<z_n'',\ z>z_n'. \end{cases} \qquad (14)$$

Здесь $\Phi_n(z)=\int\limits^{z_n'}[k^2n_0^2(z)-\beta_n^2]^{1/2}\,dz-\pi/4, \qquad \gamma_n=[n_0^2(z)-\beta_n^2/k^2]^{1/2}$, C_n — нормировочная константа, связанная с длиной цикла Λ_n посредством $C_n=(4\cos\theta_n/\Lambda_n)^{1/2}$, где $\theta_n=\arccos\beta_n/k$ — угол скольжения n-й моды на оси подводного звукового канала. Постоянные распространения β_n лежат в интервале $kn_\infty\leqslant\beta_n\leqslant k\max n_0(z)$, где $n_\infty=\max\{n_0(0),n_0(H)\}$ (максимальное значение $n_0(z)$ достигается на оси канала и в дальнейшем принято за единицу, кроме этого будем полагать, что $n_0(0)>n_0(H)$) и определяются из условия квантования Бора — Зоммерфельда

$$k\int\limits_{z_n''}^{z_n'}\gamma_n(z)\,dz=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n=0,1,2,\dots .$$

При расчете (7) будем полагать выполненными неравенства

$$|(n-m)/n|\ll 1; \quad n\gg 1, \quad m\gg 1, \qquad (15)$$

аналогичные тем, которые используются при вычислении квазиклассических матричных элементов (см., например, [4]).

Используя (14), для $F_\mu^{nm}(\varkappa)$ имеем

$$F_\mu^{nm}(\varkappa)=C_n^2C_m^2\int\limits_{z_<}^{z_>}dz_1\int\limits_{z_<}^{z_>}dz_2 n_0(z_1)\,n_0(z_2)\,F_\mu(\varkappa,z_1,z_2)\times$$

$$\times\frac{\cos\Phi_n(z_1)\cos\Phi_m(z_1)\cos\Phi_n(z_2)\cos\Phi_m(z_2)}{[\gamma_n(z_1)\,\gamma_m(z_1)\,\gamma_n(z_2)\,\gamma_m(z_2)]^{1/2}}, \qquad \begin{matrix} z_<=\max\{z_n'',z_m''\}, \\ z_>=\min\{z_n',z_m'\}. \end{matrix} \qquad (16)$$

Перейдем в (16) к новым переменным интегрировании $\xi=z_1-z_2$, $z=(z_1+z_2)/2$. Существенный вклад в (16) при интегрировании по ξ дает только узкая полоса $|\xi|\ll l_\parallel$ ($l_\parallel$ — радиус корреляции неоднородностей в вертикальной плоскости), в пределах которой F_μ заметно отлична от нуля. Полагая, что характерный вертикальный масштаб локализации волнового поля превышает $l_\parallel$ (т. е. $|z_>-z_<|>l_\parallel$), пределы интегрирования по ξ можно сделать бесконечными, а интеграл по z брать от $z_<$ до $z_>$. Поскольку $n_0(z)$ является плавной функцией, то в существенной области интегрирования $n_0(z\pm\xi/2)\approx n_0(z)$. Далее, при выполнении неравенства $(1/8)\gamma_n^{-1}kl_\parallel^2n_0(z)\,dn_0/dz\ll\pi$ можно ограничиться линейным по ξ членом разложения функций $\Phi_{n,m}(z\pm\xi/2)$: $\Phi_{n,m}(z\pm\xi/2)\approx\Phi_{n,m}(z)\mp q_{n,m}(z)\,\xi/2$, где $q_{n,m}(z)=[k^2n_0^2(z)-\beta_{n,m}^2]^{1/2}$ — локальное вертикальное волновое число. Принимая во внимание соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_\mu(\varkappa,\xi,z)\cos q\xi\,d\xi=2\pi\Phi_\mu(\varkappa,q,z),$$

связывающее двумерную F_μ и локальную трехмерную Φ_μ спектральные плотности, и отбрасывая под интегралом быстроосциллирующие слагаемые, содержащие $\cos(\Phi_n+\Phi_m)$, после несложных преобразований для недиагональных элементов F_μ^{nm} найдем

$$F_\mu^{nm}(\varkappa)=\frac{4\pi}{\Lambda_n\Lambda_m}\int\limits_{z_<}^{z_>}dz n_0^2(z)\operatorname{ctg}\theta_n(z)\operatorname{ctg}\theta_m(z)\times$$

$$\times[\Phi_\mu(\varkappa,q_n(z)-q_m(z);z)+\Phi_\mu(\varkappa,q_n(z)+q_m(z);z)]. \qquad (17)$$

Здесь $\theta_n(z)$ — угол скольжения бриллюэновской волны на произвольном горизонте z (при этом $n_0(z)\cos\theta_n(z)=\cos\theta_n$). Из (17) видно, что в рассеянии принимает участие лишь та компонента в спектре неоднородностей, у которой вертикальное волновое число $\varkappa_z$ удовлетворяет локальному условию Брэгга: $\varkappa_z=q_n(z)\pm q_m(z)$. Для диагональных элементов спектральной матрицы $F_\mu^{nn}(\varkappa)$ выражение (17) не работает, поскольку в точках заворота оно дает расходящийся результат. Это обусловлено тем, что в точках заворота ВКБ-приближение несправедливо и для расчета F_μ^{nn} необходимо знать точное представление для собственных функций во всем диапазоне изменения z. Однако для дальнейшего явный вид F_μ^{nn} не потребуется. Дело в том, что величина F_μ^{nn} отвечает за рассеяние моды номера n в себя. Такой процесс будет преобладающим, если неоднородности настолько крупномасштабны, что их радиус корреляции существенно превышает длину цикла [1]. В океанических условиях, как правило, имеет место противоположное неравенство, так что основной вклад в $\sigma_n{}^t$ обязан процессам перерассеяния в другие моды (т. е. $\sum\limits_{m\neq n}\sigma_{nm}\gg\sigma_{nn}$).

С учетом (15), (17) асимптотические формулы (13) могут быть представлены в виде

$$\sigma_n{}^t=\frac{4\pi k^2}{\Lambda_n}\int\limits_{z_<}^{z_>}\frac{dz}{\cos^2\theta_n(z)}\operatorname{ctg}\theta_n(z)\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\varkappa_y\int\limits_{-k[n_F(z)-\sin\theta_n(z)]}^{k[n_F(z)+\sin\theta_n(z)]}d\varkappa_z\times$$
$$\times\,\Phi_\mu(\varkappa_z\operatorname{tg}\theta_n(z),\varkappa_y,\varkappa_z;z),\ \ (kl_\perp\gg1);\tag{18а}$$

$$\sigma_n{}^t=\frac{8\pi k^3}{\Lambda_n}\cos\theta_n\int\limits_{z_<}^{z_>}\frac{dz}{\cos^2\theta_n(z)}\operatorname{ctg}\theta_n(z)\int\limits_{-k[n_F(z)-\sin\theta_n(z)]}^{k[n_F(z)+\sin\theta_n(z)]}d\varkappa_z\times$$
$$\times\,\Phi_\mu(\varkappa_z\operatorname{tg}\theta_n(z),0,\varkappa_z;z),\ \ (kl_\perp\ll1),\tag{18б}$$

где введено обозначение $n_F(z)=[n^2(z)-n_\infty{}^2]^{1/2}$. При выводе (18) суммирование по модам заменено интегрированием, при этом считалось, что $M\gg1$ и длина цикла существенно превышает радиусы корреляции флуктуаций, а также привлечено соотношение, вытекающее из условия квантования Бора — Зоммерфельда:

$$\sum_{m=0}^{M}(\ldots)\to\int\limits_0^M dm(\ldots)=-\int\limits_{kn_\infty}^{k}d\beta_m\frac{\Lambda_m}{2\pi}(\ldots)=$$
$$=\int\limits_0^{kn_F(z)}dq_m(z)\operatorname{tg}\theta_m(z)\frac{\Lambda_m}{2\pi}(\ldots).$$

Кроме этого, в силу (15) было использовано приближенное равенство $\beta_n-\beta_m\approx\operatorname{tg}\theta_n(z)[q_n(z)-q_m(z)]$. Отметим, что при выполнении неравенства $kl_\parallel(\sin\theta_{cr}-\sin\theta_n)\gg1$, где $\theta_{cr}=\arccos n_\infty$ — критический угол волновода, пределы интегрирования по $\varkappa_z$ в (18) можно распространить до бесконечности.

Применим полученные формулы для вычисления коэффициентов экстинкции нормальных мод при рассеянии на случайном поле внутренних волн. Для этого, следуя [5], примем, что частота Вяйсяля $N(z)$ изменяется с глубиной по закону $N(z)=N_0\exp\{-z/\mathbf{B}\}$. Распределению $N(z)$ такого вида, как показано в [5], соответствует канонический профиль скорости звука $c(z):c(z)=c_0[1+\varepsilon(e^{-\eta}+\eta-1)]$, $\eta=2(z-z_0)/B$ (c_0 — скорость звука на оси канала $z=z_0$, $\varepsilon=1{,}14\cdot10^2$ B/2 км$^{-1}$). Наличие случайного поля внутренних волн приводит к вертикальным смещениям $\xi(\mathbf{r},z)$ слоев жидкости океанического волновода, что вызывает возникновение флуктуаций акустического показателя преломления $\mu(\mathbf{r},z)=-c^{-1}(\partial c/\partial z)_p\xi(\mathbf{r},z)\times$ $\times((\partial c/\partial z)_p$ — потенциальный градиент скорости звука. При использовании для спектра вертикальных смещений модели Гаррета — Манка [6] для

Φ_μ непосредственно следует [7]

$$\Phi_\mu(\varkappa, j, z) = \frac{2}{\pi}\langle \mu^2(z)\rangle (f_i/N_0)\,|\varkappa|\,[\varkappa^2+(j\pi f_i/N_0B)^2]^{-2}B^{-1}jH(j);$$

$$H(j)=H_\infty^{-1}(j^2+j_*^2)^{-1};\qquad H_\infty=\frac{\pi}{2j_*}[\operatorname{cth}(\pi j_*)-(\pi j_*)^{-1}]. \tag{19}$$

Здесь $\langle\mu^2(z)\rangle$ — дисперсия флуктуаций, определяемая посредством $\langle\mu^2(z)\rangle=\langle\mu_0^2\rangle(N(z)/N_0)^3$, f_i — инерционная частота, j — номер моды внутренней волны, j_* — фиксированная константа. Горизонтальное $\varkappa$ и вертикальное $\varkappa_z$ волновые числа в спектре Гаррета — Манка связаны с частотой Ω и номером моды j дисперсионным соотношением $\varkappa=(j\pi/BN_0)\times\times(\Omega^2-f_i^2)^{1/2}$, $\varkappa_z=j\pi B^{-1}(N/N_0)$.

Рассмотрим вначале случай крупномасштабных неоднородностей $kl_\perp\gg1$, $kl_\parallel(\sin\theta_{cr}-\sin\theta_n)\gg1$ (для случайного поля внутренних волн согласно [7] $l_\perp=\pi(N_0/f_i)B/\{8j_*[\ln(N/f_i)-1/2]\}$, $l_\parallel=B(N_0/N)(\pi j_*-1)^{-1}$). Подстановка (19) в формулу (18) (в которой пределы интегрирования по $\varkappa_z$ распространены до бесконечности) приводит к результату

$$\sigma_n{}^t=\frac{8}{\pi^2}\langle j^{-1}\rangle\frac{N_0}{f_i}\frac{k^2B}{\Lambda_n}\int\limits_{z_<}^{z_>}\frac{dz}{\cos^2\theta_n(z)}\langle\mu^2(z)\rangle\operatorname{ctg}\theta_n\times$$

$$\times(z)f_1\left(\frac{N}{f_i}\operatorname{tg}\theta_n(z)\right), \tag{20}$$

где

$$f_1(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x^2}{2(x^2+1)^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1},\qquad x=\frac{N(z)}{f_i}\operatorname{tg}\theta_n(z),$$

$$\langle j^{-1}\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1}H(j).$$

Обратим внимание, что формула (20) может быть также найдена из другого подхода, основанного на определении дисперсии флуктуаций фазы акустического поля в геометрооптическом приближении [7, 8].

Проанализируем (20) в зависимости от угла скольжения θ_n, составляемого бриллюэновской волной с осью канала. При $\theta_n\leqslant f_i/N(z_0)$ с достаточной степенью точности можно канонический профиль аппроксимировать параболическим $n_0^2(z)\approx1-\alpha^2(z-z_0)^2$, $\alpha=2\sqrt{\varepsilon}/B$, при этом $\Lambda_n==\pi B\cos\theta_n/\sqrt{\varepsilon}$. Тогда из (20) следует

$$\sigma_n{}^t=\frac{4}{\pi^2}\langle j^{-1}\rangle\frac{N_0}{f_i}k^2B\langle\mu^2(z_0)\rangle[(1+\tau_n^2)^{-1/2}+(\tau_n^2/4)\ln(8/\tau_n^2)],$$

$$\tau_n=(N(z_0)/f_i)\operatorname{tg}\theta_n. \tag{21}$$

Для мод, пересекающих ось канала под достаточно большим углом и заворачивающих вблизи поверхности, основной вклад в (20) дает окрестность точки заворота $z_<=z_0+(B/2)\ln(\sin^2\theta_n/2\varepsilon)$, поскольку здесь подынтегральная функция принимает максимальное значение. Вблизи этой точки $n_0^2(z)\simeq n_0^2(z_<)[1+2(z-z_<)/R_n]$, где $R_n^{-1}=n_0^{-1}dn_0/dz|_{z=z<}$ — радиус кривизны бриллюэновской волны (для канонического профиля $R_n^{-1}==(2\varepsilon/B)[\exp[-(z-z_<)/B]-1]$). В итоге для $\sigma_n{}^t$ имеем

$$\sigma_n{}^t=\frac{8}{\pi^2}\langle j^{-1}\rangle\langle\mu^1(z_<)\rangle\frac{N_0}{N(z_<)}\frac{k^2BR_n}{\Lambda_n\cos^2\theta_n}\int\limits_0^\infty f_1(x)\,dx. \tag{22}$$

Интеграл $\int\limits_0^\infty f_1(x)\,dx$ подстановкой $[x^2+1]^{1/2}=y$ сводится к табличному и равен $\pi^2/4$. Из сопоставления (21) и (22) вытекает, что наиболее сильно ослабляются моды, распространяющиеся под малыми углами к оси канала, вдоль которой вытянуты случайные неоднородности. Так, для типичных значений параметров, фигурирующих в спектре внутренних волн: $\langle\mu_0^2\rangle = 2{,}5\cdot 10^{-7}$, $N_0=5{,}2\cdot 10^{-3}$ рад/с, $f_i=7{,}3\cdot 10^{-5}$ рад/с (для широты 30°), $z_0=B=1$ км, $j_*=3$, $\langle j-1\rangle=0{,}435$, величина $\sigma_n{}^t$ достигает максимального значения при $\theta_n\simeq f_i/N(z_0)\approx 2°$ и оказывается равной $\sigma_n{}^t(\theta_n=2°)=2{,}8f^2$ км$^{-1}$$=12f^2$ дБ/км; (f — частота звука в килогерцах).

Приведем теперь выражение для коэффициентов экстинкции в практически интересном случае $kl_\perp\gg 1$, $kl_\parallel \sin\theta_{cr}\ll 1$:

$$\sigma_n{}^t = \frac{8}{\pi^3} H_\infty^{-1} j_*^{-2} \frac{N_0{}^2}{f_i} \frac{k^3B^2}{\Lambda_n} \int\limits_{z_<}^{z_>} \frac{dz\,\langle\mu^2(z)\rangle}{\cos^2\theta_n(z)} \operatorname{ctg}\theta_n(z) \times$$
$$\times\, n_F(z) N^{-1}(z) f_1\left(\frac{N(z)}{f_i}\operatorname{tg}\theta_n(z)\right). \qquad (23)$$

В рассматриваемом приближении зависимость $\sigma_n{}^t$ от частоты дается множителем f^3. При малых и больших углах скольжения из (23) соответственно следует

$$\sigma_n{}^t = \frac{8}{\pi^4} H_\infty{}^{-1} j_*{}^{-2} \frac{N_0{}^2}{f_i N(z_0)} k^3B^2\langle\mu^2(z_0)\rangle \sin\theta_{cr} E\left(\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_{cr}}\right), \qquad \theta_n\leqslant f_i/N(z_0),$$

$$\sigma_n{}^t = \frac{4}{\pi^3} H_\infty{}^{-1} j_*{}^{-2} \frac{N_0{}^2 f_i}{N^3(z_<)} \frac{k^3B^2R_n}{\Lambda_n} \langle\mu^2(z_<)\rangle [C+\ln(2BN^2(z_<)/3R_nf_i{}^2)],$$
$$\theta_n\gg f_i/N(z_0).$$

Здесь E — полный эллиптический интеграл 2-го рода, $C=0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера. В частности, при $\theta_n=0$ $\sigma_n{}^t(\theta_n=0)=2{,}4\cdot 10^4 f^3 \sin\theta_{cr}$ дБ/км (f — в кГц).

В заключение отметим, что использование борновского приближения, как известно, [9] накладывает ограничение на горизонтальный размер L рассеивающей области $\sigma_n{}^t L\ll 1$. Прежде всего это неравенство нарушается для мод, имеющих малые углы скольжения, и здесь необходимо учитывать эффекты многократного рассеяния. Подчеркнем, что привлечение метода ВКБ для расчета корреляционной матрицы предполагает лишь плавность изменения регулярного профиля $c(z)$, при этом соотношение между длиной волны и горизонтальным радиусом корреляции неоднородностей может быть произвольным, так что общие формулы (9), (17) выходят за рамки обычной статистической геометрической акустики и лишь в предельном случае крупномасштабных неоднородностей они дают результат, совпадающий с выводами, получающимися с помощью прямого использования лучевого подхода.

Авторы выражают признательность Л. С. Долину и В. И. Таланову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
2. *Лапин А. Д.* Затухание среднего поля в нерегулярном волноводе.— Акуст. журн., 1977, т. 23, № 1, с. 74–80.
3. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
4. *Мигдал А. Б.* Качественные методы в квантовой теории поля. М.: Наука, 1975.
5. *Munk W. H.* Sound channel in an exponentially stratified ocean with application to SOFAR.— J. Acoust. Soc. Amer., 1974, v. 55, № 2, p. 220–226.
6. *Garrett C. J., Munk W. H.* Space-time scales of internal waves: a progress report.— J. Geophys. Res., 1975, v. 80, № 3, p. 291–297.
7. *Munk W. N., Zachariasen F.* Sound propagation through fluctuating stratified ocean: theory and observation.— J. Acoust. Soc. Amer., 1976. v. 59, № 4, p. 818–838.
8. Распространение звука во флуктуирующем океане/Под ред. Флатте С. М.: Мир, 1982.
9. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Мир, 1978.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4.VI.1985