АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXII 1986 Вып. 5

УДК 551.46.086

ПОЛЕ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА В ГОРИЗОНТАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ВОЛНОВОДЕ

Середов А. М.

Рассмотрена задача о поле источника конечных размеров в горизонтально стратифицированном волноводе в представлении нормальных волн. Получено разложение, сходное с мультипольным разложением оператора Лапласа, но отражающее направленные свойства излучения.

В настоящее время при изучении распространения акустических волн в океане источник гармонических сигналов, как правило, считается точечным. Анализу полей, источников, имеющих конечные размеры, посвящено ограниченное число работ, не дающих достаточно общих представлений.

Потребность в таких исследованиях определяется практической необходимостью, чем, видимо, обусловлено появление в последнее время целого ряда работ, касающихся расчета полей (или откликов) линейных или плоских антенн [1–3]. Цель данной статьи – попытка более общего подхода к указанной проблеме.

Пусть задана некоторая гладкая поверхность S_0 и известно распределение потенциала давления Φ и колебательной скорости Ψ на ней. Эта поверхность находится в горизонтально стратифицированном волноводе с границами S_1. Считая поверхность S_0 акустически прозрачной (т. е., пренебрегая дифракцией и рассеянием акустических волн на ней), имеем задачу с неоднородными граничными условиями для поля $P(\mathbf{r})$ такого источника:

$$\begin{gathered}
\Delta P(\mathbf{r})+k^2(z)P(\mathbf{r})=0,\\
P(\mathbf{r})\big|_{z=0}=0,\\
\rho_0 P(\mathbf{r})\big|_{z=-H+0}=\rho_1 P(\mathbf{r})\big|_{z=-H-0},\\
\left.\frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial z}\right|_{z=-H+0}=\left.\frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial z}\right|_{z=-H-0}\\
P(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in S_0}=\Phi(\mathbf{r}_0)\quad \text{или}\quad \left.\frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial n_0}\right|_{\mathbf{r}\in S_0}=\Psi(\mathbf{r}_0),\\
P(\mathbf{r})\to 0,\quad |\mathbf{r}|\to\infty,
\end{gathered}\tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа, $k(z)=\omega_0/c(z)$; ω_0 – круговая частота гармонического сигнала, $c(z)$ – зависимость скорости звука от глубины z в волноводе, $\mathbf{r}=\{r, z, \varphi\}$ – радиус-вектор в цилиндрической системе координат, ρ_0, ρ_1 – плотность воды и жидкого грунта, заданного в виде однородного полупространства, $\mathbf{n}_0$ – вектор нормали к поверхности S_0, H – толщина водного слоя.

Решение задачи (1) представимо через функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ данного волновода:

$$P(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_0}\left\{G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\Psi(\mathbf{r}_0)-\Phi(\mathbf{r}_0)\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n_0}\right\}dS_0,\tag{2}$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ – является решением задачи

$$\begin{gathered}
\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+k^2(z)G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\\
G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\big|_{z=0}=0,\\
\rho_0 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\big|_{z=-H+0}=\rho_1 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\big|_{z=-H-0},
\end{gathered}\tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial z}\right|_{z=-H+0}=\left.\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial z}\right|_{z=-H-0},$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\to 0,\quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\to\infty,$$

$\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки поверхности S_0. Источник с заданными $\Phi(\mathbf{r}_0)$ или $\Psi(\mathbf{r}_0)$ на поверхности S_0 назовем поверхностным. Используя понятие точечного гармонического источника (пульсирующая сфера малого волновода радиуса), введем понятие объемного распределенного источника, заданного некоторой плотностью распределения объемной колебательной скорости $\rho(\mathbf{r}_0)$ точечных гармонических источников в ограниченном объеме V_0. Граничная задача для его поля описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\Delta P(\mathbf{r})+k^2(z)P(\mathbf{r})=-4\pi\rho(\mathbf{r}),\\ P(\mathbf{r})|_{z=0}=0,\\ \rho_0 P(\mathbf{r})|_{z=-H-0}=\rho_1 P(\mathbf{r})|_{z=-H+0},\\ \left.\frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial z}\right|_{z=-H-0}=\left.\frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial z}\right|_{z=-H+0},\end{gathered}\tag{4}$$

а ее решение выражением

$$P(\mathbf{r})=\iiint\limits_{V_0}\rho(\mathbf{r}_0)G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,dV_0.\tag{5}$$

Отметим, что постановка задачи (4) изложена в [4, с. 25]. Кроме того, первое слагаемое в правой части выражения (2) по существу эквивалентно интегралу (5). Поэтому остановимся на анализе поля объемного распределенного источника.

Для функции Грина горизонтально стратифицированного волновода известны различные представления [4, 5]. Рассмотрим функцию Грина в представлении нормальных волн, например для волновода Пекериса [5, с. 28]:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=A\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(z)\psi_n(z_0)H_0^{(1)}(k_nR)+U_{\text{Б.В.}},\tag{6}$$

где $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода, $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|_\Gamma$ — проекция вектора $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ на горизонтальную плоскость — $A=i/16$, $\psi_n(z)$ — нормированная собственная функция задачи Штурма — Лиувилля:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_n(z)+(k^2(z)-k_n^2)\psi_n(z)=0,\\ \psi_n(0)=0,\quad \rho_0\left.\dfrac{\partial\psi(z)}{\partial z}\right|_{z=-H-0}=\rho_1\left.\dfrac{\partial\psi(z)}{\partial z}\right|_{z=-H+0}.\end{array}\right.$$

Здесь $U_{\text{Б.В.}}$ — поле боковой волны, которое ослабевает с расстоянием r как r^{-2} в случае, когда частота гармонического сигнала не близка к критическим частотам волновода [6, с. 228]. Оно, как и поле затухающих нормальных волн, не дает существенного вклада в поле источника на достаточном удалении и поэтому не учитывается. Более того, при расчетах акустических полей в реальных волноводах учитываются вклады от распространяющихся нормальных волн, убывающие с расстоянием только как $r^{-1/2}$, что выражается в использовании асимптотики функции Ханкеля в главном порядке.

Следуя этому, получаем для поля $P(\mathbf{r})$ объемного распределенного источника

$$P(\mathbf{r})\approx Ae^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{N}\psi_n(z)\iiint\limits_{V_0}\psi_n(z_0)\rho(\mathbf{r}_0)\frac{\exp\{ik_nR\}}{(k_nR)^{1/2}}dV_0.\tag{7}$$

Следуя методам теории направленности [7, с. 15], разлагаем R/r в ряд по степеням: $t=r_0/r<1$, $R=r\sqrt{1+t^2-2t\mu}=r[1-t\mu+{}^1/{}_2t^2(1-\mu^2)+\ldots]$, $\mu=$

$=\cos(\varphi-\varphi_0)$, и оставляя в exp выражения (7) члены нулевого и первого порядков (для $^1/_2 t^2 k_n r \ll \pi$), а в знаменателе (7) — только нулевого, получим:

$$P(\mathbf{r}) \approx A e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{N} \psi_n(z) \frac{\exp\{ik_n r\}}{(k_n r)^{1/2}} D_n^{(0)}(\varphi, \rho), \tag{8}$$

$$D_n^{(0)}(\varphi, \rho) = \iiint\limits_{V_0} \psi_n(z_0) \rho(\mathbf{r}_0) e^{-ik_n r_0 \mu} dV_0. \tag{9}$$

Выражения (8), (9) описывают поле распространяющихся нормальных волн распределенного объемного источника. Функция $D_n^{(0)}(\varphi, 0)$ описывает коэффициент возбуждения нормальной волны номера n и зависимость ее амплитуды от угла φ. Особенно наглядно это видно в случае источников с распределением плотности $\rho(r_0)$ вида $\rho(r_0) = \rho_1(r_0, \varphi_0) \rho_2(z_0)$. Тогда

$$D_n^{(0)}(\varphi, \rho) = {}^1D_n^{(0)}(\varphi, \rho)\, {}^2D_n; \qquad {}^2D_n = \int_{-z_m}^{0} \psi_n(z_0) \rho_2(z_0) dz_0;$$

$${}^1D_n^{(0)}(\varphi, \rho) = \int_0^{R_m} \int_0^{2\pi} \rho_1(r_0, \varphi_0) e^{-ik_n r_0 \mu} r_0 \, dr_0 \, d\varphi_0$$

(здесь z_m и R_m — максимальные значения z_0 и r_0 соответственно, где $\rho(r_0) \neq 0$), ${}^2D_n$ — описывает интегральный коэффициент возбуждения моды номера n источником с плотностью $\rho_2(z_0)$, а ${}^1D_n^{(0)}$ — угловую зависимость амплитуды нормальной волны, создаваемую источником с плотностью $\rho_1(r_0, \varphi_0)$. Таким образом, имеем на достаточно большом удалении от источника (когда $r > r_0$ и $r \gg 2R_m^2/\lambda_n$, т. е. $^1/_2 t^2 k_n r \ll \pi$) распространяющиеся цилиндрические волны, с зависящими от угла амплитудами.

В работе [8] приводится решение задачи (4) с использованием мультипольного разложения функции Грина (6). Недостатками его являются отсутствие в явном виде угловой зависимости поля источника и невозможность разделения членов ряда по величине их вкладов в поле в зависимости от расстояния. Вместо мультипольного разложения можно получить разложение функции Грина по степеням r^{-l} ($l=0, 1, \ldots$), сохраняя в качестве нулевого члена выражение (9) [9]. Для этого представим функцию $H_0^{(1)}(k_n R)$ из (6) в виде

$$H_0^{(1)}(k_n R) = D \frac{\exp\{ik_n r\}}{(k_n r)^{1/2}} \exp\{ik_n r_0 F_1(t)\} F_2(t),$$

$$D \equiv e^{-i\pi/4} \sqrt{2/\pi}.$$

Явный вид F_1 и F_2 легко находится из представления Пуассона для $H_0^{(1)}(z)$. Эти функции регулярны в окрестности точки $t=0$ и, следовательно, два последних сомножителя могут быть разложены в ряд по степеням r^{-l}:

$$H_0^{(1)}(k_n R) = D \frac{\exp\{ik_n r\}}{(k_n r)^{1/2}} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^{-l}. \tag{10}$$

Для отыскания коэффициентов A_l воспользуемся уравнением (3) и представлением (6):

$$\hat{L}_{r,\varphi} H_0^{(1)}(k_n R) = -\frac{4\pi}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \tag{11}$$

где $\hat{L}_{r,\varphi} \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_n^2$ — радиально-угловая часть оператора $\Delta + k_n^2$.

Сравнивая коэффициенты A_l при членах с одинаковыми степенями r в левой части (11), получаем рекуррентную формулу:

$$A_{l+1} = \frac{1}{2ik_n(l+1)}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \left\{l(l+1) + \frac{1}{4}\right\}\right]A_l,$$

а для A_0 из явного вида F_1 и F_2 находим

$$A_0 = \exp\{-ik_n r_0 \mu\}.$$

Подставляя (10) в (6), получаем

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = B\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(z)\psi_n(z_0)\frac{\exp\{ik_n r\}}{(k_n r)^{1/2}}\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^{-l} + U_{\text{Б.В.}} \qquad (12)$$

а для поля $P(\mathbf{r})$ распространяющихся нормальных волн

$$P(\mathbf{r}) \approx B\sum_{n=0}^{N}\psi_n(z)\frac{\exp\{ik_n r\}}{(k_n r)^{1/2}}\sum_{l=0}^{\infty}r^{-l}D_n^{(l)}(\varphi, \rho), \qquad (13)$$

$$D_n^{(l)}(\varphi, \rho) = \iiint\limits_{V_0}\tilde{A}_l(\varphi, \varphi_0, r_0)\psi_n(z_0)\rho(\mathbf{r}_0)e^{-ik_n r_0 \mu}\,dV_0, \qquad (14)$$

где $B = AD$, $\tilde{A}_l(\varphi, \varphi_0 r_0) = A_l/A_0$.

Нулевой член ($l=0$) соответствует (8) и (9). Полученное разложение аналогично мультипольному разложению для уравнения Лапласа ($\omega_0 = 0$ — электростатическая система зарядов) в том, что каждый член ряда убывает пропорционально r^{-l} и обладает характерной угловой зависимостью. Однако, в отличие от него разложение (13), (14) характеризуется более сложной угловой зависимостью. Так монопольный член дает изотропное поле, а нулевой член в (13) зависит от φ как $D_n^{(0)}(\varphi, \rho)$, дипольный член дает зависимость от φ как $\cos\varphi$, а член с $l=1$ в (13) — $D_n^{(1)}(\varphi, \rho)$. Пусть, например,

$$\rho(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{r_0}\delta\left(r_0 - \frac{R_0}{2}\right)\delta(z_0 - z_1)\left[\delta(\varphi_0) + e^{-i\pi}\delta(\varphi_0 - \pi)\right], \qquad (15)$$

тогда (множитель $e^{-i\pi}$ соответствует излучению в противофазе): ${}^2D_n = \psi_n(z_1)$,

$${}^1D_n^{(0)}(\varphi, \rho) = 2i\sin\left(\frac{1}{2}k_n R_0\cos\varphi\right), \qquad (16)$$

$${}^1D_n^{(1)}(\varphi, \rho) = \frac{1}{2ik_n}\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}ik_n^2 R_0^2\sin^2\varphi\right\}{}^1D_n^{(0)}(\varphi, \rho) + \\ + \frac{1}{2}R_0\cos\varphi\cos\left(\frac{1}{2}R_0 k_n\cos\varphi\right). \qquad (17)$$

Величина ${}^1D_n^{(0)}(\varphi, \rho)$ по существу совпадает с направленностью излучения источника в горизонтальной плоскости. Когда $k_n R_0 \ll 1$ ($k_n \to 0$), т. е. (15) описывает акустический диполь, для (16), (17) получаем

$${}^1D_n^{(0)}(\varphi, \rho) \approx ik_n R_0\cos\varphi \to 0,$$

$${}^1D_n^{(1)}(\varphi, \rho) \approx \frac{1}{2}R_0\cos\varphi\left[\frac{5}{4} - \frac{1}{2}ik_n^2 R_0^2\sin^2\varphi\right] \to \frac{5}{8}R_0\cos\varphi.$$

Поле боковой волны также может быть разложено по степеням r^{-l}, причем нулевой член $U^0_{\text{Б.В.}}$ допускает такую же оценку, как в [6, с. 228—232], и дает для случая частоты не очень близкой к критическим частотам волновода Пекериса: $U_{\text{б.в.}}^{(0)} \sim \frac{1}{r^2}$. Отсюда следует вывод о том, что полуцелый ряд по $r^{-(l+1/2)}$ $(l=0, 1, \ldots)$ для распространяющихся нормальных волн разложения (12) дополняется рядом по целым степеням $1/r : r^{-l}$ $(l=2, 3, \ldots)$ для поля боковой волны волновода Пекериса в случае, когда частота ω_0 не близка к критическим частотам.

Этот факт необходимо учитывать при расчете полей дипольных и более высоких порядков источников.

Полученные разложения для поля распространяющихся нормальных волн не зависят от явного вида собственных функций $\psi_n(z)$ и, следовательно, могут быть использованы при расчетах полей для любых горизонтально стратифицированных моделей волноводов. Однако роль поля боковой волны в этом случае, вообще говоря, заранее не ясна.

Для решения (2) задачи (1) может быть получено разложение, аналогичное (12), хотя и более громоздкое из-за второго слагаемого в правой части формулы (2). Разложение, аналогичное (10) и полученное в работе [9], может быть предложено наряду с мультипольным разложением для неоднородного уравнения Гельмгольца для безграничного однородного пространства.

В заключение автор выражает благодарность В. С. Буслаеву за ценные советы и замечания по данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Елисеевнин В. А.* О работе горизонтальной линейной антенны в мелком море.– Акуст. журн., 1983, т. 29, № 1, с. 44–49.
2. *Шарфарец Б. П.* Поле направленного излучателя в слоистом неоднородном волноводе.– Акуст. журн., 1985, т. 31, № 1, с. 119–125.
3. *Кравцов В. А., Кузькин В. М.* Об излучении антенны в многомодовом волноводе с плавно меняющимися параметрами.– Акуст. журн., 1985, т. 31, № 2, с. 207–210.
4. Распространение волн и подводная акустика/Под ред. Келлера Дж. Б., Пападакиса Дж. С. М.: Мир, 1980.
5. Акустика океана/Под ред. Де-Санто Дж. М.: Мир, 1982.
6. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
7. *Жуков В. Б.* Расчет гидроакустических антенн по диаграмме направленности. Л.: Судостроение, 1977.
8. *Haug A., Graves R. D., Uberall H.* Normal-mode theory of underwater sound propagation from directional multipole sources.– J. Acoust. Soc. Amer., 1974, v. 56, № 2, p. 387–391.
9. *Буслаев В. С.* Формулы следов и некоторые асимптотические оценки ядра резольвенты для оператора Шредингера в трехмерном пространстве.– Пробл. матем. физики, 1966, вып. 1, с. 82–101. Изд. ЛГУ.

Поступила в редакцию
4.XI.1985