

При $p_m \approx p_n$ аналогично (11) запишем

$$Q_2(t) = Q_2 = V_{\Gamma A} / t_2. \quad (13)$$

Определим основные энергетические соотношения для средних значений расходов Q_1 и Q_2 .

Падение давления на сопротивлении R_s' составляет $p_s = p_m R_s' / (R_{вн 2} + R_s')$. Акустическая мощность определяется соотношением (5). Условие максимальной излучаемой мощности определим с учетом того, что $R_{вн 2}$ связано с Q_2 соотношением (8). В связи с этим запишем выражение для расхода Q_2 с учетом (8) в виде $Q_2 = p_m / (\gamma Q_2 + R_s')$. Отсюда $Q_2 = [-R_s' + (4\gamma p_m + R_s'^2)^{1/2}] / 2\gamma$, следовательно,

$$R_{вн 2} = \gamma Q_2 = \frac{1}{2} [-R_s' + (R_s'^2 + 4\gamma p_m)^{1/2}]. \quad (14)$$

Подставив (14) в (5) и приравняв производную dP_A/dP_s' к нулю, получим условие максимума мощности в нагрузке:

$$R_{s 0}' / R_{вн 0} = 2, \quad (15)$$

где $R_{s 0}'$ и $R_{вн 0}$ — сопротивление излучения и внутреннее сопротивление излучателя в режиме максимальной излучаемой мощности. Назовем их оптимальными сопротивлениями.

Оптимальные сопротивления описываются следующими выражениями:

$$R_{s 0}' = 2(\gamma p_m / 3)^{1/2}, \quad R_{вн 0} = (\gamma p_m / 3)^{1/2}. \quad (16)$$

Расход жидкости через излучатель в этом случае $Q_0 = (p_m / 3\gamma)^{1/2}$. Максимальная акустическая мощность $P_{A 0} = 2/3 (p_m^3 / 3\gamma)^{1/2}$. Акустико-гидравлический КПД $\eta_{AG 0} = 2/3$.

Если сопротивление излучения отличается от оптимального в n раз, то выражения для Q , P_A , η_{AG} и $R_{вн}$ имеют вид

$$Q = Q_0 [(n^2 + 3)^{1/2} - n], \quad P_A = P_{A 0} n [(n^2 + 3)^{1/2} - n]^2, \\ \eta_{AG} = \eta_{AG 0} n [(n^2 + 3)^{1/2} - n], \quad R_{вн} = R_{вн 0} [(n^2 + 3)^{1/2} - n].$$

Зависимость $P_A/P_{A 0} = N(n)$ показана на фиг. 2. Там же показана зависимость $\eta_{AG}(n)$.

Соотношение расходов, внутренних сопротивлений и времен разряда нагруженного и ненагруженного излучателя связаны выражением

$$k(n) = Q_1/Q = R_{вн 1}/R_{вн} = t/t_1 = 3^{1/2} [(n^2 + 3)^{1/2} - n]. \quad (17)$$

Зависимость $k(n)$ показана на фиг. 2.

Из анализа (17) видно, что по соотношению времен разряда нагруженного и ненагруженного излучателя, измеренному экспериментально, можно определить акустическую мощность P_A , КПД излучателя η_{AG} и величину сопротивления акустической нагрузки.

Приведенный анализ показывает, что акустическая мощность и акустико-гидравлический КПД гидравлического излучателя зависят от соотношений сопротивлений излучения и внутреннего гидравлического сопротивления излучателя. В непрерывном режиме максимальная акустическая мощность соответствует максимальному КПД.

В импульсном режиме при работе от накопителя гидравлической энергии из-за нелинейности гидравлического сопротивления максимум излучаемой мощности соответствует случаю, когда сопротивление излучения вдвое больше внутреннего гидравлического сопротивления. При этом КПД составляет $2/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжаков С. П. Использование гидравлического накопления энергии для излучения мощных акустических сигналов. — Акуст. журн., 1985, т. 31, № 4, с. 560–562.
2. Заган В. И. Гидравлический гидроакустический излучатель. — Акуст. журн., 1982, т. 28, № 4, с. 505–509.

Поступило в редакцию
7.IV.1986

УДК 534.26

РАСSEЯНИЕ ЗВУКА НА ДИСКЕ В ФОКАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ АКУСТИЧЕСКОГО МИКРОСКОПА

Зинин П. В., Лобкис О. И., Маев Р. Г.

При анализе изображений в сканирующем акустическом микроскопе, работающем в режимах нахождение и темного поля [1], встает вопрос об эффективности рассеяния фокусированного излучения на частицах, размер которых сравним с длиной используемой акустической волны. Задача о дифракции в фокальной области

сходящегося пучка изучена лишь для случая самых простых препятствий: сферы и цилиндра [2]. В настоящей работе решается вопрос дифракции на мишенях сфероидальной формы, предельными случаями которых является диск и щель в экране. Точное решение задачи ищется в виде суперпозиции сфероидальных волновых функций. Для разложения падающего поля в фокальной области сферического преобразователя по сфероидальным волновым функциям представим его сначала в виде набора плоских волн (формула Дебая):

$$\Phi_i(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{v_0 f}{2\pi} e^{i\omega t - ikf} \int_0^\alpha \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} e^{ihr_0 \cos \gamma} d\varphi, \quad (1)$$

где Φ_i — потенциал колебательной скорости в точке с координатами $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, v_0 — колебательная скорость на поверхности преобразователя, f — расстояние от начала координат до излучающей поверхности, α — угол раскрытия преобразователя, k — волновое число, ω — частота, γ — угол между r_0 и f , $\cos \gamma = \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta \cos \theta_0$, где (θ, φ) — широтный и меридиональный углы радиуса f . Плоскую волну $\exp(ikr_0 \cos \gamma)$ разложим по сфероидальным волновым функциям [3]:

$$e^{ikr_0 \cos \gamma} = 2 \sum_{n,m} \frac{i^n (2 - \delta_{0m})}{N_{nm}} R_{nm}^{(1)}(ishu) S_{nm}(\cos v) S_{nm}(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (2)$$

Здесь δ_{0m} — символ Кронекера, S_{nm} — плюсуемые угловые сфероидальные функции. $R_{nm}^{(1)}$ — плюсуемые радиальные сфероидальные функции 1-го рода. $N_{nm} =$

$$= \int_{-1}^1 S_{nm}^2(x) dx, \quad (u, v, \varphi) — \text{плюсуемые сфероидальные координаты, связь которых}$$

с декартовыми координатами выражается в виде $(x = a \operatorname{ch} u \sin v \cos \varphi, y = a \operatorname{sh} u \sin v \sin \varphi, z = a \operatorname{ch} u \cos v)$, a — радиус диска. При подстановке (2) в (1) и интегрировании по φ остаются лишь члены с $m=0$:

$$\Phi_i = v_0 f e^{i\omega t - ikf} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\alpha) R_{n0}^{(1)}(ishu) S_{n0}(\cos v), \quad (3)$$

где коэффициенты $g_n(\alpha)$ выражаются в виде

$$g_n(\alpha) = \frac{2i^n}{N_{n0}} \int_{\cos \alpha}^1 S_{n0}(x) dx. \quad (4)$$

Подставим S_{n0} в (4) в виде разложения по полиномам Лежандра $P_l(x)$, $S_{n0}(x) = \sum_{l=0,1}^n d_l^n P_l(x)$ [3], где d_l^n — числовые коэффициенты, зависящие от отношения

радиуса диска к длине звуковой волны. Тогда для $g_n(\alpha)$ получаем

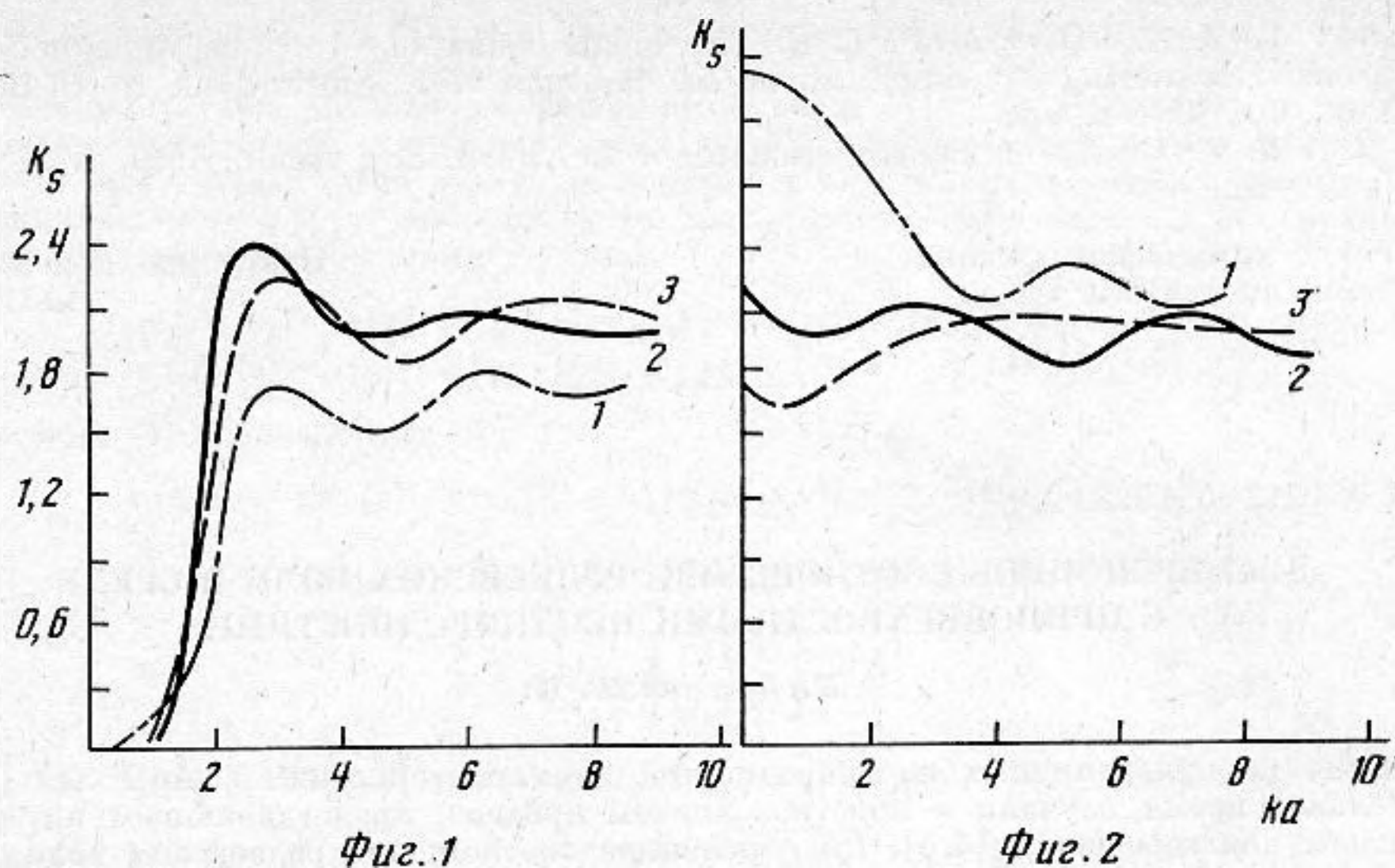
$$g_n(\alpha) = \frac{2i^n}{N_{n0}} \sum_{l=0,1}^n d_l^n [P_{l-1}(\cos \alpha) - P_{l+1}(\cos \alpha)] (2l+1)^{-1}. \quad (5)$$

Выражения (3) и (5) есть искомые разложения падающего поля сферического преобразователя в окрестности фокуса по волновым сфероидальным функциям.

Рассмотрим рассеяние фокусированного пучка на мягком и жестком дисках. Потенциал рассеянного поля также ищется в виде разложения по сфероидальным функциям:

$$\Phi_s = v_0 f e^{i\omega t - ikf} \sum_{n=0}^{\infty} C_n g_n(\alpha) R_{n0}^{(4)}(ishu) S_{n0}(\cos v), \quad (6)$$

где $R_{n0}^{(4)}$ — радиальные функции 4-го рода, а неизвестные константы C_n находятся из условия равенства нулю нормальной составляющей колебательной скорости на поверхности для жесткого диска и равенства нулю давления на поверхности для мягкого диска [4]. Для характеристики рассеяния введем коэффициент рассеяния K_s , равный отношению рассеянной мощности W_s к мощности, падающей на диск



Фиг. 1. Коэффициент рассеяния K_s для жесткого диска: 1 — для $\alpha = \pi/2$, 2 — для $\alpha = \pi/3$, 3 — для $\alpha = \pi/6$

Фиг. 2. Коэффициент рассеяния K_s для мягкого диска (обозначения те же, что и на фиг. 1). $K_s(0) = 32/(\pi^2(1 + \cos \alpha))$

W_i . Для жесткого диска рассеянная мощность равна

$$W_s^R = \frac{W}{1 - \cos \alpha} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_{2l+1}^2(\alpha) N_{2l+1,0}}{1 + [R_{2l+1,0}^{(2)'}(i0)/R_{2l+1,0}^{(1)'}(i0)]^2}, \quad (7)$$

для мягкого диска

$$W_s^s = \frac{W}{1 - \cos \alpha} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_{2l}^2(\alpha) N_{2l,0}}{1 + [R_{2l,0}^{(2)}(i,0)/R_{2l,0}^{(1)}(i,0)]^2}, \quad (8)$$

где

$$W = \frac{\rho v_0^2}{2} c 2\pi f^2 (1 - \cos \alpha) -$$

— полная мощность, излучаемая преобразователем, c — скорость звука в жидкости, ρ — плотность жидкости. Используя выражение для потенциала в окрестности фокуса в виде разложения по цилиндрическим функциям Бесселя $J_n(x)$ [5], для мощности падающего на диск излучения получим: $W_i = WQ(x)$,

$$Q(x) = 1 - J_0^2(x) - J_1^2(x) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right)^j \left[J_{2j+1}(x) J_1(x) / (2j+1) + \right. \\ \left. + \frac{x}{2} (J_0(x) J_{2j+1}(x) - J_1(x) J_{2j}(x)) / (j+1)/j \right], \quad x = ka \sin \alpha. \quad (9)$$

В случае полусферического преобразователя (угол раскрытия 90°) выражение (9) упрощается: $Q(x) = 1 - \sin x J_1(x) - \cos x J_0(x)$. На фиг. 1 и 2 представлены зависимости коэффициента рассеяния K_s от размеров диска при различных углах раскрытия преобразователя для жесткого и мягкого дисков соответственно. Видно, что для жесткого диска эффективность рассеяния с увеличением угла раскрытия падает, а для мягкого — возрастает. Период осцилляций при этом от угла раскрытия практически не зависит.

Авторы благодарят И. Н. Каневского за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wickramasinghe H. K. Scanning acoustic microscope: A review.— J. Microscopy, 1983, v. 29, № 1, p. 63–73.
2. Каневский И. Н. Фокусирование звуковых и ультразвуковых волн. М.: Наука, 1977, с. 204.
3. Фламмер К. Таблицы волновых сфероидальных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1962, с. 42.

4. Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E. The oblate spheroid.— In: Electromagnetic and acoustic scattering by simple shape/ed. Bowman J. J. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1969, p. 503.
5. O'Neil H. T. Theory of focusing radiators.— J. Acoust. Soc. Amer., 1949, v. 21, № 5, p. 516–526.

Институт химической физики
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
10.III.1986

УДК 534.212+534.222.1

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН В СРЕДЕ С ПРИПОВЕРХНОСТНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Кайбичев И. А.

Влияние приграничных неоднородностей на характеристики волн Рэля [1–3] длительное время изучали в коротковолновом пределе, представляющем интерес в основном для геофизики [4, 5]. Дисперсионное соотношение рэлеевских волн в коротковолновой области получено также и для стекол со слабым экспоненциальным изменением модуля сдвига и плотности в приграничном слое, созданном механической обработкой или методом ионной имплантации [6].

В физике металлов связь скорости, затухания и структуры рэлеевской волны с механическими характеристиками поверхностного слоя образца, в котором она распространяется, обусловила ее широкое использование как средства неразрушающего контроля поверхности. Волны Рэля позволили определять дефекты, степень и глубину термической закалки, остаточные механические напряжения и качество обработки поверхности [7]. В связи с этим актуальна задача определения структуры существующего в металлах неоднородного приграничного слоя, свойства которого отличны от объемных характеристик.

Толщина приграничных неоднородных слоев в металлах, как правило, значительно больше десятков и сотен межатомных расстояний [8]. В методиках неразрушающего контроля поверхности металлов используют диапазон частот [2], в котором длина волны звука много больше толщины неоднородного приграничного слоя. Поэтому особый интерес представляет длинноволновая область, где к настоящему времени изучено влияние только однородного слоя [9–11].

Цель работы — получение дисперсионного соотношения рэлеевских волн в среде с произвольным типом приповерхностной неоднородности для длинноволновой области.

Приграничную неоднородность в изотропной среде характеризуют [12] плотностью $\rho(z)$ и упругими параметрами Ламе $\lambda(z)$ и $\mu(z)$, изменяющимися как функции координаты z (ось z перпендикулярна плоскости границы). Толщину приповерхностного неоднородного слоя и характерный масштаб изменения аргумента функций $\mu(z)$, $\lambda(z)$, $\rho(z)$ обозначим через L . Вне слоя ($z \gg L$) в однородном материале они совпадают со своими объемными значениями $\mu(+\infty)$, $\lambda(+\infty)$, $\rho(+\infty)$, предполагаемых постоянными величинами.

Допустим, что рэлеевские волны распространяются вдоль оси x , а вектор механического смещения имеет компоненты $u_x(z)\exp(-i\omega t + ikx)$, $u_z(z)\exp(-i\omega t + ikx)$, здесь ω — частота, k — волновой вектор.

Тогда наша задача описывается уравнениями теории упругости [12]:

$$A(z)u''(z) + ikB(z)u'(z) + k^2C(z)u(z) = 0, \quad (1)$$

$$u(z) = \begin{bmatrix} u_x(z) \\ u_z(z) \end{bmatrix}, \quad A(z) = \begin{bmatrix} \mu(z) & 0 \\ 0 & \Lambda(z) \end{bmatrix},$$

$$B(z) = \begin{bmatrix} -i\mu'(z)k^{-1} & \Lambda(z) - \mu(z) \\ \Lambda(z) - \mu(z) & -i\Lambda'(z)k^{-1} \end{bmatrix},$$

$$C(z) = \begin{bmatrix} -\Lambda(z) + \rho(z)v^2 & i\mu'(z)k^{-1} \\ i\lambda'(z)k^{-1} & -\mu(z) + \rho(z)v^2 \end{bmatrix}$$

здесь $\Lambda(z) = \lambda(z) + 2\mu(z)$, v — фазовая скорость, а штрих означает производную по z .

Систему уравнений (1) рассматриваем при условиях отсутствия нормальных и тангенциальных компонент тензора напряжений на границе $z=0$.

В однородной среде уравнения (1) решают с помощью введения [1–3] потенциалов продольных $\phi(z)$ и поперечных $\psi(z)$ волн. Общее решение системы (1) для неоднородной среды произвольного типа в литературе к настоящему времени отсутствует. Основные трудности при поиске аналитического решения возникают из-за проблемы разделения переменных в уравнениях (1). Для произвольных значений волновых векторов подобная задача решена только для отдельных частных слу-