4. *Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E.* The oblate spheroid.– In: Electromagnetic and acoustic scattering by simple shape/ed. Bowman J. J. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1969, p. 503.
5. *O'Neyl H. T.* Theory of focusing radiators.– J. Acoust. Soc. Amer., 1949, v. 21, № 5, p. 516–526.

Институт химической физики
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
10.III.1986

УДК 534.212+534.222.1

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН В СРЕДЕ С ПРИПОВЕРХНОСТНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Кайбичев И. А.

Влияние приграничных неоднородностей на характеристики волн Рэлея [1–3] длительное время изучали в коротковолновом пределе, представляющем интерес в основном для геофизики [4, 5]. Дисперсионное соотношение рэлеевских волн в коротковолновой области получено также и для стекол со слабым экспоненциальным изменением модуля сдвига и плотности в приграничном слое, созданном механической обработкой или методом ионной имплантации [6].

В физике металлов связь скорости, затухания и структуры рэлеевской волны с механическими характеристиками поверхностного слоя образца, в котором она распространяется, обусловила ее широкое использование как средства неразрушающего контроля поверхности. Волны Рэлея позволили определять дефекты, степень и глубину термической закалки, остаточные механические напряжения и качество обработки поверхности [7]. В связи с этим актуальна задача определения структуры существующего в металлах неоднородного приграничного слоя, свойства которого отличны от объемных характеристик.

Толщина приграничных неоднородных слоев в металлах, как правило, значительно больше десятков и сотен межатомных расстояний [8]. В методиках неразрушающего контроля поверхности металлов используют диапазон частот [2], в котором длина волны звука много больше толщины неоднородного приграничного слоя. Поэтому особый интерес представляет длинноволновая область, где к настоящему времени изучено влияние только однородного слоя [9–11].

Цель работы – получение дисперсионного соотношения рэлеевских волн в среде с произвольным типом приповерхностной неоднородности для длинноволновой области.

Приграничную неоднородность в изотропной среде характеризуют [12] плотностью $\rho(z)$ и упругими параметрами Ламе $\lambda(z)$ и $\mu(z)$, изменяющимися как функции координаты z (ось z перпендикулярна плоскости границы). Толщину приповерхностного неоднородного слоя и характерный масштаб изменения аргумента функций $\mu(z)$, $\lambda(z)$, $\rho(z)$ обозначим через L. Вне слоя ($z\gg L$) в однородном материале они совпадают со своими объемными значениями $\mu(+\infty)$, $\lambda(+\infty)$, $\rho(+\infty)$, предполагаемых постоянными величинами.

Допустим, что рэлеевские волны распространяются вдоль оси x, а вектор механического смещения имеет компоненты $u_x(z)\exp(-i\omega t+ikx)$, $u_z(z)\exp(-i\omega t+ikx)$, здесь ω – частота, k – волновой вектор.

Тогда наша задача описывается уравнениями теории упругости [12]:

$$A(z)u''(z)+ikB(z)u'(z)+k^2C(z)u(z)=0, \tag{1}$$

$$u(z)=\begin{bmatrix} u_x(z) \\ u_z(z) \end{bmatrix}, \qquad A(z)=\begin{bmatrix} \mu(z) & 0 \\ 0 & \Lambda(z) \end{bmatrix},$$

$$B(z)=\begin{bmatrix} -i\mu'(z)k^{-1} & \Lambda(z)-\mu(z) \\ \Lambda(z)-\mu(z) & -i\Lambda'(z)k^{-1} \end{bmatrix},$$

$$C(z)=\begin{bmatrix} -\Lambda(z)+\rho(z)v^2 & i\mu'(z)k^{-1} \\ i\lambda'(z)k^{-1} & -\mu(z)+\rho(z)v^2 \end{bmatrix}$$

здесь $\Lambda(z)=\lambda(z)+2\mu(z)$, v – фазовая скорость, а штрих означает производную по z.

Систему уравнений (1) рассматриваем при условиях отсутствия нормальных и тангенциальных компонент тензора напряжений на границе $z=0$.

В однородной среде уравнения (1) решают с помощью введения [1–3] потенциалов продольных $\varphi(z)$ и поперечных $\psi(z)$ волн. Общее решение системы (1) для неоднородной среды произвольного типа в литературе к настоящему времени отсутствует. Основные трудности при поиске аналитического решения возникают из-за проблемы разделения переменных в уравнениях (1). Для произвольных значений волновых векторов подобная задача решена только для отдельных частных случаев неоднородностей [13, 14], а в коротковолновой области разработаны приближенные асимптотические методы [4, 5].

В данной работе предложено решение системы (1) в длинноволновом пределе для неоднородной среды с произвольными дважды дифференцируемыми функциями $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\Lambda(z)$. Тогда возможен переход к величинам, связанным так же, как и потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ либо только с продольными, либо только с поперечными волнами. Для этого введем новые функции

$$S_1(z)=\Lambda(z)[u_z'(z)+iku_x(z)]\equiv\Lambda(z)[\varphi''(z)-k^2\varphi(z)],$$
$$S_2(z)=\mu(z)[u_x'(z)-iku_z(z)]\equiv-\mu(z)[\psi''(z)-k^2\psi(z)].$$

Система (1) эквивалентна

$$S''(z)-k^2\varkappa^2\{\xi(+\infty)\}S(z)=k^2[\varkappa^2\{\xi(z)\}+ \\ -\varkappa^2\{\xi(+\infty)\}-P\{\xi(z)\}]S(z)-ik\theta\{\xi(z)\}S'(z), \tag{2}$$

здесь

$$S(z)=\begin{bmatrix} S_1(z) \\ S_2(z) \end{bmatrix},$$

а $\varkappa\{\xi(z)\}$, $P\{\xi(z)\}$, $\theta\{\xi(z)\}$ – матрицы второго порядка с компонентами

$$\varkappa_{11}\{\xi(z)\}=\sqrt{1-\xi^2(z)\eta^2(z)},\quad \varkappa_{22}\{\xi(z)\}=\sqrt{1-\xi^2(z)},\quad \varkappa_{12}\{\xi(z)\}=\varkappa_{21}\{\xi(z)\}=0;$$
$$P_{11}\{\xi(z)\}=P_{22}\{\xi(z)\}=\theta_{21}\{\xi(z)\}=-\theta_{12}\{\xi(z)\}=$$
$$=t(z)E(z)[1-Y(z)E^{-1}(z)]/2[\xi^2(z)-t^2(z)\xi^{-2}(z)],$$
$$P_{12}\{\xi(z)\}=-it(z)+\theta_{11}\{\xi(z)\},\quad P_{21}\{\xi(z)\}=it(z)\eta^2(z)-\theta_{11}\{\xi(z)\},$$
$$\theta_{11}\{\xi(z)\}=\theta_{22}\{\xi(z)\}=i[t(z)+E(z)]/4+i\bar\lambda[\xi^2(z)-t^2(z)\xi^{-2}(z)]'/4[\xi^2(z)-t^2(z)\xi^{-2}(z)]\pi,$$

где

$$t(z)=\frac{\bar\lambda}{\pi}\frac{\mu'(z)}{\mu(z)},\qquad E(z)=\frac{\bar\lambda}{\pi}\frac{\rho'(z)}{\rho(z)},\qquad Y(z)=\frac{\bar\lambda}{\pi}\frac{\mu''(z)}{\mu'(z)},$$

$\bar\lambda$ – длина волны, $\xi(z)\equiv v/v_t(z)$, $\eta(z)\equiv v_t(z)/v_l(z)$, $v_l(z)=\sqrt{\Lambda(z)/\rho(z)}$ и $v_t(z)=\sqrt{\mu(z)/\rho(z)}$ – зависящие от глубины металла скорости продольных и поперечных объемных звуковых волн.

В глубине металла (при $z\to+\infty$) в однородном материале $P\{\xi(+\infty)\}=\theta\{\xi(+\infty)\}=[0]$, где $[0]$ – нулевая матрица размера 2×2. Тогда правые части уравнений (2) обращаются в нуль и переменные $S_i(z)$ разделяются. Для среды с приграничными неоднородностями применение метода вариации произвольных постоянных позволяет получить эквивалентную (2) систему интегральных уравнений, удобную для дальнейших итеративных процедур в длинноволновой области:

$$S(z)=\bar S(z)+k^2\alpha\{\xi(z)\}\int\limits_z^{+\infty}dz'\,\beta\{\xi(z')\}\int\limits_{z'}^{+\infty}dz''\,\alpha\{\xi(z'')\} \\ [(\varkappa^2\{\xi(z'')\}-\varkappa^2\{\xi(+\infty)\}-P\{\xi(z'')\})S(z'')-ik^{-1}\theta\{\xi(z'')\}S'(z'')], \tag{3}$$

где введены обозначения

$$\bar S(z)=\begin{bmatrix} S_{10}\exp(-\varkappa_{11}\{\xi(+\infty)\}kz) \\ S_{20}\exp(-\varkappa_{22}\{\xi(+\infty)\}kz) \end{bmatrix},$$

а $\alpha\{\xi(z)\}$, $\beta\{\xi(z)\}$ – матрицы размера 2×2 с компонентами

$$\alpha_{11}\{\xi(z)\}=\mathrm{ch}(\varkappa_{11}\{\xi(+\infty)\}k_z),\quad \alpha_{12}\{\xi(z)\}=\alpha_{21}\{\xi(z)\}=0,$$
$$\alpha_{22}\{\xi(z)\}=\mathrm{ch}(\varkappa_{22}\{\xi(+\infty)\}kz);\quad \beta_{11}\{\xi(z)\}=\mathrm{ch}^{-2}(\varkappa_{11}\{\xi(+\infty)\}kz),$$
$$\beta_{12}\{\xi(z)\}=\beta_{21}\{\xi(z)\}=0,\quad \beta_{22}\{\xi(z)\}=\mathrm{ch}^{-2}(\varkappa_{22}\{\xi(+\infty)\}kz).$$

В длинноволновой области ($kL\ll1$) интегральные слагаемые в (3) пропорциональны малому параметру kL, поскольку интегрирование производится в пределах приповерхностного слоя. Поэтому в длинноволновой области систему (3) можно решать итерациями, считая, что $kz\ll1$, поскольку функция $S(z)$ входит в интегральные слагаемые только при значениях z по порядку, не превышающих L. Тогда

$$S(z)=\bar S(z)+T\{\xi(z)\}\bar S(0), \tag{4}$$

здесь

$$T\{\xi(z)\}=\alpha\{\xi(z)\}\int\limits_z^{+\infty}dz'\int\limits_{z'}^{+\infty}dz''[\varkappa^2\{\xi(z'')\}-\varkappa^2\{\xi(+\infty)\}-P\{\xi(z'')\}+ \\ +i\theta\{\xi(z'')\}\varkappa\{\xi(+\infty)\}]4\pi^2/\bar\lambda^2.$$

Используя граничные условия и результат итерационной процедуры (4), получаем дисперсионное соотношение рэлеевских волн в среде с приповерхностными неоднородностями для длинноволновой области

$$\det W\{\xi(0)\}=0, \tag{5}$$

где

$$W\{\xi(0)\}=N\{\xi(0)\}[I-Q]+2iM\{\xi(0)\}[\varkappa\{\xi(+\infty)\}-D],$$

Q и D – моменты от функций $X\{\xi(z)\}$, $P\{\xi(z)\}$, $\theta\{\xi(z)\}$, отличных от нуля только в приграничном слое

$$Q=\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_z^{+\infty}dz'[X\{\xi(z')\}+P\{\xi(z')\}-i\theta\{\xi(z')\}\varkappa\{\xi(+\infty)\}]4\pi^2/\tilde{\lambda}^2, \tag{6}$$

$$D=\int\limits_0^{+\infty}dz[X\{\xi(z)\}+P\{\xi(z)\}-i\theta\{\xi(z)\}\varkappa\{\xi(+\infty)\}]2\pi/\tilde{\lambda},$$

где $N\{\xi(0)\}$, $M\{\xi(0)\}$, $X\{\xi(z)\}$ – матрицы второго порядка с компонентами

$$N_{11}\{\xi(0)\}=N_{22}\{\xi(0)\}=2-\xi^2(0)+t^2(0)\xi^{-2}(0),$$
$$N_{12}\{\xi(0)\}=-N_{21}\{\xi(0)\}=-2M_{11}\{\xi(0)\}=-2M_{22}\{\xi(0)\}=2it(0)\xi^{-2}(0),$$
$$M_{12}\{\xi(0)\}=-M_{21}\{\xi(0)\}=1,\quad X_{11}\{\xi(z)\}=\xi^2(z)\eta^2(z)-\xi^2(+\infty)\eta^2(+\infty),$$
$$X_{12}\{\xi(z)\}=X_{21}\{\xi(z)\}=0,\quad X_{22}\{\xi(z)\}=\xi^2(z)-\xi^2(+\infty),$$

а I – единичная матрица.

Для однородного изотропного полупространства ($\rho(z)=\rho_0=\text{const}$, $\mu(z)=\mu_0=\text{const}$, $\lambda(z)=\lambda_0=\text{const}$) соотношение (5) принимает вид уравнения Рэлея [1–3] с приближенным решением

$$\xi_0=v/v_t=(0{,}87+1{,}12\nu_0)/(1+\nu_0), \tag{7}$$

$\nu_0=\lambda_0/2(\lambda_0+\mu_0)$ – коэффициент Пуассона рассматриваемой среды. Отметим, что рэлеевская волна в однородной среде не имеет дисперсии фазовой скорости.

Ввиду сложности уравнения (5) найти его аналитическое решение возможно только для случая слабых приграничных неоднородностей и в предположении $t(0)=\tilde{\lambda}\mu'(0)/\mu(0)\pi\ll1$, когда применим итерационный метод решения задачи. Дисперсионное соотношение (5) можно записать в виде

$$R\{\xi(0)\}=\mathcal{A}_\omega\{\xi(0)\}, \tag{8}$$

где

$$R\{\xi(0)\}=[2-\xi^2(0)]^2-4\sqrt{1-\xi^2(0)}\sqrt{1-\xi^2(0)\eta^2(0)},$$

$$\mathcal{A}_\omega\{\xi(0)\}=[Q_{11}+Q_{22}][2-\xi^2(0)]^2+2i[Q_{12}\sqrt{1-\xi^2(+\infty)\eta^2(+\infty)}-Q_{21}\sqrt{1-\xi^2(+\infty)}]\cdot$$
$$\cdot[2-\xi^2(0)]+2t(0)\times[\sqrt{1-\xi^2(+\infty)\eta^2(+\infty)}+\sqrt{1-\xi^2(+\infty)}]-2t^2(0)\xi^{-2}(0)[2-\xi^2(0)]+$$
$$+2i[D_{12}-D_{21}][2-\xi^2(0)]-4[D_{11}\sqrt{1-\xi^2(0)}+D_{22}\sqrt{1-\xi^2(0)\eta^2(0)}]+$$
$$+4[\sqrt{1-\xi^2(+\infty)}\times\sqrt{1-\xi^2(+\infty)\eta^2(+\infty)}+\sqrt{1-\xi^2(0)}\times\sqrt{1-\xi^2(0)\eta^2(0)}].$$

Заметим, что определяющий вклад в уравнение (8) вносят члены его левой части, т. е. в длинноволновой области, слабых неоднородностей и при $t(0)\ll1$ среду с приповерхностными неоднородностями можно аппроксимировать однородным материалом с механическими параметрами, равными их поверхностным значениям, а дисперсия волн Рэлея определяется значением $t(0)$ и отношением интегральных параметров неоднородного слоя к длине волны (функции Q и D, определенные соотношением (6)):

$$\xi(0)=\xi_R(0)+\delta\xi_\omega(0). \tag{9}$$

здесь $\xi_R(0)$ – скорость рэлеевской волны в однородной среде с механическими параметрами $\lambda(0)$, $\mu(0)$, $\rho(0)$, $\delta\xi_\omega(0)$ – малая поправка, описывающая дисперсию волн Рэлея

$$\delta\xi_\omega(0)=\mathcal{A}_\omega\{\xi_R(0)\}\Bigg/\left(\left.\frac{\partial R\{\xi(0)\}}{\partial\xi(0)}\right|_{\xi(0)=\xi_R(0)}\right), \tag{10}$$

где

$$\left.\frac{\partial R\{\xi(0)\}}{\partial\xi(0)}\right|_{\xi(0)=\xi_R(0)}=4[\xi_R^2(0)-2]\xi_R(0)+4\xi_R(0)\sqrt{1-\xi_R^2(0)\eta^2(0)}/\sqrt{1-\xi_R^2(0)}+$$
$$+4\xi_R(0)\eta^2(0)\sqrt{1-\xi_R^2(0)}/\sqrt{1-\xi_R^2(0)\eta^2(0)}.$$

Следовательно, из экспериментальных данных о зависимости скорости рэлеевских волн от частоты возможно определение характера изменения неоднородностей.

Итак, в работе получено дисперсионное соотношение рэлеевских волн в среде со слоем приповерхностных неоднородностей произвольной формы для длинноволновой области. Показано, что при отсутствии такого слоя полученное соотношение переходит в уравнение Рэлея. Для случая $t(0)=\tilde{\lambda}\mu'(0)/\mu(0)\pi\ll 1$ найдена формула дисперсии фазовой скорости рэлеевской волны. Результаты можно применить для определения характера изменения приграничных неоднородностей на основании экспериментальных данных о дисперсии скорости волн Рэлея в металлах.

В заключение разрешите выразить большую признательность В. И. Окулову за полезные консультации, а также И. Г. Кулееву и А. В. Кобелеву за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
3. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 434 с.
4. *Зволинский Н. В.* Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве частного типа.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1945, т. 9, № 3, с. 261–278.
5. *Аленицын А. Г.* Волны Рэлея в неоднородном слое, лежащем на полупространстве.— ПММ, 1973, т. 37, № 5, с. 895–899.
6. *Bucaro J. A., Flax L.* Application of acoustic surface waves to the study of surface properties of ion-exchanged glass.— J. Appl. Phys., 1974, v. 45, № 2, p. 765–774.
7. *Minton C.* Inspection of metals with ultrasonic surface waves.— Nondest. test, 1954, v. 12, № 4, p. 13–16.
8. *Алехин В. П.* Физика прочности и пластичности поверхностных слоев материалов. М.: Наука, 1983. 280 с.
9. *Ewing W. M., Jardetsky W. S., Press F.* Elastic waves in layered media. N. Y.: Mc Graw – Hill, 1957. 380 p.
10. *Farnell G. W., Adler E. L.* Elastic wave propagation in thin layers.— in: Physical Acoustics/Eds Mason W. P., Thurston R. N., v. 9. N.Y.: Acad. Press, 1972, p. 35–127.
11. *Богданов С. В., Левин М. Д., Яковкин И. Б.* О существовании поверхностной волны в системе слой – полупространство.– Акуст. журн., 1969, т. 15, № 1, с. 12–16.
12. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976. 368 с.
13. *Hook J. F.* Contribution to a theory of separability of the vector wave equation of elasticity for inhomogeneous media.— J. Acoust. Soc. Amer., 1962, v. 34, № 7, p. 946–953.
14. *Alverson R. C., Gair F. C., Hook J. F.* Uncoupled equations of motion in nonhomogeneous elastic media.— Bull. Seis mol. Soc. Amer., 1963, v. 53, № 5, p. 1023–1030.

Институт физики металлов УНЦ
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
9.IX.1985

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА УПРУГОЙ И ЖИДКОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМИ ОБОЛОЧКАМИ ВРАЩЕНИЯ

Клещев А. А., Ростовцев Д. М.

Пусть упругая вытянутая сфероидальная оболочка облучается плоской гармонической звуковой волной единичной амплитуды с потенциалом Φ_0 (фиг. 1). Плотность ρ_1 материала оболочки примем равной плотности окружающей жидкой среды ρ, коэффициенты Ламе оболочки Λ_1 и μ_1. Газ, заполняющий оболочку, характеризуется плотностью ρ_2, скоростью звука c_3 и коэффициентом объемного сжатия Λ_2.

Введем в рассмотрение систему вытянутых сфероидальных координат ξ, η, φ с межфокусным расстоянием $2h_0$ и систему сферических координат R, θ_1, φ.

Вектор смещения u $(u_\xi, u_\eta, u_\varphi)$ в оболочке представим в виде комбинации функций от скалярного Φ_2 и векторного $\mathbf{A}$ потенциалов:

$$\mathbf{u}=-\operatorname{grad}\Phi_2+\operatorname{rot}\mathbf{A}; \tag{1}$$

при этом $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$. Векторную функцию $\mathbf{A}$ выразим через потенциалы Дебая U и V [1–4]:

$$\mathbf{A}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{R}U)+ik_t\operatorname{rot}(\mathbf{R}V), \tag{2}$$

где $\mathbf{R}$ означает радиус-вектор точки наблюдения.

Сферические компоненты векторной функции $\mathbf{A}$ $(A_R, A_{\theta_1}, A_\varphi)$ выражаются через потенциалы Дебая U и V следующим образом [2]:

$$A_{\theta_1}=\frac{1}{h_0(\xi^2-1+\eta^2)^{1/2}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\theta_1}\frac{\partial\xi}{\partial R}\frac{\partial^2 B}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\xi}{\partial\theta_1}\frac{\partial\eta}{\partial R}\frac{\partial^2 B}{\partial\eta\,\partial\xi}+\frac{\partial\xi}{\partial R}\frac{\partial\eta}{\partial\theta_1}\frac{\partial^2 B}{\partial\xi\,\partial\eta}+\right.$$