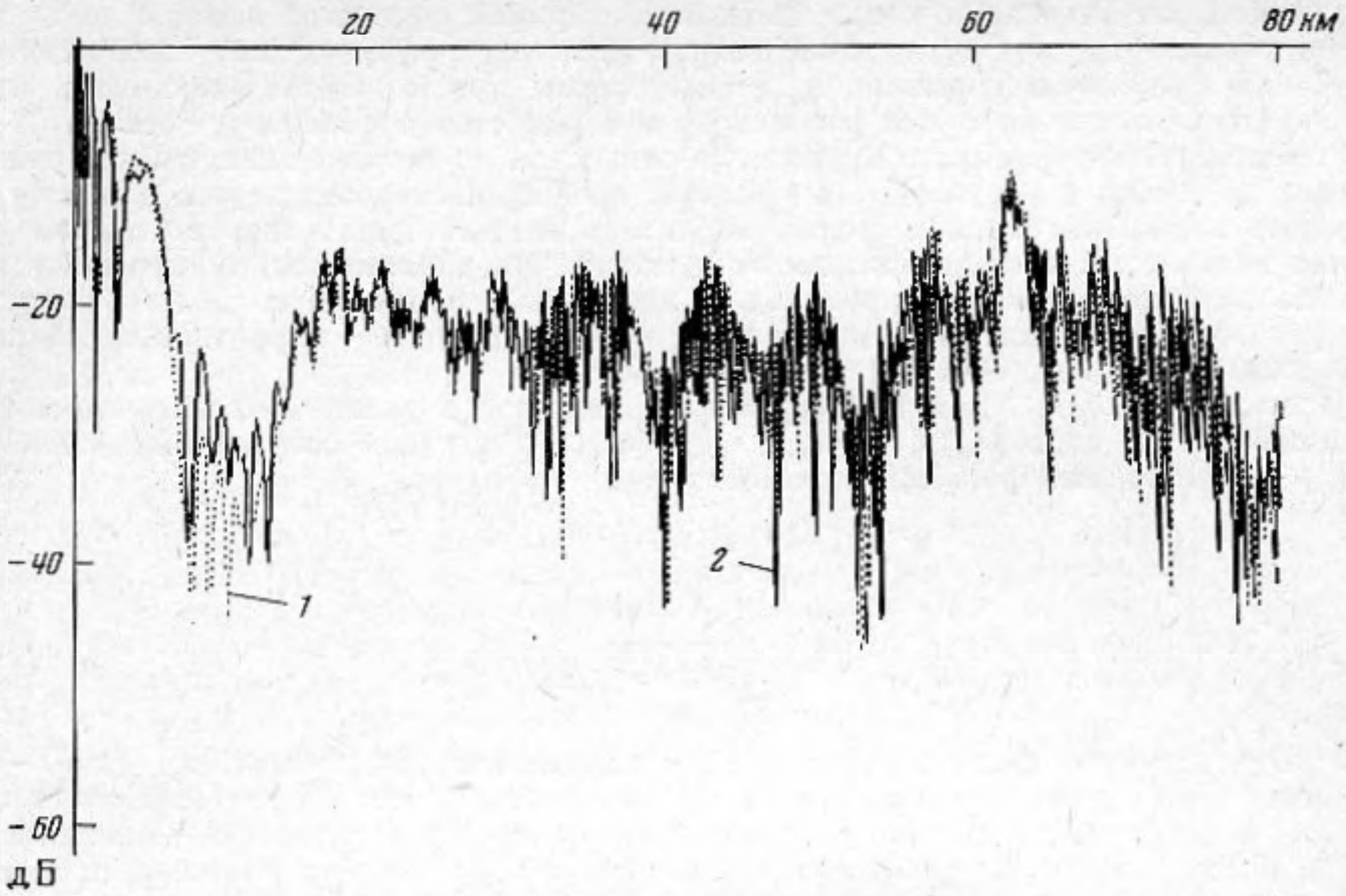

Горизонтальный разрез уровня звукового поля, вычисленный по предлагаемой программе (*1*) и по программе [2] (*2*)

быстродействия алгоритма $\sin x$ и $\cos x$ вычисляются путем интерполяции по массиву значений $\sin x_i$, $x_i=\pi_i/(N-1)-1)$, $i=0, 1, \ldots, N-1$.

Погрешность этого алгоритма определяется $N-\delta_{2000}=0{,}7\cdot10^{-7}$, $\delta\sim N^{-2}$. При вычислении звукового поля на высоких частотах ($f>1$ кГц) аналогичным образом вычисляем и функции Эйри.

С помощью этой программы проводились расчеты звукового поля в глубоком океане в диапазоне частот 1 Гц÷5 кГц. Время расчета звукового поля на горизонтальном разрезе (M точек по трассе) T определяем из $T=A(M(N_к+N_д)/500+2N_к+N_д/2)$. Здесь $N_к$ – число канальных волн, $N_д$ – донных. При 10 точках профиля скорости звука на БЭСМ-6 коэффициент $A\simeq0{,}05$ с.

Проводилось сопоставление результатов расчета уровня поля по этой программе с общепринятой программой нормальных волн [2]. На фигуре приведены горизонтальные разрезы звукового поля, вычисленного в глубоком океане на частоте 50 Гц ($N_к=58$, $N_д=113$, $M=420$). Результаты сравнения можно считать вполне удовлетворительными. Отметим, что расчет по предложенной программе занял в 60 раз меньше счетного времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Вагин А. В., Мальцев Н. Е.* Расчеты низкочастотных звуковых полей в слоистом океане.– Вопр. Судостроения. Сер. Акустика, 1977, вып. 9, с. 61–81.
3. *Bartberger C. I.* Comparison of two normal mode solutions based on different branch cuts.– JASA, 1977, v. 67, № 6, p. 1643–1644.
4. *Stickler D. C.* Normal mode program with both the discrete and branch line contribution.– JASA, 1975, v. 57, № 4, p. 856–861.
5. *Агеева Н. С., Крупин В. Д.* Структура звукового поля в мелком море.– Акуст. журн., 1979, т. 25, № 3, с. 340–345.
6. *Плоткин А. М.* Применение функций Грина для вычисления звукового поля в слоистом океане.– Акуст. журн., 1985, т. 31, с. 90–95.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
22.I.1986

УДК 534.6.08

ОЦЕНКА ЗАТУХАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ЗА СЧЕТ ПОГЛОЩЕНИЯ В ГРУНТЕ

Ривелис Е. А., Славянов С. Ю.

Первая формула для затухания нормальных волн, вызванного поглощением в жидком грунте, была предложена Корнхаузером и Рейни [1], которые использовали в качестве модели мелкого моря модель Пекериса. Крупин [2] рассмотрел случай стратифицированного на глубине водного слоя и впервые указал на тот факт, что коэффициент затухания может быть немонотонной функцией номера, когда вначале он убывает по номеру, а затем возрастает. Этот эффект может возникать при увеличении с номером нормальной волны длины цикла соответствующего луча. В дальнейшем этот вопрос был рассмотрен в серии статей Тиндла и Вестона [3–6]. В настоящей работе формулы Крупина упрощаются до инженерных, причем заново приведен их вывод и обсуждаются примеры профилей скорости звука, для которых аномально малым затуханием может характеризоваться одна отдельно взятая нормальная волна с номером, отличным от единицы. Предполагается, что профиль скорости по глубине таков, что происходит отражение нормальных волн от грунта (т. е. нет звукового канала) и, кроме того, что $kd \gg 1$, где d – характерный масштаб неоднородности водного слоя [7].

Нормальная волна U_m в трехмерном водном слое в дальней от источника зоне представляется в виде $U_m(z,r)=A_m r^{-1/2} e^{i\mu_m kr}\psi_m(z)$, где μ_m – собственные значения, а $\psi_m(z)$ – собственные функции краевой задачи

$$\psi''(z)+k^2(n^2(z)-\mu^2)\psi(z)=0, \tag{1}$$

$$\psi(0)=0, \tag{2}$$

$$\psi'(H)+\frac{k}{\varkappa}\sqrt{\mu^2-n_H{}^2}\cdot\psi(H)=0. \tag{3}$$

Здесь A_m – нормировочный множитель; z – координата по глубине, км ($z=0$ – поверхность, $z=H$ – дно); r – координата по горизонтали, км; $c(z)$ – скорость в водном слое в км/с; $c(H)$ – скорость у грунта; c_H – скорость в грунте; ω – циклическая частота в Гц; $k=\omega/c(H)$ – волновое число; $n(z)=c(H)/c(z)$ – показатель преломления ($n_H=c(H)/c_H$); $\varkappa$ – отношение плотности грунта к плоскости воды.

В задачах подводного распространения звука масштаб d колеблется в пределах от 10 до 1 км в зависимости от характера профиля скорости. Достаточно реалистичные результаты получаются, если взять безразмерный параметр kd, численно равным k (в км$^{-1}$) и в его терминах проводить все рассуждения; на частотах 10–10^3 Гц численное значение $k\sim 5\cdot 10–5\cdot 10^3$, т. е. $k\gg 1$.

Предположим вначале для простоты, что нормальная волна отражается как от дна, так и от поверхности без образования внутренних каустик.

Возьмем решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), в виде главного члена ВКБ разложения по большому параметру:

$$\psi(z,\mu)\approx(q')^{-1/2}\sin\left(k\int\limits_0^z q\,dz\right),$$

где $q(z,\mu)=(n^2(z)-\mu^2)^{1/2}$.

Удовлетворение граничному условию (3) на грунте приводит к дисперсионному уравнению для собственных значений μ_m

$$\theta(\mu,H)+\theta_H(\mu)=m\pi,\qquad m=1,2,\ldots, \tag{4}$$

где $\theta(\mu,H)=k\int\limits_0^H q\,dz$ – набег фазы нормальной волны от поверхности к грунту, а $\theta_H(\mu)=\operatorname{arctg}(\varkappa(1-\mu^2)^{1/2}(\mu^2-n_H{}^2)^{-1/2})$ – набег фазы в грунте.

Будем описывать объемное поглощение в грунте введением в показатель преломления в грунте мнимой добавки $n_H{}^2=n_{H0}{}^2+i\varepsilon$. В рассматриваемом диапазоне частот добавка ε принимает малые численные значения (растущие с частотой) порядка $\varepsilon\sim 10^{-2}\div 10^{-4}$, т. е. $\varepsilon\ll 1$. Положим $\mu_m=\sigma_m+i\tau_m$, где величина σ_m пропорциональна фазовой скорости распространения нормальной волны, а величина τ_m определяет коэффициент затухания α_m ($\alpha_m=k\tau_m(kM^{-1})$).

Считая, что $\tau_m\ll 1$ и сохраняя в (4) главные члены по ε и τ_m, получим из уравнения (4), приравнивая отдельно нулю вещественную и мнимую части, два уравнения. Одно из них

$$\theta(\sigma,H)+\theta_H(\sigma)=m\pi,\qquad m=1,2,\ldots \tag{5}$$

для отыскания σ_m. Методы решения уравнения (5) неоднократно обсуждались ранее [7] и на нем останавливаться не будем. Другое уравнение

$$\left(-\frac{\partial\theta(\sigma,H)}{\partial\sigma}-\frac{\partial\theta_H(\sigma)}{\partial\sigma}\right)\tau_m=\frac{\partial\theta_H(\sigma)}{\partial n_H{}^2}\varepsilon \tag{6}$$

служит для нахождения τ_m (в (6) $\sigma=\sigma_m$, $n_H{}^2=n_{H0}{}^2$).

Преобразуем выражения, входящие в (6). Из явного вида $\theta_H(\sigma)$

$$\frac{\partial\theta_H(\sigma)}{\partial n_H{}^2}=\frac{\operatorname{tg}\theta_H(\sigma)}{2(\sigma^2-n_H{}^2+\varkappa^2(1-\sigma^2))},$$

$$\frac{\partial\theta_H(\sigma)}{\partial\sigma}=-2\sigma\frac{1-n_H{}^2}{1-\sigma^2}\frac{\partial\theta_H(\sigma)}{\partial n_H{}^2}.$$

Из определения $\theta(\sigma, H)$

$$-\frac{\partial\theta(\sigma,H)}{\partial\sigma}=k\sigma\int\limits_0^H\frac{dz}{\sqrt{n^2(z)-\sigma^2}}.$$

Таким образом, приходим к следующей формуле для τ_m:

$$\tau_m=\varepsilon\left\{\frac{2k\sigma_m\int\limits_0^H\frac{dz}{\sqrt{n^2(z)-\sigma^2}}}{\operatorname{tg}\theta_H(\sigma_m)/(\sigma_m^2-n_{H0}^2+\varkappa^2(1-\sigma_m^2))}+2\sigma_m\frac{1-n_{H0}^2}{1-\sigma_m^2}\right\}^{-1}. \quad (7)$$

Вообще говоря, для малых размеров нормальных волн, которые наиболее интересны в этой задаче, лучевые представления в полной мере не применимы, но все же воспользуемся ими для наглядной интерпретации полученной формулы (7). Для лучей, образующих m-ю нормальную волну, справедливо соотношение $\sigma_m=n(z)\sin\varphi_m(z)$, где $\varphi_m(z)$ – угол между лучом и осью z. Угол $\varphi_m(H)$ обычно называют углом Бриллюэна нормальной волны. Введем также формальный угол χ_m с помощью равенства

$$\operatorname{ch}\chi_m=\sin\varphi_m(H)/n_{H0}. \quad (8)$$

Заметим, что рассматриваем случай $\sigma_m\leqslant n_{H0}$, т. е. на границе водный слой-грунт происходит полное внутреннее отражение лучевой нормальной волны, и равенство (8) можно понимать как формальное продолжение закона Снеллиуса на закритические углы.

Далее, поскольку $\sigma_m(n^2(z)-\sigma_m^2)^{-1/2}dz=\operatorname{tg}\varphi_m(z)\,dz=dr$, то

$$-\left.\frac{\partial\theta(\sigma,H)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_m}=kl_m/2,$$

где l_m – длина цикла лучей, т. е. расстояние между точками двух ближайших отражений от дна.

Таким образом, в лучевых терминах формула (7) принимает вид

$$\tau_m=\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{ctg}\varphi_m(H)\left\{\frac{kl_m\operatorname{th}\chi_m}{2\varkappa}\varkappa^2\cos^2\varphi_m(H)+\operatorname{th}^2\chi\sin^2\varphi_m(H)+\frac{1-n_H^2}{\cos^2\varphi_m(H)}\right\}^{-1}. \quad (9)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках в формуле (9) за счет множителя k превалирует над вторым вдали от предельного угла полного внутреннего отражения ($\chi_m>0$).

Таким образом приходим к формуле

$$\tau_m=\frac{\varepsilon\varkappa}{kl_m}\,\frac{\operatorname{ctg}\varphi_m(H)\operatorname{cth}\chi_m}{\varkappa^2\cos^2\varphi_m(H)+\operatorname{th}^2\chi_m\sin^2\varphi_m(H)}, \quad (10)$$

по существу совпадающей с результатом Крупина [2], но использующей другие термины.

До сих пор наши рассуждения были в достаточной степени строгими. Подчеркнем, что при сделанных предположениях они верны как для больших, так и для малых размеров нормальных волн, поскольку справедливость «правила квантования» (5) опирается лишь на плавность изменения функции $n^2(z)$ [8]. Наша дальнейшая цель – получить более простые формулы для нормальных волн с малыми номерами. Для них (если $\varkappa$ не слишком велико) $\sin\varphi_m(H)\approx1$, $\cos\varphi_m(H)\approx0(m/k)$, $\operatorname{ch}\chi_m=n_H^{-1}$ и формула (10) упрощается до простой инженерной формулы

$$\tau_m=\varepsilon\frac{\varkappa\cos\varphi_m(H)}{kl_m(1-n_H^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

В случае однородного водного слоя (модель Пекериса) имеем $\cos\varphi_m(H)\approx m\pi/kH$, $l_m=2H\operatorname{tg}\varphi_m(H)\approx2kH^2/m\pi$ и формула (11) переходит в известную формулу Корнхаузера – Рейни

$$\tau_m=\varepsilon\frac{\varkappa(m\pi)^2}{2(kH)^3(1-n_H^2)^{3/2}}. \quad (12)$$

Обычно считают, что формула (12) справедлива для больших m. Однако если рассмотреть ее как оценочную, в предположении, что $m+\beta\approx m$, где $\beta\leqslant1/2$, то она сохраняется и для малых m. В той же степени и формула (11) сохраняется на качественном уровне, если считать, что рассматриваемая волна имеет каустику вблизи поверхности. Это приводит к добавке в фазе (порядка $\pi/4$) в формуле квантования (5), которая относительно мало повлияет на величину τ_m. Все аномалии в поведении коэффициента затухания α_m по существу связаны с наличием длины цикла l_m в знаменателе формулы (11), поскольку, как известно, величина l_m в значительно большей степени чувствительна к особенностям поведения профиля $n(z)$, чем $\cos\varphi_m(H)$. В статье Крупина [2] указывалось, что в случае отрицательного градиента скорости l_m вначале возрастает с номером m, а следовательно, может убывать. К еще более аномальному поведению может привести наличие слоя с почти постоянной скоростью вблизи поверхности, что характерно, например, в летний период времени.

Пусть величина σ_m для некоторого m лишь ненамного меньше показателя преломления в верхнем слое перемешивания. Тогда из лучевых соображений длина цикла для соответствующей нормальной волны аномально велика, а коэффициент затухания аномально мал. Рассмотрим модельный пример. Пусть показатель преломления $n(z)$ задан формулой $n(z)=A+B\,\mathrm{arctg}\,k(z-z_0)$, где $A=0{,}985$, $B=0{,}00955$, $k=15$, $H=0{,}4$. На частоте 66 Гц для первых четырех нормальных волн соответственно получаем $l_1=3{,}8$, $l_2=3{,}2$, $l_3=5{,}1$, $l_4=3{,}1$; $\cos\varphi_1=0{,}075$, $\cos\varphi_2=0{,}11$, $\cos\varphi_3=0{,}15$, $\cos\varphi_4=0{,}17$.

Таким образом, из (11) следует, что в рассмотренном примере наименьшим затуханием характеризуется первая нормальная волна, затем третья и лишь за ними вторая, четвертая и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kornhauser E. T., Raney W. P.* Attenuation in shallow water due to an absorbing bottom.— JASA, 1955, v. 27, № 4, p. 639—697.
2. *Крупин В. Д.* Об одном явлении в волноводе с отрицательным градиентом скорости звука.— Акустич. журн., 1972, т. 18, № 4, с. 556—564.
3. *Weston D. E., Tindle C. T.* Reflection loss and mode attenuation in a Pekeris model.— JASA, 1979, v. 66, № 3, p. 872—879.
4. *Tindle C. T.* The equivalence of botton loss and mode attenuation per cycle in underwater acoustics.— JASA, 1979, v. 66, № 1, p. 250—255.
5. *Tindle C. T., Weston D. E., Payne C. G.* Cycle distances and attenuation in shallow water.— JASA, 1980, v. 68, № 5, p. 1489—1492.
6. *Tindle C. T., Weston D. E.* Connection of acoustic beam displacement cycle distance and attenuation for rays and normal modes.— JASA, 1980, v. 67, p. 1614—1622.
7. *Булдырев В. С., Буслаев В. С.* Распространение звука в океане. М.: Препринт ИРЭ, 1984.
8. *Болдырев В. С., Славянов С. Ю.* Равномерные асимптотические формулы для решений уравнений типа Шредингера с двумя точками перехода.— Вестн. ЛГУ, 1968, № 22, с. 70—84.

Поступило в редакцию
4.III.1986

УДК 534.222

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА В ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНОМ ВОЛНОВОДЕ С НЕРОВНЫМ ЖИДКИМ ДНОМ

Чилачава Т. И.

К настоящему времени сравнительно хорошо изученной является задача о распространении звука в среде с вертикальной стратификацией. Это естественно, так как предположение о слоистости среды позволяет использовать при математическом исследовании задачи метод разделения переменных с последующим получением богатого набора формул, удобных как для численных расчетов, так и для выявления различных физических закономерностей. При расчетах звуковых полей в слоисто-неоднородных подводных волноводах на высоких частотах, когда число распространяющихся мод велико и расчет их на основе различных численных методов неэффективен, широко применяются асимптотические методы (лучевой метод и асимптотические варианты метода нормальных волн) [1, 2].

Значительно меньше изучено распространение звуковых волн в трехмерно-неоднородной среде. По сути дела, единственным общим подходом к исследованию высокочастотных колебаний в таких средах является лучевой метод. Однако лучевому подходу свойственны хорошо известные трудности, связанные с дифракционными эффектами: образование каустик, полутеневых и теневых зон. В ряде случаев допустимо предположение о слабой зависимости параметров среды от горизонтальных координат. Такое допущение позволяет развить для решения задачи метод, имеющий много общих черт с техникой разделения переменных (в акустике этот метод известен под названием схемы Барриджа – Вейнберга [3]).

Ниже предложен эффективный подход к решению задач распространения звука низких частот в трехмерно-неоднородной среде, связанный с использованием метода асимптотических разложений по малому параметру, характеризующему отклонение показателя преломления среды от единицы. Рассмотрена задача вычисления звукового поля точечного источника в неоднородном волноводе с неровным жидким дном. Предполагается, что вертикальный масштаб неровности дна значительно меньше глубины волновода.

Подобные задачи, помимо известного теоретического интереса, важны и прак-