шей степени чувствительна к особенностям поведения профиля $n(z)$, чем $\cos\varphi_m(H)$. В статье Крупина [2] указывалось, что в случае отрицательного градиента скорости l_m вначале возрастает с номером m, а следовательно, может убывать. К еще более аномальному поведению может привести наличие слоя с почти постоянной скоростью вблизи поверхности, что характерно, например, в летний период времени.

Пусть величина σ_m для некоторого m лишь ненамного меньше показателя преломления в верхнем слое перемешивания. Тогда из лучевых соображений длина цикла для соответствующей нормальной волны аномально велика, а коэффициент затухания аномально мал. Рассмотрим модельный пример. Пусть показатель преломления $n(z)$ задан формулой $n(z)=A+B\,\mathrm{arctg}\,k(z-z_0)$, где $A=0{,}985$, $B=0{,}00955$, $k=15$, $H=0{,}4$. На частоте 66 Гц для первых четырех нормальных волн соответственно получаем $l_1=3{,}8$, $l_2=3{,}2$, $l_3=5{,}1$, $l_4=3{,}1$; $\cos\varphi_1=0{,}075$, $\cos\varphi_2=0{,}11$, $\cos\varphi_3=0{,}15$, $\cos\varphi_4=0{,}17$.

Таким образом, из (11) следует, что в рассмотренном примере наименьшим затуханием характеризуется первая нормальная волна, затем третья и лишь за ними вторая, четвертая и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kornhauser E. T., Raney W. P.* Attenuation in shallow water due to an absorbing bottom.– JASA, 1955, v. 27, № 4, p. 639–697.
2. *Крупин В. Д.* Об одном явлении в волноводе с отрицательным градиентом скорости звука.– Акустич. журн., 1972, т. 18, № 4, с. 556–564.
3. *Weston D. E., Tindle C. T.* Reflection loss and mode attenuation in a Pekeris model.– JASA, 1979, v. 66, № 3, p. 872–879.
4. *Tindle C. T.* The equivalence of botton loss and mode attenuation per cycle in underwater acoustics.– JASA, 1979, v. 66, № 1, p. 250–255.
5. *Tindle C. T., Weston D. E., Payne C. G.* Cycle distances and attenuation in shallow water.– JASA, 1980, v. 68, № 5, p. 1489–1492.
6. *Tindle C. T., Weston D. E.* Connection of acoustic beam displacement cycle distance and attenuation for rays and normal modes.– JASA, 1980, v. 67, p. 1614–1622.
7. *Булдырев В. С., Буслаев В. С.* Распространение звука в океане. М.: Препринт ИРЭ, 1984.
8. *Болдырев В. С., Славянов С. Ю.* Равномерные асимптотические формулы для решений уравнений типа Шредингера с двумя точками перехода.– Вестн. ЛГУ, 1968, № 22, с. 70–84.

Поступило в редакцию
4.III.1986

УДК 534.222

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА В ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНОМ ВОЛНОВОДЕ С НЕРОВНЫМ ЖИДКИМ ДНОМ

Чилачава Т. И.

К настоящему времени сравнительно хорошо изученной является задача о распространении звука в среде с вертикальной стратификацией. Это естественно, так как предположение о слоистости среды позволяет использовать при математическом исследовании задачи метод разделения переменных с последующим получением богатого набора формул, удобных как для численных расчетов, так и для выявления различных физических закономерностей. При расчетах звуковых полей в слоисто-неоднородных подводных волноводах на высоких частотах, когда число распространяющихся мод велико и расчет их на основе различных численных методов неэффективен, широко применяются асимптотические методы (лучевой метод и асимптотические варианты метода нормальных волн) [1, 2].

Значительно меньше изучено распространение звуковых волн в трехмерно-неоднородной среде. По сути дела, единственным общим подходом к исследованию высокочастотных колебаний в таких средах является лучевой метод. Однако лучевому подходу свойственны хорошо известные трудности, связанные с дифракционными эффектами: образование каустик, полутеневых и теневых зон. В ряде случаев допустимо предположение о слабой зависимости параметров среды от горизонтальных координат. Такое допущение позволяет развить для решения задачи метод, имеющий много общих черт с техникой разделения переменных (в акустике этот метод известен под названием схемы Барриджа – Вейнберга [3]).

Ниже предложен эффективный подход к решению задач распространения звука низких частот в трехмерно-неоднородной среде, связанный с использованием метода асимптотических разложений по малому параметру, характеризующему отклонение показателя преломления среды от единицы. Рассмотрена задача вычисления звукового поля точечного источника в неоднородном волноводе с неровным жидким дном. Предполагается, что вертикальный масштаб неровности дна значительно меньше глубины волновода.

Подобные задачи, помимо известного теоретического интереса, важны и практически; так, например, при волноводном сверхдальнем распространении звука в слоисто-неоднородной среде влияние даже небольших неоднородностей или неровностей границ может весьма сильно сказаться на дальности распространения.

Звуковое давление, создаваемое гармоническим точечным источником в точке $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ водного слоя, описывается выражением $p(\mathbf{x},t)=\operatorname{Re}[u_\varepsilon(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$, где комплексная амплитуда поля $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ – решение краевой задачи (здесь и далее все величины даны в безразмерном виде, причем в качестве размерного физического параметра взята глубина волновода: $H:H=\max\limits_{(x_1x_2)\in\overline{\Omega}_0}\operatorname{mod} h(x_1,x_2)$, где $x_3=h(x_1,x_2)<0$ – уравнение дна, а решение определяется в слое $\Omega_1=\overline{\Omega}_0\times[h,0]$:

$$(\Delta+k^2n^2(\mathbf{x}))u_\varepsilon=-\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0), \qquad -1+\varepsilon f(\mathbf{x}')\leqslant x_3\leqslant 0, \tag{1}$$

$$u_\varepsilon|_{x_3=0}=0, \qquad (u_\varepsilon-u)|_{x_3=-1+\varepsilon f(\mathbf{x}')}=0, \qquad \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_\varepsilon}-\varkappa^{-1}\frac{\partial u}{\partial \nu_\varepsilon}\right)\Bigg|_{x_3=-1+\varepsilon f(\mathbf{x}')}=0,$$

$$(\Delta+k^2n_1^2)u=0, \qquad x_3<-1+\varepsilon f(\mathbf{x}'),$$
$$u_\varepsilon(\mathbf{x})\to 0, \qquad u(\mathbf{x})\to 0, \qquad |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|\to\infty, \qquad \operatorname{Im}\omega>0,$$

где $n^2(\mathbf{x})=1+\varepsilon\eta(\mathbf{x})$, n_1^2 – квадраты показателей преломления водного слоя и жидкого дна, ε – малый параметр (в реальных ситуациях $\varepsilon\leqslant 0{,}04$), $\eta(\mathbf{x})\in C(\Omega_1)$ и $\max\limits_{x\in\Omega_1}\operatorname{mod}\eta(\mathbf{x})\leqslant O(1)$; $\mathbf{x}'=(x_1,x_2)$; $x_3=-1+\varepsilon f(\mathbf{x}')$ – уравнение дна в безразмерном виде (здесь предполагается, что отношение вертикального размера неровности дна к глубине волновода порядка ε), k – безразмерное волновое число, $\mathbf{x}^0=(0,0,x_3^0)$ – точка, в которой расположен источник, $\varkappa^{-1}=\alpha\varepsilon$ $(\alpha=O(1))$ – отношение плотности воды к плотности дна, $f(\mathbf{x}')\geqslant 0$ – гладкая функция, отличная от нуля лишь в некоторой ограниченной области $\Omega:\Omega=\bigcup\limits_{j=1}^{N}\Lambda_j$ и при $N>\bigcap\limits_{j=1}^{N}\Lambda_j=\varnothing$; ν_ε – внешняя нормаль к границе, вычисляемая по формуле

$$\nu_\varepsilon(\mathbf{x}',-1+\varepsilon f(\mathbf{x}'))=(1+\varepsilon^2|\nabla' f|^2)^{-1/2}\left(-\varepsilon\frac{\partial f}{\partial x_1},-\varepsilon\frac{\partial f}{\partial x_2},1\right)=$$
$$=(0,0,1)-\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},0\right)+O(\varepsilon^2).$$

Найдя решение $u(\mathbf{x})$ в однородной жидкой области $x_3<-1+\varepsilon f(\mathbf{x}')$, далее можно для функции $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ построить первые два члена ряда теории возмущений. Коэффициенты этого ряда ищутся как решения некоторых краевых задач для неоднородного уравнения Гельмгольца в невозмущенном волноводе.

Таким образом, решение краевой задачи (1) ищем в виде $u_\varepsilon(\mathbf{x})=u_0(\mathbf{x})+\varepsilon u_1(\mathbf{x})+\ldots$ где главный член асимптотики $u_0(\mathbf{x})$ есть решение задачи в невозмущенном волноводе:

$$(\Delta+k^2)u_0=-\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0), \qquad u_0|_{x_3=0}=0, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=-1}=0$$

и имеет вид

$$u_0(\mathbf{x})=\frac{i}{2}\sum_{n\geqslant 0}\sin(\beta_n x_3^0)\sin(\beta_n x_3)H_0^{(1)}(ka_n|\mathbf{x}'|), \tag{2}$$

$$\beta_n=(n+0{,}5)\pi, \qquad (n=0,1,2,\ldots), \qquad a_n=\sqrt{1-b_n^2},$$
$$b_n=\beta_n/k;$$

при этом ветвь квадратного корня выбирается из условия $\operatorname{Im}a_n\geqslant 0$, а $k\neq(s+0{,}5)\pi$, $(s=0,1,2,\ldots)$.

Ограничение на безразмерное волновое число введено для того, чтобы исключить поперечный резонанс, при котором амплитуда соответствующей моды (номера s) неограниченно возрастает.

Следующий член асимптотики $u_1(\mathbf{x})$ есть решение неоднородной задачи:

$$(\Delta+k^2)u_1=-k^2\eta(\mathbf{x})u_0(\mathbf{x}), \qquad u_1|_{x_3=0}=0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=-1}=\psi(\mathbf{x}')+\varphi(|\mathbf{x}'|),$$

$$\psi(\mathbf{x}')\equiv\left(\nabla' u_0\nabla' f-f(\mathbf{x}')\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2}\right)\bigg|_{x_3=-1},$$

$$\varphi(|\mathbf{x}'|)\equiv\frac{\alpha k i}{2}\sum_{n\geqslant 0}\sqrt{a_n^2-n_1^2}(-1)^{n+1}\sin(\beta_n x_3^0)H_0^{(1)}(ka_n|\mathbf{x}'|)$$

и имеет вид (будем интересоваться только распространяющимися модами)

$$u_1(\mathbf{x}) = x_3(\psi(\mathbf{x}') + \varphi(|\mathbf{x}'|)) + \frac{i}{2}\sum_{m=0}^{M} \sin(\beta_m x_3) \times$$

$$\times \left\{(-1)^m \frac{\alpha k i}{2} \sum_{n\geqslant 0} \sqrt{a_n{}^2 - n_1{}^2}\,(-1)^{n+1} \sin(\beta_n x_3{}^0) \int_{\bar{\Omega}_0} H_0^{(1)}(r_n)\, H_0{}^1(\rho_m)\, d\mathbf{y}' + \right.$$

$$+ \frac{4i(-1)^m}{\beta_m{}^2}(\varphi|\mathbf{x}'|) + \psi(\mathbf{x}')) + \frac{ik^2}{2}\sum_{n\geqslant 0} \sin(\beta_n x_3{}^0) \int_{\bar{\Omega}_0} I_{mn}(\mathbf{y}') \times$$

$$\left. \times H_0^{(1)}(r_n)\, H_0^{(1)}(\rho_m)\, d\mathbf{y}' + \frac{ik^2}{2}(-1)^m \int_{\Omega} f(\mathbf{y}')\, G_m(\mathbf{x}', \mathbf{y})\, d\mathbf{y}' \right\}, \tag{3}$$

$$I_{mn}(\mathbf{y}') = \int_{-1}^{0} \eta(\mathbf{y}) \sin(\beta_n y_3) \sin(\beta_m y_3)\, dy_3, \qquad M = \left[\frac{k}{\pi} - \frac{1}{2}\right],$$

$$\rho_m = k a_m |\mathbf{x}' - \mathbf{y}'|, \qquad r_n = k a_n |\mathbf{y}'|,$$

$$G_m(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} \sin(\beta_n x_3{}^0)\,[H_0^{(1)}(r_n) H_0^{(1)}(\rho_m) + a_n a_m H_1^{(1)}(\rho_m) H_1^{(1)}(r_n) \cos\theta],$$

где θ – угол между векторами $\mathbf{y}'$ и $\mathbf{x}' - \mathbf{y}'$.

Формула (3) дает модовое представление для возмущения звукового поля. Рассматривая распространение моды с фиксированным номером m, видим, что возмущение поля имеет вид континуальной суммы расходящихся вторичных волн, «источниками» которых являются неоднородности; при этом амплитуды этих волн пропорциональны величине ε и зависят от параметров всех мод. С этой точки зрения процесс рассеяния можно представить себе как переход энергии звуковой волны от моды данного номера (падающая волна) к модам других номеров (рассеянные волны). Таким образом, неоднородности осуществляют связь между модами разных номеров, которые были бы вполне независимыми в волноводе, не содержащем неоднородностей.

Следует также отметить наличие в формуле (3) слагаемых двух типов: первый (зависящий только от ρ_m, r_n) соответствует ненаправленному, а второй (зависящий также и от угла θ) – направленному излучению волн «элементарным источником», находящимся в точке $\mathbf{y}' \in \bar{\Omega}_0$ (в случае ненаправленного) и в $\mathbf{y}' \in \Omega$ (в случае направленного).

Полученные выше формулы (2), (3) аналитически описывают рассеяние звука неоднородностями среды (рефракция), а также небольшими подводными горами.

Рассмотрим некоторые практически важные следствия.

Формулы (2), (3) (в случае $\alpha \equiv 0$, $f \equiv 0$ и, например, $\eta(y_3) = a(y_3 - y_1{}^0) + b(y_3 - y_2{}^0)^2 + y_3{}^0$) будут давать решение задачи о рассеянии звуковых волн в плоскослоистом волноводе с твердым дном. Коэффициенты I_{mn} при этом имеют вид

$$I_{mn} = \frac{a - 2by_2{}^0}{2}\left[\frac{1 + (-1)^{n-m+1}}{(\beta_n - \beta_m)^2} - \frac{1 + (-1)^{n+m}}{(\beta_n + \beta_m)^2}\right] +$$

$$+ b\left[\frac{(-1)^{n-m}}{(\beta_n - \beta_m)^2} - \frac{(-1)^{n+m+1}}{(\beta_n + \beta_m)^2}\right], \qquad m \neq n,$$

$$I_{ss} = -\frac{(a - 2by_2{}^0)(\beta_s{}^2 + 1)}{4\beta_s{}^2} + \frac{by_2{}^{0^2} - ay_1{}^0}{2} + \frac{b(2\beta_s{}^2 + 3)}{12\beta_s{}^2} + \frac{y_3{}^0}{2}.$$

Для случая однородного волновода ($\eta \equiv 0$) и твердого дна ($\alpha \equiv 0$) при $M = 0$ (одна распространяющаяся мода, например низкие частоты), $|\mathbf{y}'|$, $|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'| \gg (ka_0)^{-1}$ (расстояния от источника и приемника до неоднородности Ω велики), а также $d_j = O[(ka_0)^{-1}]$ (диаметры d_j областей Λ_j малы) при $\mathbf{x}' \notin \operatorname{supp}\psi(\mathbf{x}')$ из (2), (3) получим

$$u_1(\mathbf{x}) \simeq \frac{-ik^2}{2\pi} \sin(\beta_0 x_3{}^0) \sin(\beta_0 x_3) \sum_{j=1}^{N} \int_{\Lambda_j} f_j(\mathbf{y}')\, d\mathbf{y}' \frac{e^{i(\rho_{0j} + r_{0j})}}{\sqrt{\rho_{0j} r_{0j}}} (1 - a_0{}^2 \cos\theta_j); \tag{4}$$

здесь учтено, что $f(\mathbf{y}') = \sum_{j=1}^{N} f_j(\mathbf{y}')\chi_{\Lambda_j}(\mathbf{y}')$, где $\chi_{\Lambda_j}(\mathbf{y}')$ характеристическая функция множества Λ_j.

При этом для интегралов, содержащихся в выражении (4), имеют место простые оценки

$$I_j=\int\limits_{\Lambda_j} f_j(\mathbf{y}')\,d\mathbf{y}^{(\prime)}\leqslant \bar{f}_j\frac{\pi d_j^2}{4},$$

где $\bar{f}_j$ – среднее значение функции $f_j(\mathbf{y}')$ в области Λ_j.

Для конкретных числовых расчетов дифракции звука на небольших подводных горах (например, эллипсоидальных) в качестве функции $f(\mathbf{y}')$ можно взять

$$f(\mathbf{y}')=\sum_{j=1}^{N} c_j\sqrt{1-\frac{(y_1-y_1)^2+(y_2-y_{2j})^2}{d_j^2}}\,\theta\left[1-\frac{(y_1-y_{1j})^2+(y_2-y_{2j})^2}{d_j^2}\right],\quad c_j>0.$$

где $\theta(z)$ – функция Хевисайда.

В задаче дифракции звука на неровностях морского дна формула (4) в случае $N=1$ позволяет сделать, например, следующий вывод: при рассеянии звука небольшой подводной горой отношение интенсивностей отраженной волны в точках $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ определяется соотношением

$$\frac{|u_1(\mathbf{x}^1)|^2}{|u_1(\mathbf{x}^2)|^2}=\left(\frac{\sin(\beta_0 x_3^{(1)})}{\sin(\beta_0 x_3^{(2)})}\right)^2\left(\frac{1-a_0^2\cos\theta_1}{1-a_0^2\cos\theta_2}\right)^2\frac{\rho_0^{(2)}}{\rho_0^{(1)}},\tag{5}$$

где θ_l, $\rho_0^{(l)}$, $x_3^{(l)}$ – значения параметров θ, ρ_0, x_3 для точек $\mathbf{x}^l$ ($l=1, 2$).

Формула (5) показывает, что интенсивность отраженной от одиночной подводной горы звуковой волны обратно пропорциональна расстоянию до неоднородности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булдырев В. С., Буслаев В. С.* Качественная структура акустического поля в океане. М.: Препринт ИРЭ АН СССР, 1984, № 44. 55 с.
2. *Булдырев В. С., Буслаев В. С.* Распространение звука в океане. М.: Препринт ИРЭ АН СССР, 1984, № 45, 43 с.
3. *Барридж Р., Вейнберг Г.* Горизонтальные лучи и вертикальные моды.– В кн.: Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980, с. 76–125.

Поступило в редакцию
11.X.1985