

зали расчеты, изменяется слабо и в расчетах могут быть положены такими же как в полупространстве из GaAs.

Таким образом, на основании расчетов показаны изменения характеристик ПАВ на плоскости (001) GaAs при наличии на поверхности последнего структуры типа оптического волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хансперджер Р. Интегральная оптика: теория и технология. М.: Мир, 1985.
2. Loh K. W., Chang W. S. C., Smith R. W., and Grudkowsky T. Bragg coupling efficiency for guided acoustooptic interaction in GaAs // Appl. Opt. 1976. V. 15. № 1. P. 156-166.
3. Yamazaki O., Tsai C. S., Umeda M., Yap L. S., Lii C. J., Wasa K., Maerz J. // Guided-wave acoustooptic interaction in GaAs-ZnO composite structure // Ultra. Symp. 1982. P. 418-421.
4. Lii C. J., Lee C. C., Yamazaki O., Yap L. S., Wasa K., Merz J., Tsai C. S. Efficient wideband acoustooptic Bragg diffraction in GaAs-GaAlAs waveguide structure // In Tech. Dig., 4th- Int. Conf. on Integrated Optics and Optical Fiber. Comm. Tokyo. 1983. P. 250-251.
5. Penunuri D. and Lakin K. M. Leaky surface wave propagation on Si, GaAs, Al₂O₃ and quartz. — 1975 Ultrasonic Symposium Proceedings, p. 478-483.
6. Deacon J. M., Heighway J. Acoustic surface wave propagation on gallium arsenide // Electron. Lett. 1972. V. 8. № 1. P. 6-7.
7. Левин М. Д., Лобанова Г. А., Пащин Н. С., Яковкин И. Б. Поверхностные волны в арсениде галлия // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 1. С. 68-71.
8. Ляхов Н. З., Тазиев Р. М. Улучшенный алгоритм расчета параметров акустических поверхностных волн в анизотропных средах. — Деп. в ВИНТИ, № 5235-84.
9. Adachi S., GaAs, AlAs, and Al_xGa_{1-x}As: Material parameters for use in research and device application // J. Appl. Phys. 1985. V. 58. № 3. P. R81-R29.
10. Sapriel T., Michel J. C., Toledano J. C., Vacher R., Kervarec J., Regreny A. Light scattering from vibrational modes in GaAs-Ga_{1-x}Al_xAs superlattices and related alloys // Phys. Rev. (B). 1983. V. 28. № 4. P. 2007-2016.
11. Ilyich A. A., Kikkarin S. M., Petrov D. V., Tsarev A. V., Yakovkin I. B. A comparison of acoustooptic interaction in LiNbO₃ and GaAlAs waveguides // Opt. Comm. 1985. V. 56. № 3. P. 161-166.
12. Фарнелл Дж. // Физическая акустика / Под ред. Мэсона У. Т. 6. М.: Мир, 1973.
13. Слободник А. Материалы и их влияние на характеристики устройств // Поверхностные акустические волны / Под ред. Олинера А. А. М.: Мир, 1981.
14. Melloch M. R., Wagers R. S. Propagation loss of the acoustic pseudosurface wave on (Z×t) 45° GaAs // Appl. Phys. Lett. 1983. V. 43. № 11. P. 1008-1009.

Институт физики полупроводников
Сибирского отделения
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
24.III.1986

УДК 534.2

РАСSEЯНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ТРЕХМЕРНОМ ВИХРЕ

Климов В. В., Прозоровский В. Л.

В настоящее время значительный практический интерес вызывает рассеяние акустических волн на разного рода вихревых структурах атмосферы и океана. В [1, 2] был представлен анализ рассеяния звука на двумерных вихревых структурах и в борновском приближении найдены выражения для амплитуды рассеяния. В очень интересной работе [3] теоретически и экспериментально было рассмотрено рассеяние звука тороидальным вихрем и продемонстрировано хорошее совпадение теории и эксперимента.

В настоящей работе рассматривается рассеяние акустических волн на трехмерной вихревой структуре — вихре Хилла. Вихрь Хилла находится на «противоположном» (по отношению к тороидальным вихрям) краю семейства стационарных вихрей и поэтому анализ рассеяния звука на нем представляет значительный интерес. В отличие от [3] при рассмотрении рассеяния звука на вихре не ограничиваемся борновским приближением, недостатки которого хорошо известны, а учитываем непертурбационные поправки к амплитуде рассеяния. Предложенная методика позволяет также найти корректные выражения для полного сечения рассеяния.

Как хорошо известно [4], линеаризованные уравнения гидродинамики, описывающие рассеяние акустических волн на вихревом течении с характерной скоростью V_0 и масштабом L_0 имеют вид

$$\begin{aligned}i\omega \mathbf{v} &= (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{V} + c^2\nabla R, \\i\omega R &= (\mathbf{V}\nabla)R + \nabla \mathbf{v}.\end{aligned}\tag{1}$$

В (1) использованы следующие обозначения: ω — частота звука, \mathbf{V} — поле скорости

вихря, v — колебательная скорость звука, R — относительное изменение плотности, c — скорость звука, $\omega \gg V_0/L_0$.

Комбинируя уравнения (1) и используя малость числа Маха $M=V_0/c \ll 1$, можно прийти к волновому уравнению:

$$(\nabla^2 + k^2)R = -\frac{2}{c^2} [V_i \partial_i \partial_j v_j + (\partial_i V_j) (\partial_j v_i)]. \quad (2)$$

Найдем сначала характеристики рассеянного звука в борновском приближении, для чего в (2) вместо v_i подставим колебательную скорость невозмущенного акустического поля: $v = v_0 = c^2 \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})/\omega$, \mathbf{k} — волновой вектор падающей волны. В этом случае решение (2) легко найти с помощью запаздывающей функции Грина [4]:

$$R = R_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \frac{iR_0}{2\pi\omega} (\mathbf{k}\mathbf{V}) \int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{k}\mathbf{V}(\mathbf{r}')) \exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + i\mathbf{k}\mathbf{r}'). \quad (3)$$

В волновой зоне ($r \gg L_0^2/\lambda$) из (3) легко получить выражение для амплитуды рассеяния:

$$R = R_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + R_0 \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{r} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_{out}), \quad (4)$$

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_{out}) = \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_{out})}{2\pi\omega} (\mathbf{k}\mathbf{V}(\mathbf{Q})),$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_{out}$, $\mathbf{V}(\mathbf{k})$ — пространственная фурье-компонента поля скорости вихревого течения. Выражение (4) можно также записать в виде зависимости от фурье-компоненты завихренности

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_{out}) = \frac{i(\mathbf{k}\mathbf{k}_{out})}{2\pi\omega} \frac{(\mathbf{k}[\mathbf{Q}\mathbf{\Omega}(\mathbf{Q})])}{Q^2}. \quad (5)$$

Выражение (5) для амплитуды рассеяния совпадает, как и следовало ожидать, с выражением (1) из [3]. Однако наша методика получения (5), не использующая перехода к импульсному пространству и последующего вычисления контурных интегралов, значительно проще.

Конкретизируем выражение (5) для случая, когда вихревое движение согласовано с точными уравнениями гидродинамики — для так называемого вихря Хилла. В случае вихря Хилла радиуса a и движущегося со скоростью V_0 завихренность $\mathbf{\Omega}$ отлична от нуля лишь внутри сферы радиуса a :

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}) = \frac{15}{2a^2} [\mathbf{r}\mathbf{V}_0] \theta(a - |\mathbf{r} - \mathbf{V}_0(t)|). \quad (6)$$

Делая фурье-преобразование (6), получим

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{k}) = -\frac{30\pi i}{a^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{V}_0 t) [\mathbf{V}_0 \mathbf{k}] \frac{f_2(ka)}{(ka)^2}. \quad (7)$$

Подставляя теперь (7) в (5), получим окончательно выражение для амплитуды рассеяния акустической волны на вихре Хилла в борновском приближении (фазовый множитель $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{V}_0 t)$ здесь для нас несуществен и его опускаем):

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{15V_0(ka)^3}{\omega} \cos \theta \cos \theta/2 (\cos \theta_0 \cos \theta/2 + \sin \theta/2 \sin \theta_0 \cos \varphi) j_2(Qa)/(Qa)^2, \quad (8)$$

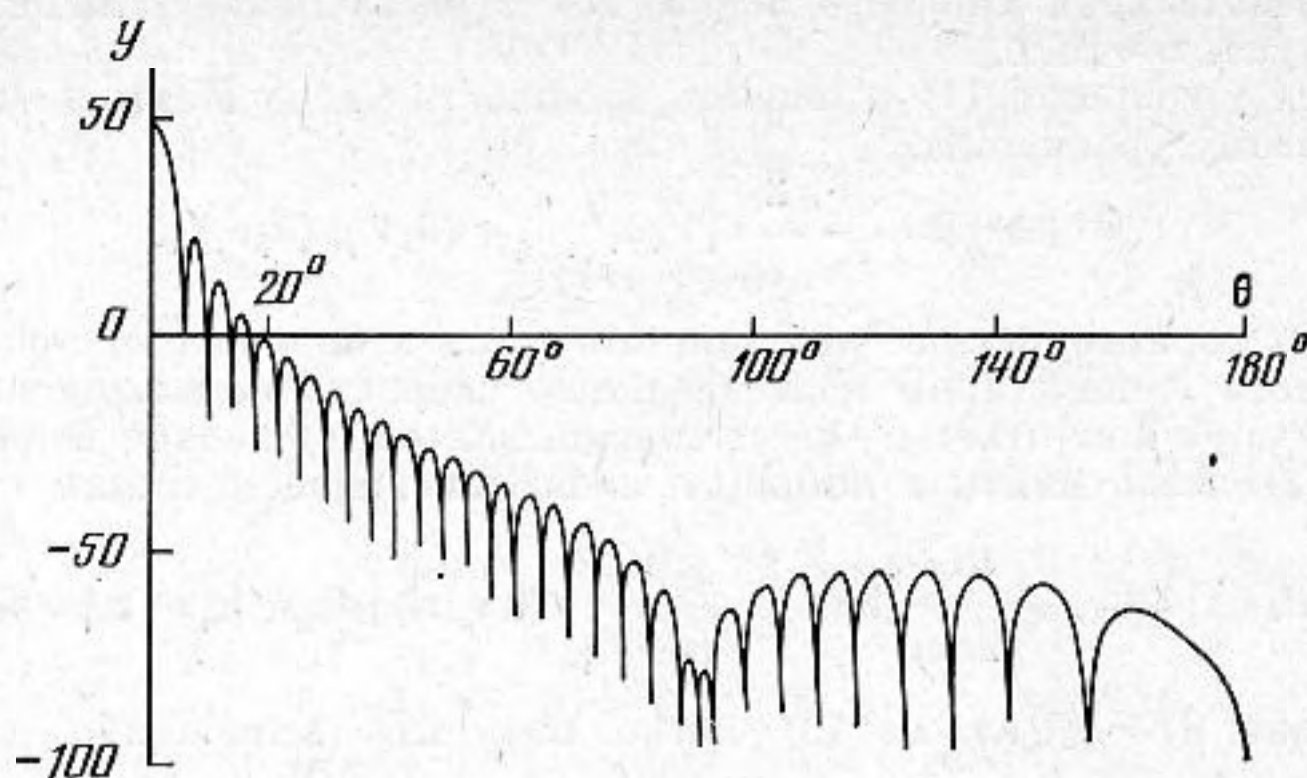
$$j_2(x) = \frac{(3-x^2)\sin x - 3x \cos x}{x^3},$$

j_2 — сферическая функция Бесселя. В (8) θ , φ определяют направление рассеяния, θ_0 — угол между поступательной скоростью вихря Хилла и направлением падающей волны. С помощью (8) несложно найти и дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega = |f(\theta, \varphi)|^2$:

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{\sin \theta d\theta} = \int_0^{2\pi} d\varphi |f(\theta, \varphi)|^2 = \frac{225V_0^2(ka)^6}{\omega^2} \cos^2 \theta \cos^2 \theta/2 \times \\ \times (2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta/2 (1 - 3 \cos^2 \theta_0)) j_2^2(Qa)/(Qa)^4. \quad (9)$$

На фиг. 1 показан график зависимости $d\tilde{\sigma}/\sin \theta d\theta$ от θ .

Полученные выражения для амплитуды и сечения в борновском приближении, несмотря на медленное спадание поля скорости вихря Хилла (как $1/r^3$), не имеют особенностей ни в какой области углов и поэтому могут служить неплохим приближением к точной амплитуде рассеяния. Однако в области малых углов борновское приближение не представляется вполне корректным из-за того, что амплитуда рассеяния в борновском приближении вообще не имеет мнимой части, которая по крайней мере в области малых углов согласно оптической теореме должна быть от-



Фиг. 1. График зависимости $d\tilde{\sigma}/\sin\theta d\theta = y(\theta)$, дБ/
/(м²/рад) при $V_0=1$ м/с, $\nu=100$ Гц, $ka=50$, $\theta_0=0^\circ$

лична от нуля. Уточнение амплитуды рассеяния в области малых углов можно проделать в рамках эйконального приближения [5]. Для этого сначала следует выяснить как вихрь Хилла искажает падающую волну. Модифицированное выражение для падающей волны будем искать в виде

$$v = v_0 \exp i(kr + \varphi_V), \quad R = R_0 \exp i(kr + \varphi_R). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (1), получим, считая, что $\varphi_V \sim V_0$, следующее уравнение для φ_V :

$$(k\nabla)\varphi_V = -\frac{\omega}{c^2}(kV). \quad (11)$$

Для φ_R получается аналогичное уравнение. Решение (11) с условием, что $\varphi_V \rightarrow 0$ при приближении к источнику акустической волны имеет вид:

$$\varphi_V = -\frac{\omega}{c^2} \int_{-\infty}^0 ds (kV(r+ks)). \quad (12)$$

Подставляя уточненное выражение для падающей волны (10) в (2), получим уравнение, из которого можно уже найти уточненную амплитуду рассеяния в области малых углов:

$$(\nabla^2 + k^2)R = \frac{2R_0 k^2 (kV)}{\omega} \exp(i(kr + \varphi_V)). \quad (13)$$

Заметим, что второй член в правой части (2) в области малых углов рассеяния можно не учитывать. В волновой зоне решение (13) имеет вид

$$R = R_0 \exp(ikr) - \frac{k^2 R_0}{2\pi\omega} \frac{\exp(ikr)}{r} \int d^3r' \exp(iQr') \exp(i\varphi_V) (kV). \quad (14)$$

Из (14) с использованием (11) можно найти уточненную в области малых углов амплитуду рассеяния:

$$\tilde{f}(k, k_{out}) = -\frac{i}{2\pi} \int d^3r' \exp(iQr') (k\nabla) \exp\left(-\frac{i\omega}{c^2} \int_{-\infty}^0 ds (kV(r+ks))\right), \quad (15)$$

так как интересующая область малых углов, то можно считать, что Q ортогонально k и поэтому для вычисления (15) удобно ввести систему координат $r = \{r_\perp, r_\parallel\}$, где $(r_\perp, k) = 0$. В этой системе координат интеграл по r_\parallel вычисляется сразу:

$$\tilde{f}(k, k_{out}) = -\frac{ik}{2\pi} \int d^2r_\perp \exp(iQr_\perp) \left\{ \exp\left(-\frac{i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dr_\parallel \left(kV\left(r_\perp + \frac{k}{k} r_\parallel\right)\right)\right) - 1 \right\}. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь случай вихря Хилла:

$$V(r) = \left(3 \frac{r^2}{a^2} - \frac{5}{2}\right) V_0 - \frac{3}{2} \frac{r(V_0 r)}{a^2}, \quad r < a, \quad (17)$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} V_0 - \frac{3}{2} \frac{r(V_0 r)}{r^2} \frac{a^3}{r^3}, \quad r > a.$$

Заметим, что для учета движения вихря Хилла в (17) необходимо сделать замену $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t$.

Интеграл в экспоненте подынтегрального выражения (16) несложно вычислить точно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(kV \left(r_{\perp} + \frac{k}{k} r_{\parallel} \right) \right) dr_{\parallel} = -\theta (a^2 - r^2) V_0 \cos \theta_0 \frac{5}{a^2} (a^2 - r_{\perp}^2)^{3/2}. \quad (18)$$

Теперь, подставляя (18) в (16) и интегрируя по полярному углу, получаем окончательное выражение для амплитуды рассеяния в области малых углов:

$$f(\theta) = -ika^2 \exp(iQV_0 t) \int_0^1 x dx J_0(Qax) \left[\exp\left(i5ka \frac{V_0}{c} \cos \theta_0 (1-x^2)^{3/2} \right) - 1 \right], \quad (19)$$

или после элементарной замены переменных

$$\operatorname{Re} f(\theta) = ka^2 \int_0^1 dx x J_0(Qa\sqrt{1-x^2}) \sin(5ka\beta \cos \theta_0 x^3), \quad (20)$$

$$\operatorname{Im} f(\theta) = 2ka^2 \int_0^1 dx x J_0(Qa\sqrt{1-x^2}) \sin^2 \left(\frac{5}{2} ka \beta \cos \theta_0 x^3 \right),$$

$$\beta = V_0/c.$$

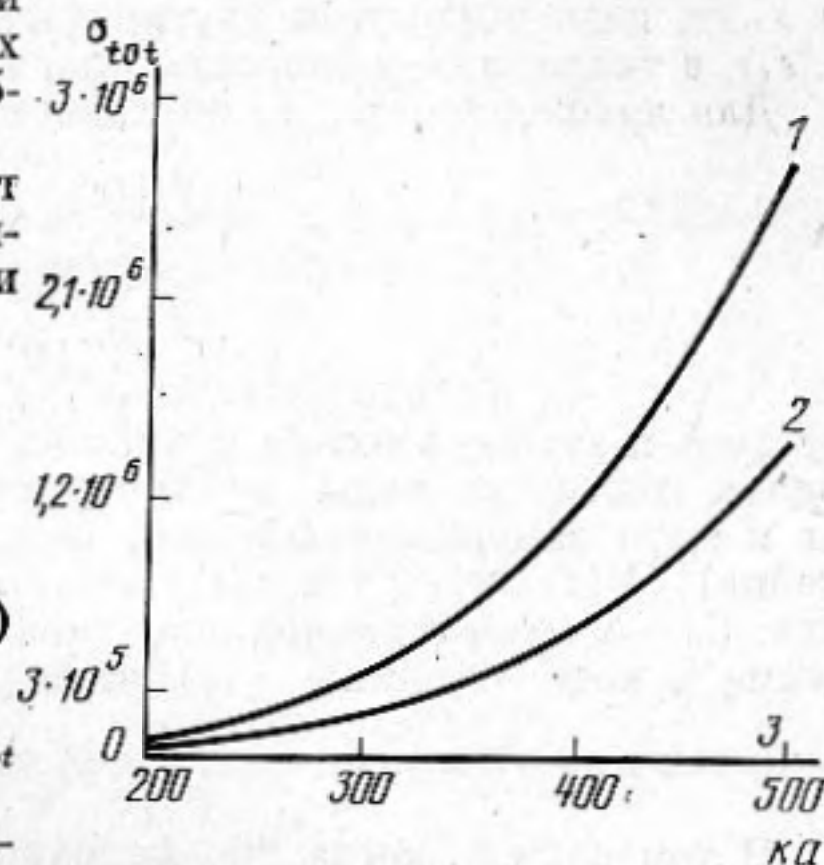
Выражение (20) является нашим окончательным выражением для амплитуды рассеяния на малые углы. В этой области, если разложить в (20) экспоненту и оставить линейный по V_0 член, то (20), как это и должно быть, совпадает с (8) в области малых углов, т. е. с выражением (8), в котором в скобках θ положено равным нулю.

Замечательным свойством (20) является тот факт, что оно полностью согласовано с оптической теоремой. Поэтому из (20) можно найти полное сечение:

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\theta=0) = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^1 dx x \sin^2 \left(\frac{5}{2} ka \beta \cos \theta_0 x^3 \right). \quad (21) \end{aligned}$$

На фиг. 2 показан график зависимости σ_{tot} от ka .

Таким образом, в работе вычислено сечение рассеяния акустических волн на отдельном элементе мезомасштабной изменчивости — на вихре Хилла. Полное сечение рассеяния, как видно из графиков на фиг. 2, в практически интересных случаях составляет десятки метров и более и, следовательно, такого рода вихри необходимо учитывать при решении практических задач. Для более точного учета акустического рассеяния на элементах мезомасштабной изменчивости необходимо принять во внимание ряд неучтенных в настоящей работе факторов, таких как наличие подводного звукового канала, различие характеристик среды в вихре и вне его. Влияние этих факторов в настоящее время исследуется.



Фиг. 2. Зависимость σ_{tot} от ka при $V_0=1$ м/с, $\nu=100$ Гц: 1 — $\theta_0=0^\circ$, 2 — $\theta_0=45^\circ$, 3 — $\theta_0=90^\circ$

ЛИТЕРАТУРА

1. Pekeris C. L. Studies in reverberation Perturbation theory of scattering of sound by convection // JASA, 1984, V. 75, P. 1369—1372.
2. Фабрикант А. Л. Рассеяние звука вихревыми течениями // Акуст. журн., 1983, Т. 29, № 2, С. 262—267.
3. Громов П. Р. и др. Рассеяние звука тороидальным вихрем. Теория и эксперимент. Препринт № 59. — Горький: ИПФ АН СССР, 1982.
4. Голдстейн М. Е. Аэроакустика. — М.: Машиностроение, 1981.
5. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. — М.: Мир, 1967.

Поступило в редакцию
6.I.1986