АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 1

УДК 534.26

О ДИФРАКЦИИ ЗВУКА НА СОЧЛЕНЕНИИ ДВУХ ВОЛНОВОДОВ

Левицкий Л. А.

Методом Винера-Хопфа построено точное решение дифракционной задачи для модели, состоящей из двух плоских полубесконечных состыкованных между собой волноводов, погруженных в акустическую среду. Стенки одного волновода предполагаются идеально жесткими, стенками второго волновода являются тонкие, несжимаемые изгибно-колеблющиеся пластины. Источником поля служит собственная поверхностная изгибная волна, набегающая вдоль волновода из бесконечности. Проанализированы зависимости коэффициента отражения падающей волны и коэффициентов возбуждения нормальных мод от частоты, вычислена диаграмма направленности акустического поля в дальней зоне.

Задача дифракции на открытом конце волновода с полупрозрачными стенками приближенно решена в электродинамике для диэлектрического волновода [1]. В качестве начального приближения использовано точное решение соответствующей задачи дифракции для волновода с идеальными стенками [2]. Точное решение акустической задачи дифракции на открытом конце волновода с полупрозрачными стенками построено в [3]. В качестве стенок волновода были использованы тонкие пластины, способные лишь к изгибным колебаниям.

В такой постановке задача является гранично-контактной [4] и обладает специфическими особенностями, не встречающимися в электродинамике,— решение задачи зависит от механического режима на кромках волновода. Ниже рассматриваются дифракционные процессы в системе из двух плоских, состыкованных между собой волноводов равной ширины, помещенных в акустическую среду. Стенки правого волновода ($x>0$, $y=\pm a$) несжимаемы и описываются уравнением Кирхгофа изгибных колебаний пластины, на стенках левого ($x<0$, $y=\pm a$) волновода выполнено условие Неймана. Искомой величиной является акустическое давление $P(x, y)$. Зависимость процессов от времени задается множителем $\exp(-i\omega t)$, который всюду опускается.

Функция $P(x, y)$ должна удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)P(x, y)=0 \quad (y\neq\pm a), \tag{1}$$

граничным условиям

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, \pm a+0)=\frac{\partial P}{\partial y}(x, \pm a-0), \tag{2}$$

$$L_1P=\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\chi^4\right)\frac{\partial}{\partial y}P(x, \pm a)+\nu[P(x, \pm a+0)-P(x, \pm a-0)]=0 \quad (x>0), \tag{3}$$

$$L_2P=\frac{\partial}{\partial y}P(x, \pm a)=0 \quad (x<0) \tag{4}$$

и гранично-контактным условиям

$$P_y(+0, \pm a)=0, \quad P_{yx}(+0, \pm a)=0 \tag{5}$$

или

$$P_{yxx}(+0, \pm a)=0, \quad P_{yxxx}(+0, \pm a)=0. \tag{6}$$

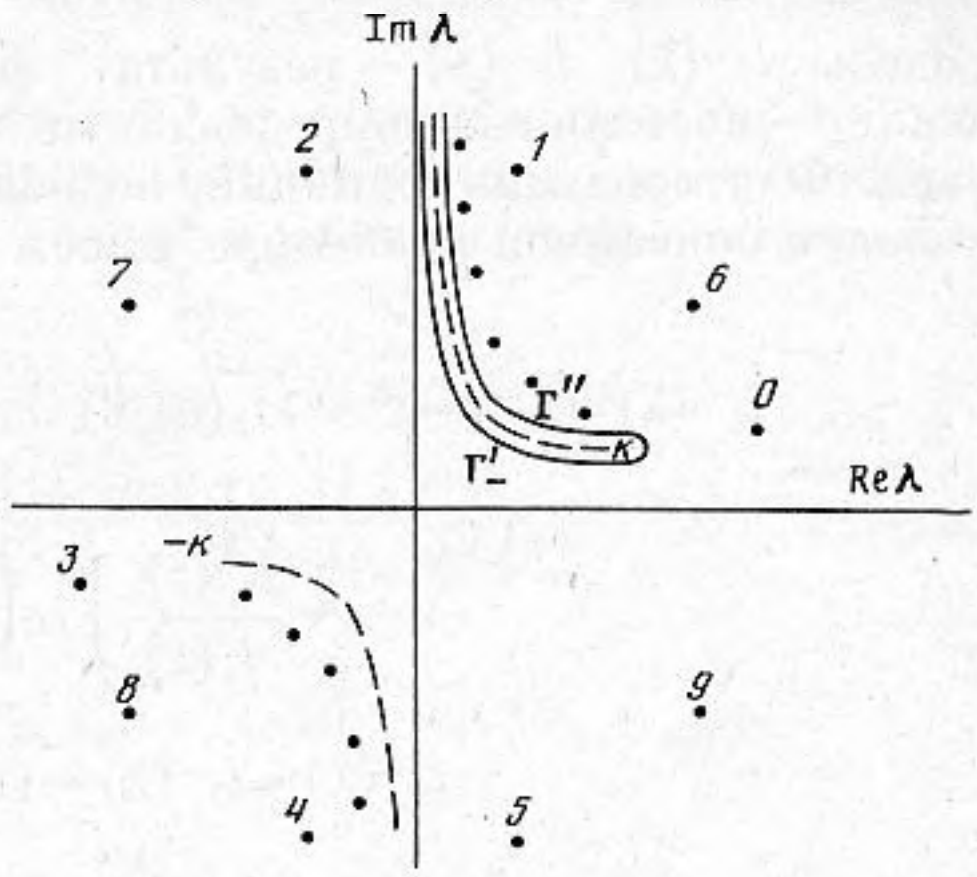
Здесь χ — волновое число изгибных волн в пластине, $\nu=\rho_0\omega^2/D$, ρ_0 — плотность жидкости, D — цилиндрическая жесткость пластины, ω — круговая частота, k — волновое число в жидкости. Уравнение (2) фиксирует несжи-

маемость стенок и непрерывность вертикальных смещений на границе жидкости и пластины, (3) — уравнение изгибных колебаний Кирхгофа, написанное в терминах давления. Контактное условие (5) соответствует спаю кромок волноводов, а условие (6) — трещине между кромками. Выберем в качестве источника поля набегающую справа собственную антисимметричную относительно плоскости $y=0$ волну $P_0(x, y)$ бесконечного волновода. Случай возбуждения y симметричной волной рассматривается аналогично:

$$P_0(x, y)=\exp(-i\lambda_0 x)\,t(y, a, \gamma_0);$$

$$L_1 P_0=0, \tag{7}$$

$$t(y, a, \gamma)=\operatorname{sign}(y-a)\exp(-\gamma|y-a|)+\operatorname{sign}(y+a)\exp(-\gamma|y+a|).$$



Фиг. 1. Корни $l_1(\lambda)$. На основном листе лежат корни с номерами 0, 1, 2, 3, 4, 5, остальные — на втором листе. Штриховые линии — разрезы

Здесь λ_0 — корень дисперсионной функции $l_1(\lambda)$ правого волновода, $\gamma_0=\gamma(\lambda_0)$, $\gamma(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-k^2}$, выбор ветви радикала $\gamma(\lambda)$ традиционный [3], разрезы проведены из точек $\lambda=\pm k$ по линии $\operatorname{Re}\gamma=0$ и обозначены на фиг. 1 штриховой линией. В силу симметрии модели относительно оси OX дифракционное поле $Q_s(x, y)$ имеет ту же симметрию, что и падающее. Будем искать его в виде

$$Q_s(x, y)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \exp(i\lambda x)\,p(\lambda)\,t(y, a, \gamma)\,d\lambda. \tag{8}$$

Полное поле $P=P_0+Q_s$ должно удовлетворять, кроме условий (1)—(5) или (1)—(6), условию Мейкснера в точках $(0, \pm a)$, а рассеянное $Q_s(x, y)$ — еще и условию излучения. Граничные условия (3), (4) можно записать в виде интегральных уравнений

$$L_1 P=\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \exp(i\lambda x)\,l_1(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda=0, \tag{9}$$

$$l_1(\lambda)=2\nu-\gamma(\lambda^4-\chi^4)(1+\exp(-2a\gamma)); \quad l_1(\lambda_0)=0,$$

$$L_2 P=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \exp(i\lambda x)\left(p-\frac{1}{\lambda+\lambda_0}\right)l_2(\lambda)\,d\lambda=0 \quad (x<0),$$

$$l_2(\lambda)=\gamma(1+\exp(-2a\gamma)). \tag{10}$$

Здесь $l_1(\lambda)$, $l_2(\lambda)$ — дисперсионные функции соответственно правого и левого волноводов. Для удовлетворения уравнений (9), (10) достаточно потребовать выполнения соотношений

$$l_1(\lambda)\,p(\lambda)=u^+(\lambda), \quad l_2(\lambda)\left(p-\frac{1}{\lambda+\lambda_0}\right)=u^-(\lambda), \tag{11}$$

где u^+ (u^-) — функция, аналитическая выше (ниже) контура интегрирования. Исключая из (11) $p(\lambda)$, получим неоднородную краевую задачу Римана:

$$\frac{u^+(\lambda)}{l_1(\lambda)}=\frac{u^-(\lambda)}{l_2(\lambda)}+\frac{1}{\lambda+\lambda_0},$$

для нахождения функций u^+, u^- по соотношению между ними, выполненному на контуре Λ. Процедура решения такой задачи подробно опи-

сана в [3] и здесь опускается. Следуя ей, имеем

$$p(\lambda)=\frac{1}{l_1^-(\lambda)\,l_2^+(\lambda)}\left[c_0+c_1\lambda+\frac{l_1^+(\lambda_0)\,l_2^-(\lambda_0)}{\lambda+\lambda_0}\right],$$

$$l_{1,2}(\lambda)=l_{1,2}^+(\lambda)\,l_{1,2}^-(\lambda);\qquad l_1^\pm(\lambda)=O(\omega^{5/2});\qquad l_2^\pm(\lambda)=O(\lambda^{1/2}),\qquad |\lambda|\to\infty.$$

Здесь $l_1^\pm(\lambda)$, $l_2^\pm(\lambda)$ — результат факторизации функций $l_1(\lambda)$, $l_2(\lambda)$, c_0, c_1 — постоянные, определяемые ниже из гранично-контактных условий. Факторизация функций, подобных $l_1(\lambda)$, $l_2(\lambda)$, рассмотрена в [3—5]. Следуя описанной процедуре, имеем

$$l_1^+(\lambda)=l_1^-(-\lambda)=\sqrt{l_1(0)}\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{5/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Lambda\left[\frac{5z}{k^2-z^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{l_1'(z)}{l_1(z)}\right]\ln\left(1-\frac{\lambda}{z}\right)dz\right\},$$

$$l_2^+(\lambda)=l_2^-(\lambda)=\sqrt{l_2(0)}\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{a}{2\pi i}\int\limits_\Lambda\frac{z\exp(-2a\gamma)}{l_2(z)}\ln\left(1-\frac{\lambda}{z}\right)dz\right\}.$$

Контур интегрирования Λ совпадает с действительной осью при $\operatorname{Im}k>0$, а при $\operatorname{Im}k=0$ обходит нули функций $l_1(\lambda)$, $l_2(\lambda)$, лежащие на действительной оси, в соответствии с принципом предельного поглощения [4].

Использование гранично-контактных условий (5), (6) дает линейные неоднородные системы для нахождения констант $c_0I_0+c_1I_1=\varepsilon+\delta J$, $c_0(I_1+\lambda_0I_0)+c_1(I_2+\lambda_0I_1)=\delta I_0$ или $c_0I_2+c_1I_3=\varepsilon\lambda_0^2+\delta(I_1-\lambda_0I_0+\lambda_0^2J)$, $c_0(I_3+\lambda_0I_2)+c_1(I_4+\lambda_0I_3)=\delta I_2$. Здесь $\delta=-l_1^+(\lambda_0)/l_2^-(\lambda_0)$; $\varepsilon=-2\pi i l_2(\lambda_0)$,

$$I_n(k)=\lim_{x\to+0}\int\limits_\Lambda\exp(izx)\,\frac{l_2^-(z)}{l_1^-(z)}\,z^n\,dz,\qquad n=0,1,2,3,4,$$

$$J(k)=\lim_{x\to+0}\int\limits_\Lambda\exp(izx)\,\frac{l_2^-(z)}{l_1^-(z)}\,\frac{1}{z+\lambda_0}\,dz.$$

Поменять местами предельный переход и интегрирование нельзя, ибо подынтегральная функция алгебраически растет при $x=0$ и $|\lambda|\to\infty$. Интегралы (12) допускают регуляризацию [4]. Следуя этому методу, имеем

$$I_n(k)=2\pi i\sum_m\frac{\lambda_m^n l_1^+(\lambda_m)\,l_2^-(\lambda_m)}{l_1'(\lambda_m)}+4\nu\int\limits_{\Gamma_-''}\frac{z^n\gamma[1+\operatorname{ch}(2a\gamma)]}{l_1^-(z)\,l_2^+(z)\,l_1^0(z)}\,dz,$$

$$J(k)=2\pi i\sum_m\frac{1}{\lambda_0+\lambda_m}\,\frac{l_1^+(\lambda_m)\,l_2^-(\lambda_m)}{l_1'(\lambda_m)}+4\nu\int\limits_{\Gamma_-''}\frac{\gamma}{z+\lambda_0}\,\frac{1+\operatorname{ch}(2a\gamma)}{l_1^-(z)\,l_2^+(z)\,l_1^0(z)}\,dz,$$

$$l_1^0(\lambda)=2\nu+\gamma(\lambda^4-\chi^4)\,[1+\exp(2a\gamma)].$$

Суммируются здесь вычеты в корнях $l_1(\lambda)$, находящихся в верхней полуплоскости основного листа функции $\gamma(\lambda)$ и имеющих номера 0, 1, 2. Интегрирование производится по правому берегу Γ_-'' разреза $\operatorname{Re}\gamma=0$, лежащему в верхней полуплоскости. Значения $l_1^0(\lambda)$ на основном листе совпадают со значениями $l_1(\lambda)$ на втором листе.

Изучение корней $l_1(\lambda)$ показало [6], что при $\operatorname{Im}k=0$ существуют только два вещественных корня λ_0 и $\lambda_3=-\lambda_0$, которым соответствуют собственные, незатухающие вдоль волновода поверхностные волны. У остальных корней λ_{1m} функции $l_1(\lambda)$ $\operatorname{Im}\lambda_{1m}\neq0$ и соответствующие собственные процессы экспоненциально затухают вдоль волновода. В левом волноводе ($x<0$) существует счетная последовательность нормальных мод, соответ-

ствующих корням $\lambda_{2m}=\sqrt{k^2-\pi^2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2/a^2}$ функции $l_2(\lambda)$. Если $k\in[k_m,\ k_{m+1}]$, где $k_m=\pi(m-1/2)/a$ — волновое число зарождения m-моды, то волны с номерами $1, 2, \ldots, m$ — распространяющиеся, энергоносные, остальные — затухающие.

Акустическое поле в дальней зоне ($kr\gg1$) можно вычислить применением метода перевала к интегралу (8). С учетом лишь незатухающих вдоль волноводов мод звуковое поле вблизи правого и левого волноводов есть суперпозиция волн:

$$P(x,y)=[\exp(-i\lambda_0x)+R\exp(i\lambda_0x)]t(y,a,\gamma_0);\quad x>0,$$

$$R(k)=\left[c_0+c_1\lambda_0+\frac{l_1^+(\lambda_0)l_2^-(\lambda_0)}{2\lambda_0}\right]\frac{l_1^+(\lambda_0)}{l_2^+(\lambda_0)l_1'(\lambda_0)},\tag{12}$$

$$P(x,y)=\sum_{s=1}^{m}T_s\exp(-i\lambda_{2s}x)t(y,a,\gamma_{2s});\quad x<0,\quad k\in[k_m,k_{m+1}),$$

$$T_m=\frac{1}{2a\lambda_{2m}}\left[c_0-c_1\lambda_{2m}+\frac{l_1^+(\lambda_0)}{l_2^-(\lambda_0)(\lambda_0-\lambda_{2m})}\right]\frac{l_2^+(\lambda_{2m})}{l_1^+(\lambda_{2m})}.\tag{13}$$

Здесь R — коэффициент отражения падающей волны, T_m — коэффициенты возбуждения нормальных мод левого волновода. Вдали от волноводов звуковое поле представляет собой расходящуюся цилиндрическую волну с зависящей от угла амплитудой; угол φ отсчитывается от оси OX:

$$P(r,\varphi)=\frac{1}{\pi\sqrt{kr}}\exp[i(kr-\pi/4)]\Psi(\varphi),$$

$$\Psi(k,\varphi)=k\sin\varphi\cos(ak\sin\varphi)\left[c_0+c_1k\cos\varphi+\right.$$
$$\left.+\frac{l_1^+(\lambda_0)l_2^-(\lambda_0)}{\lambda_0+k\cos\varphi}\right]\frac{1}{l_1^-(k\cos\varphi)l_2^+(k\cos\varphi)}.$$

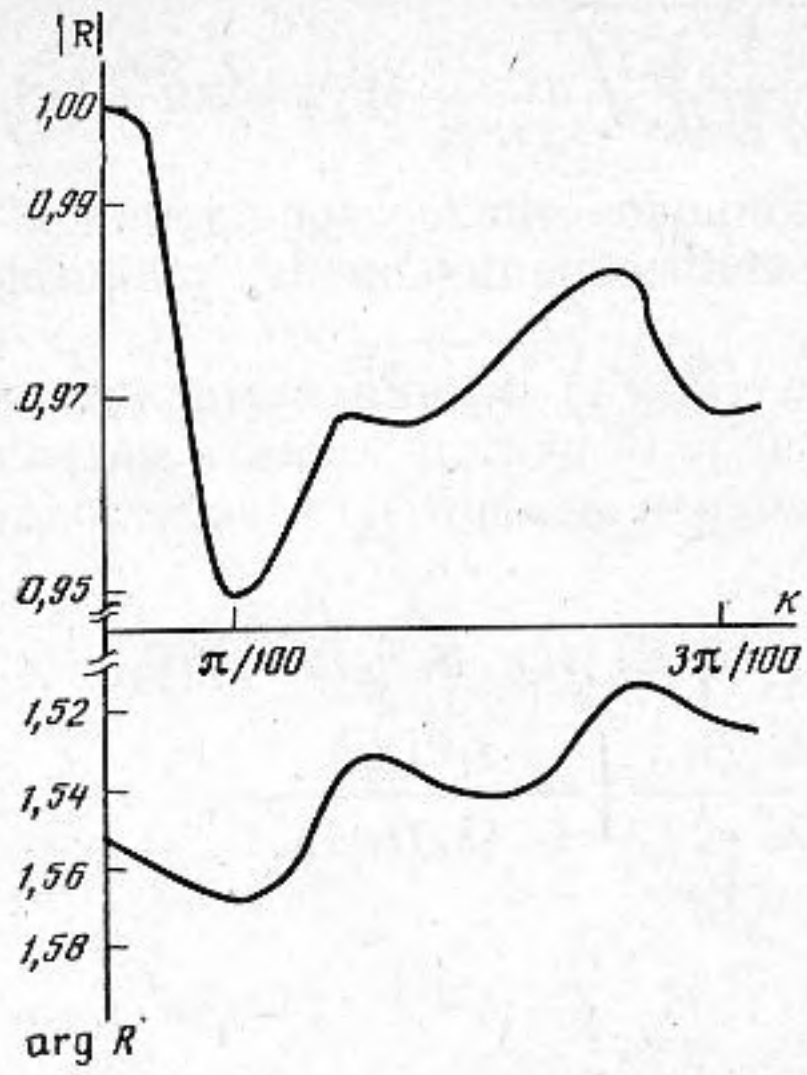
Энергия падающей волны P_0 расходуется на образование цилиндрической волны с угловой диаграммой $\Psi(\varphi)$ в дальней зоне, на возбуждение нормальных волн левого волновода с коэффициентами возбуждения T_m и частично отражается назад с коэффициентом отражения R. Величины R, T_m, $\Psi(\varphi)$ связаны законом сохранения энергии

$$1-|R|^2=\sum_{s=1}^{m}|T_s|^2\frac{w_s}{w_0}+\frac{1}{2\rho\omega\pi^2w_0}\int_0^{\pi}|\Psi|^2d\varphi;\quad k\in[k_m,k_{m+1}),$$

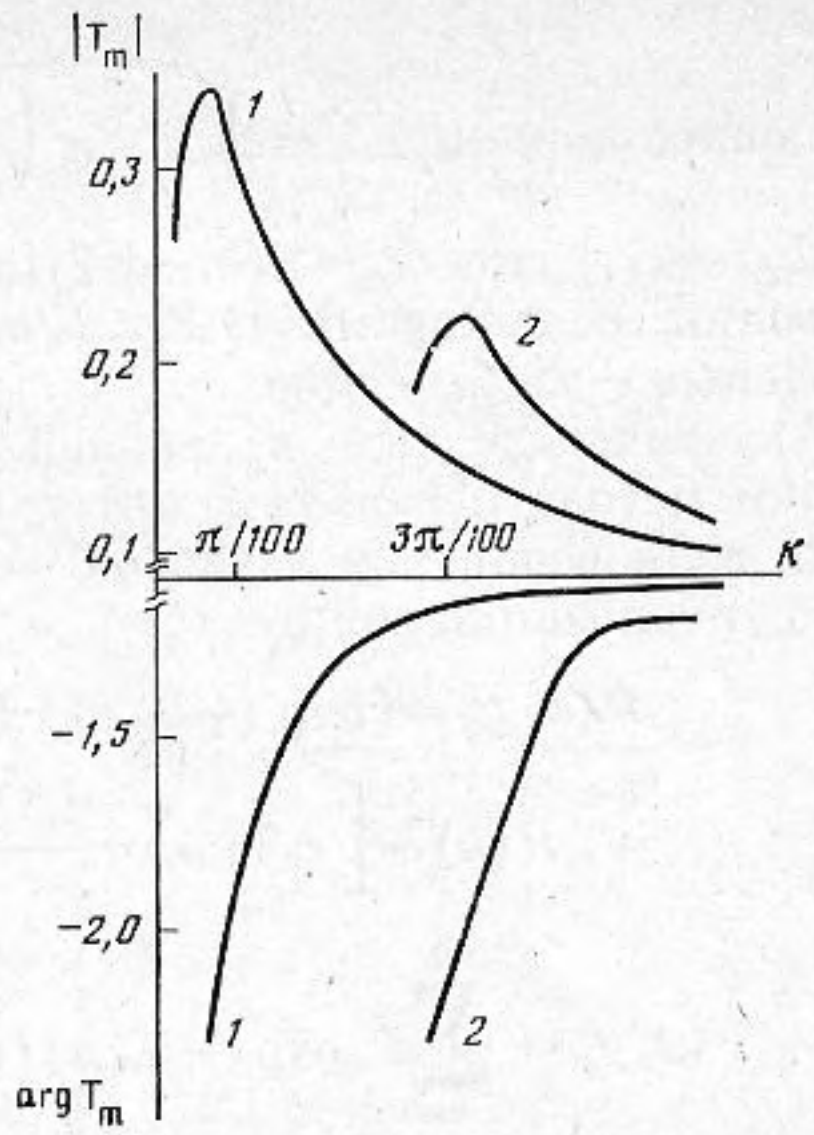
$$w_0=D\frac{\lambda_0^3\gamma_0^2}{\rho^2\omega^3}[1+\exp(-2a\gamma_0)]^2+\frac{\lambda_0}{2\gamma_0\rho\omega}[1+\exp(-2a\gamma_0)(1-2a\gamma_0)],\tag{14}$$

$$w_s=a\lambda_{2s}/\rho\omega.$$

Здесь w_0 — поток энергии, приносимый падающей волной $P^0(\lambda_0)$, w_s — поток энергии, уносимый нормальной модой $P(\lambda_{2s})$. Численные исследования проводились при относительной ширине волноводов $2a/h=100$, где h — толщина стенок, правый волновод стальной, система погружена в воду и кромки волноводов спаяны. Волновое число k полагалось комплексным, причем $\operatorname{Im}k=0{,}05\operatorname{Re}k$. На низких частотах ($k<k_1$) зависимость $R(k)$ подобна функции $R(k)$ в задаче об излучении из открытого конца волновода [7]. Величина $|R(k)|$ равна практически единице. Зависимость $\arg R(k)$ не монотонна (таблица). Локальные минимумы $\arg R(k)$ вызваны возмущающим влиянием волноводных мод правого волновода [3]. Сопоставив графики $\arg R(k)$ и λ_{1m} в [3], можно заключить, что первый минимум $\arg R(k)$ связан с локальным максимумом $\operatorname{Re}\lambda_{11}(k)$, второй



Фиг. 2. Зависимость коэффициента отражения от волнового числа при $k>k_1$

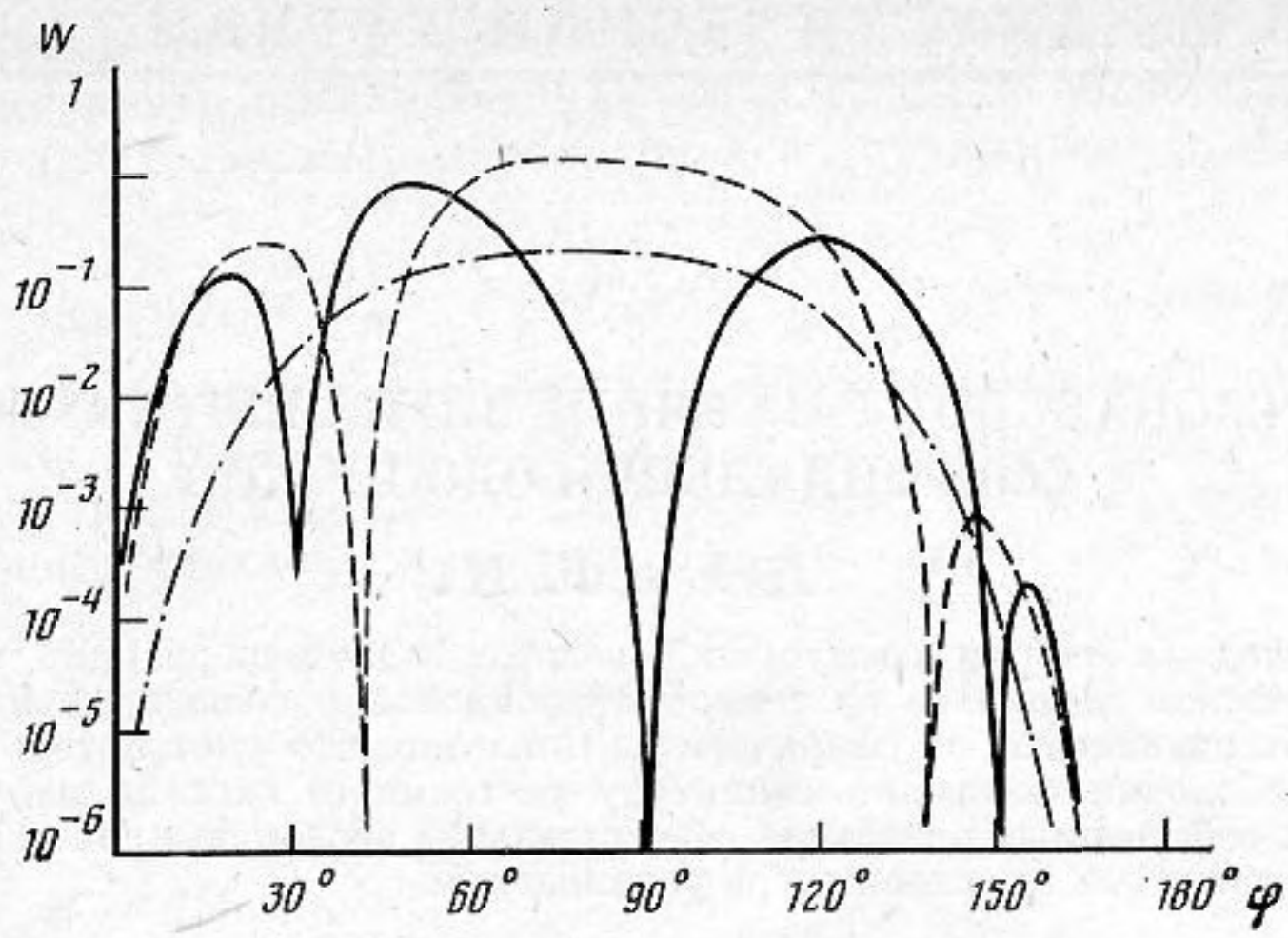


Фиг. 3. Зависимость коэффициентов возбуждения нормальных мод от волнового числа

минимум связан с $\mathrm{Re}\,\lambda_{12}(k)$ и т. д., где λ_{1m} — волноводные корни правого волновода $l_1(\lambda_{1m})=0$. В окрестности частота зарождения k_1 первой волноводной моды $|R(k)|$ имеет глубокий минимум (фиг. 2), вызванный открытием нового канала распространения энергии,— по левому волноводу. При $k=k_1$ коэффициент возбуждения T_1 первой волноводной моды левого волновода имеет максимум (фиг. 3), волна становится распространяющейся, энергоносной, что и вызывает локальный минимум $|R(k)|$. Аналогичные минимумы $|R(k)|$ в максимумы $\arg R(k)$ имеют место в окрестности волновых чисел k_m, причем их амплитуда с номером убывает. Между волновыми числами зарождения k_m зависимость $|R(k)|$ имеет минимумы малой амплитуды (фиг. 2), происхождение которых связано с цилиндрической волной. Полная энергия, излучаемая в среду, дается интегралом в (4) и немонотонно растет с частотой, имея минимум при $k=k_m$. На частотах зарождения $t(y,\ a,\ \gamma_m)=0$ при $k=k_m$. Это означает, что исчезает вклад m-моды как в поле внутри волноводов, так и в смещение пластин правого волновода $\xi=\dfrac{1}{\rho\omega^2}P_y(a,x)$. Между минимумами в k_m находятся максимумы излученной энергии, которая отбирается у отраженной волны, что и ведет к локальному уменьшению $|R(k)|$. С приближением k к единице наблюдается общее уменьшение $|R(k)|$, что обусловлено перераспределением энергии поверхностной волны P_0 между пластинами и жидкостью: все большая часть энергии переносится по жидкости. Это ведет к тому, что доля энергии, излученной в жидкость, возрастает [8].

На фиг. 3 приведена частотная зависимость коэффициентов возбуждения T_m нормальных волн левого волновода. Величина T_m содержит множитель $1/\lambda_{2m}$ (13). В силу того что $|\lambda_{2m}(k)|$ принимает минимальное значение при $k=k_m$, равное $|\lambda_{2m}|_{\min}=k_m\sqrt{2\eta}$, $\eta=\mathrm{Im}\,k/\mathrm{Re}\,k$, величина $|T_m(k)|$

k	arg R	k	arg R	k	arg R	k	arg R
$1{,}0\cdot10^{-4}$	2,377	$2{,}512\cdot10^{-3}$	1,786	$5{,}012\cdot10^{-4}$	1,975	$1{,}259\cdot10^{-2}$	1,681
$1{,}259\cdot10^{-4}$	2,325	$3{,}162\cdot10^{-3}$	1,814	$6{,}310\cdot10^{-4}$	1,897	$1{,}585\cdot10^{-2}$	1,697
$1{,}585\cdot10^{-4}$	2,271	$3{,}981\cdot10^{-3}$	1,825	$7{,}943\cdot10^{-4}$	1,843	$1{,}995\cdot10^{-2}$	1,673
$1{,}995\cdot10^{-4}$	2,222	$5{,}012\cdot10^{-3}$	1,827	$1{,}0\cdot10^{-3}$	1,771	$2{,}512\cdot10^{-2}$	1,637
$2{,}512\cdot10^{-4}$	2,163	$6{,}310\cdot10^{-3}$	1,785	$1{,}259\cdot10^{-3}$	1,735	$3{,}162\cdot10^{-2}$	1,631
$3{,}162\cdot10^{-4}$	2,085	$7{,}943\cdot10^{-3}$	1,715	$1{,}585\cdot10^{-3}$	1,722	$3{,}981\cdot10^{-2}$	1,642
$8{,}981\cdot10^{-4}$	2,021	$1{,}0\cdot10^{-2}$	1,667	$1{,}995\cdot10^{-3}$	1,745	$5{,}012\cdot10^{-2}$	1,626



Фиг. 4. Диаграмма направленности

имеет на частоте зарождения максимум, в то время как зависимость $\arg T_m(k)$ не носит резонансного характера. Интерес представляет угловая плотность энергии $w(\varphi)$, уносимой цилиндрической волной

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\rho\omega\pi^2} |\Psi|^2.$$

На фиг. 4 представлена диаграмма направленности $w(\varphi)$ при $k=0{,}03$ (штрихпунктирная линия), $k=\pi/50$ (штриховая линия) и $k=3\pi/100$ (непрерывная линия). Длинноволновая асимптотика $w(\varphi)$ при $k\to 0$ имеет вид $w(\varphi)=\mathrm{const}\,[\sin^2\varphi+o(k)]$. Отметим, что форма кривой $w(\varphi)$ практически не зависит от поставленного гранично-контактного условия. При приближении волнового числа к k_m на диаграмме возникают два обособленных лепестка, середины которых находятся на углах $\varphi_N=\arcsin(1-1/(2N+1))$ и $\pi-\varphi_N$. При дальнейшем увеличении k на угле $\pi/2$ появляется новый лепесток, который достигает максимальных размеров при $k_m=\pi(m+1)/a$, а затем разделяется на два новых. Следует отметить, что если на низких частотах диаграмма симметрична относительно $\varphi=\pi/2$, то с ростом k излучение становится сильнее в сторону малых углов. Кроме того, система волноводов, кромки которых спаяны, излучает существенно сильнее системы с трещиной между кромками. Автор благодарен Д. П. Коузову и В. Д. Лукьянову за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курушин Е. П., Нефедов Е. И.* Дифракция на открытом конце плоского волновода со слегка прозрачными стенками // Докл. АН СССР, 1974, Т. 217, С. 1049–1052.
2. *Вайнштейн Л. А.* Теория дифракции и метод факторизации.– М.: Сов. радио, 1966.
3. *Левицкий Л. А.* Дифракция плоской гидроакустической волны на открытом конце плоского полубесконечного волновода с тонкими упругими стенками // Прикл. матем. и механ., 1980, Т. 44, ВЫП. 2, С. 301–309.
4. *Коузов Д. П.* Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин // Прикл. матем. и механ., 1969, Т. 33, ВЫП. 2.
5. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов.– М.: Мир, 1974. 323 с.
6. *Левицкий Л. А.* О распространении звуковых волн в плоском волноводе с тонкими упругими стенками, помещенном в жидкую среду // Акуст. журн., 1980, Т. 24, № 1, С. 112–121.
7. *Белинский Б. П., Коузов Д. П., Левицкий Л. А., Никитин Г. Л., Попов А. И.* Гранично-контактные задачи для волноводов и периодических структур.– Волны и дифракции. Кр. тез. докл. VIII Всесоюз. симп. по дифракции и распространению волн.– М.: Ротапринт АН СССР, 1981, т. 3, с. 222–227.
8. *Вешев В. А., Коузов Д. П.* О влиянии среды на колебания пластин, сочлененных под прямым углом // Акуст. журн., 1977, Т. 23, № 3, С. 368–377.

Ленинградское Высшее
Военно-инженерное строительное
училище им. А. Н. Комаровского

Поступила в редакцию
6. I.1986