АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 1

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА НА ВЫТЯНУТЫХ ТОНКОСТЕННЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

Приходько В. Ю.

Методом возмущений получено решение задачи дифракции плоской волны на вытянутой упругой оболочке вращения, описываемой моментной теорией типа Лява. Найдено выражение для амплитуды рассеяния. Показано, что в случае малых поперечных волновых размеров основной вклад в амплитуду рассеяния вносят безмоментные колебания оболочки.

Метод возмущений, развитый в теории обтекания тонких тел потоком идеальной невязкой несжимаемой жидкости [1], распространен на дифракционные задачи в работах М. В. Федорюка и других авторов [2–4]. Этим методом решены задачи о рассеянии плоской звуковой волны на телах вращения с жесткой, мягкой и импедансной поверхностями, а также на упругих телах, описываемых уравнениями движения Ляме [4].

В настоящей работе указанный выше метод применен для упругих тел, описываемых уравнениями движения тонкостенных оболочек вращения. В этом случае условия контакта акустической среды и оболочки дают краевое условие для рассеянного звукового поля в виде матричного дифференциального оператора, связывающего звуковое давление и колебательную скорость акустической среды на поверхности оболочки с векторами смещений и напряжений на ее срединной поверхности. Поэтому для решения задачи дифракции, сводящейся к решению уравнения Гельмгольца во внешности тела вращения, необходимо еще найти и соответствующее краевое условие, являющееся, как будет показано ниже, решением матричного обыкновенного дифференциального уравнения. Таким образом, получается своеобразная последовательность «вложенных» краевых задач для двух дифференциальных операторов, причем решение одной краевой задачи является краевым условием для другой. Конкретный вид операторов определяется теорией оболочек и заданным диапазоном частот. Здесь будут использованы двумерные моментные уравнения теории типа Лява [5]. Метод также применим и для линейных теорий типа Тимошенко.

Рассмотрим упругую замкнутую тонкостенную оболочку, помещенную в однородную изотропную акустическую среду с плотностью ρ_f и скоростью звука c_f. Пусть из акустической среды на оболочку падает плоская звуковая волна $p^{(i)}=p^{(0)}\exp(i\mathbf{k}, \mathbf{r})$, $k=|\mathbf{k}|=\omega/c_f$ (зависимость от времени в виде $\exp(-i\omega t)$ везде опускается). В цилиндрических координатах (r, φ, z) срединная поверхность оболочки S задана уравнением $r=dF(z')$, $z'=z/l$, $|z'|\leqslant 1/2$, $F(\pm 1/2)=0$, $F(z)>0$. Рассматривается случай вытянутой оболочки $\varepsilon=d/l\ll 1$ в частотном диапазоне $kd\simeq 1$, $k_z l\gg 1$.

Рассеянное оболочкой звуковое поле $p(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)p=0, \qquad \mathbf{r}\in S_\varepsilon, \tag{1}$$

где S_ε — внешняя к поверхности S область, и условию излучения Зоммерфельда при $R\to\infty$

$$p(\mathbf{r})=\frac{e^{ikR}}{R}f(\theta,\varphi)+O\left(\frac{1}{R^2}\right), \tag{2}$$

где $f(\theta, \varphi)$ — искомая амплитуда рассеяния, (R, θ, φ) — сферические координаты. Краевые условия для рассеянного поля p находятся из условий непрерывности колебательных скоростей акустической среды и по-

верхности оболочки (кинематическое краевое условие)

$$\frac{\partial}{\partial n}(p^{(i)}+p)=\rho_f\omega^2 u_3, \qquad \mathbf{r}\in S, \tag{3}$$

и динамических уравнений движения упругой оболочки, представимых в виде [5]

$$\sum_{\gamma=1}^{3}\left(\frac{h^2}{3}N_{ij}+L_{ij}\right)u_j=\lambda^2 u_i+\hat{f}_i, \qquad i=1,2,3. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещений оболочки, имеющий тангенциальные компоненты смещений u_1, u_2, направленные по касательным к поверхности S в сечениях $\varphi=\text{const}$ и $z=\text{const}$ соответственно, и нормальную составляющую u_3, направленную вдоль внешней нормали к S; $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали; дифференциальные операторы N_{ij} и L_{ij} ввиду их громоздкости не выписываются (их явный вид приведен в [6, с. 40, 5, с. 77]); $\lambda^2=\rho\omega^2/E_1$, $E_1=E/(1-\sigma^2)$, ρ — плотность материала; E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, h — полутолщина стенок оболочки; $\hat{f}_1=\hat{f}_2=0$, $\hat{f}_3=(2E_1h)^{-1}(p^{(i)}+p)|_{r\in S}$. Отметим, что в поставленной задаче имеются два малых параметра: $\varepsilon=d/l$ и $\mu=(h^2/3d^2)^{1/4}$. Эти два малых параметра и позволяют эффективно применить метод возмущений, причем первый параметр ε будет использован для нахождения асимптотик решения уравнения Гельмгольца во внешности вытянутой оболочки вращения, а второй параметр — для нахождения фундаментальной системы решений уравнений (4), определяющей краевое условие для уравнения Гельмгольца.

Решение задачи (1)—(4) будем искать в виде рядов Фурье:

$$\begin{gathered} p(\mathbf{r})=\sum_{-\infty}^{\infty}\exp[i(k_z z+n\varphi)]p_n(r,z), \qquad k_z=k\cos\theta_0, \\ \mathbf{u}(z_s')=\sum_{-\infty}^{\infty}\exp(in\varphi)\mathbf{u}_n(z_s'), \qquad z_s\in S, \qquad z_s'=z_s/l. \end{gathered} \tag{5}$$

Функции p_n будем искать приближенно в виде парциальных потенциалов $\Pi_n(\nu_n)$, определенных и исследованных в работе [3]:

$$p_n\simeq\Pi_n(\nu_n)=d\int_0^{2\pi}\int_{-1/2}^{1/2}\exp(in\varphi+\xi)(1+\varepsilon^2F'^2)^{1/2}R_0^{-1}F(z_s')\nu_n\,dz_s'\,d\varphi, \tag{6}$$

$$\zeta=ikl(R_0+\cos\theta_0(z_s'-z')), \qquad R_0^2=(z_s'-z')^2+(r^2+r_s^2-2rr_s\cos\varphi)l^{-2}.$$

Плотность потенциала ν_n найдем из краевых условий (3), (4), используя полученные в [3] разложения:

$$\begin{gathered} \Pi_n(\nu_n)\doteq a_{n0}dF(z')H_n(b)H_n^{-1}(b)\nu_n(z')+O(\varepsilon), \\ \frac{\partial\Pi_n}{\partial n}(\nu_n)=a_{n0}b\nu_n(z')+O(\varepsilon), \end{gathered} \tag{7}$$

где $a_{n0}=2i\pi^2J_n(b)H_n'(b)$, $b=kdF(z')\sin\theta_0$, J_n — функции Бесселя, H_n — функции Ханкеля первого рода, в виде

$$\nu_n=\nu_{n0}^{(a)}+\nu_{n0}^{(b)}+O(\varepsilon). \tag{8}$$

Здесь

$$\nu_{n0}^{(a)}=-p^{(0)}J_n'(b)(2\pi^2idF(z')J_n(b)H_n'(b))^{-1} \tag{9}$$

— составляющая плотности потенциала, обусловленная акустически жесткой поверхностью вращения S;

$$\nu_{n0}^{(b)}=e^{-ik_zz}\rho_f\omega^2u_3(2\pi^2ibJ_n(b)H_n'(b))^{-1} \tag{10}$$

— упругая составляющая потенциала, возникающая из-за колебаний оболочки в акустической среде. Из (10) видно, что при $u_3 \to 0$, $v_{n0}^{(b)}$ также стремится к нулю, и, как следовало ожидать, стремится к значению плотности потенциала для абсолютно жесткого тела вращения. Формулы (9), (10) верны, так же как и для жесткого тела, в случае достаточно узкой оболочки, когда $kdF(z') < x_0$ (x_0 — первый нуль функции Бесселя) [1] и углы падения не близки к скользящим. Кроме того, полученные разложения непригодны вблизи краев оболочки $|z| \sim l/2$, но, так же как и в случае абсолютно жесткого тела [2], можно показать, что это не влияет на главный член асимптотики амплитуды рассеяния, представимой в виде

$$f(\theta, \varphi) = \frac{il}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \exp\left[in \left(\varphi - \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right] (f_n^{(a)} + f_n^{(b)}), \tag{11}$$

$$f_n^{(a)} = p^{(0)} \int_{-1/2}^{1/2} c_n e^{ikz(\cos\theta_0 - \cos\theta)} J_n'(b_0 \sin\theta_0) J_n(b_0 \sin\theta)\, dz',$$

$$f_n^{(b)} = -\rho_f c_f \omega \int_{-1/2}^{1/2} c_n e^{-ikz\cos\theta} u_{n3}(z') J_n(b_0 \sin\theta) \frac{dz'}{\sin\theta_0},$$

$$c_n = [(J_n(b_0 \sin\theta_0) H_n'(b_0 \sin\theta_0)]^{-1}.$$

Здесь $b_0 = kdF(z')$, $f_n^{(a)}$ и $f_n^{(b)}$ — абсолютно жесткая и упругая «составляющие» амплитуды рассеяния оболочки соответственно.

Полученное разложение амплитуды рассеяния (11) содержит неизвестную изгибную компоненту смещений оболочки u_{n3}. Если она известна (например, из экспериментальных измерений), то формула (11) дает решение поставленной задачи в квадратурах. В противном случае из уравнений (6)—(10) получаем краевую задачу для каждой гармоники номера n относительно неизвестных векторов $\mathbf{u}_n$:

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{h^2}{3} N_{ij}^{(n)} + L_{ij}^{(n)} \right) u_{nj} = \lambda^2 u_{ni} + \delta_i (\beta_n u_{n3} + \tilde{f}_n). \tag{12}$$

Здесь $\beta_n = \rho_f \omega^2 dF(z') H_n(b) [2E_1 hbH_n'(b)]^{-1}$, $\tilde{f}_n = p^{(0)} e^{ik_z z} i [E_1 h\pi bH_n'(b)]^{-1}$; операторы $N_{ij}^{(n)}$ и $L_{ij}^{(n)}$ получаются из операторов $N_{i\gamma}$ и $L_{i\gamma}$ подстановкой в них угловой зависимости в виде $\exp(in\varphi)$; $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\delta_3 = 1$.

Краевым условием для системы (12), дающим единственное голоморфное решение, как следует из аналитической теории дифференциальных уравнений [5, 6], является условие ограниченности решений в куполах $z' = \pm 1/2$, являющихся регулярными особыми точками системы. В общем случае система (12) может быть решена только численно, например методом отгонки краевого условия из особой точки [7] или методом тензорных импедансов [9].

Формула для амплитуды рассеяния (11) и система уравнений (12) являются основными результатами настоящей статьи. Найдены два важных коэффициента, описывающие дифракционное влияние акустической среды на колебания оболочки: инерционный коэффициент β_n и коэффициент распределения нагрузки $\tilde{f}_n$, входящие в систему (12). При $\rho_f \to 0$ следует, что $\beta_n \to 0$ и система (12) переходит в систему уравнений свободных колебаний оболочки в вакууме. Коэффициент нагрузки $\tilde{f}_n$ определяет непрерывно распределенную по поверхности нормальную силу с быстроосциллирующей вдоль оси вращения переменной амплитудой. На низких частотах эта сила описывается следом падающей волны на оси вращения обо-

[1] Использование потенциалов простого и двойного слоя [3] позволяет устранить это ограничение.

лочки. Из формул (12) следует, что при достаточно жестком материале оболочки, когда $E_1 \to \infty$, амплитуда нагрузки стремится к нулю, а формула (11) переходит в формулу для абсолютно жесткого тела.

Таким образом, найденные коэффициенты β_n и $\tilde{f}_n$ сводят решение задачи дифракции к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданной на конечном интервале. Эта система является классической задачей теории тонкостенных оболочек и общий анализ ее решений выходит за рамки настоящей статьи.

Необходимо отметить, что вопрос о вынужденных колебаниях замкнутых оболочек вращения, удовлетворяющих системе (12), где возбуждающая сила описывается функцией $\tilde{f}_n$, практически не исследован в основном из-за трудностей, связанных с наличием двух куполов. Так как в настоящей работе влияние куполов на амплитуду рассеяния не учитывается, то на основании асимптотических решений теории оболочек, развитых в [5], можно сделать некоторые качественные и количественные оценки решений системы (12) при $kd \ll 1$.

Рассмотрим случай $n=0$. Разлагая функции Бесселя и Ханкеля в ряды по степеням малого параметра, получаем

$$\beta_0 = \rho_f \omega^2 \frac{dF}{2E_1 h}\left(\ln\left(\gamma \frac{b(z')}{2}\right) - \frac{\pi}{2} i\right) + O(kd), \tag{13}$$

$$\tilde{f}_0 = \frac{p^{(0)} e^{ik_z z}}{2E_1 h}\left(1 - i\frac{\pi}{4} b^2(z')\right) + O(kd), \tag{14}$$

где γ — постоянная Эйлера. Если в формулах (13), (14) ограничиться главными членами, то система (12) распадается на две системы 4 и 2 уравнений первого порядка. Система 4 уравнений имеет четыре квазипоперечных быстроосциллирующих интеграла (называемых обычно моментными интегралами), представимых на отрезке $|z| \leqslant \frac{l}{2} - \tilde{l}$, $l \gg \tilde{l}$ в виде

$$u_{3j} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_{3j}^{(k)} \exp(\alpha_j) \begin{Bmatrix} \cos \alpha_\gamma \\ \sin \alpha_\gamma \end{Bmatrix},$$

$$\alpha_j = \frac{(-1)^\gamma}{\sqrt{2}\,\mu} \int_{s_j}^{s} \sqrt{q}\, ds, \quad s_j = s(z_j), \quad z_j = (-1)^j \left(\frac{l}{2} - \tilde{l}\right), \tag{15}$$

где $q = d^2(\beta_0 + R_2^{-2} - \lambda^2)$, $\gamma = 1, 2$, s — длина дуги, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности S. Так как в рассматриваемом диапазоне частот выполняется соотношение $q > 0$, $c_l c_j \gg c_u$ (c_u и c_l — скорости изгибных и продольных волн в тонкой пластине), то, выбрав ограниченную в одном полюсе и затухающую по направлению к другому полюсу оболочки фундаментальную систему решений, можно показать, что вклад решений типа (15) в диаграмму направленности (11) будет величиной $O(\mu)$. Так же, как и в случае оболочки в вакууме, квазипоперечные интегралы (15) являются интегралами краевого эффекта, но еще более сильно затухающими при удалении от краев из-за наличия акустической среды, влияние которой характеризуется коэффициентом β_0, входящим в функцию $q(z)$. Система оставшихся двух уравнений может быть записана в виде канонической системы двух уравнений первого порядка относительно продольных и изгибных смещений (индекс нуль далее опускается)

$$\mathbf{u}' = a\mathbf{u} + \mathbf{f}, \tag{16}$$

где $\mathbf{u}=(u_1, u_3)$, $\mathbf{f}=(f_1, f_2)$, a — (2×2)-матрица с элементами

$$a_{11}=-\frac{r'}{r}\left(\frac{1+\sigma R}{(\sigma+R)}\right), \quad a_{12}=\frac{(1+2\sigma R+R^2-\lambda_1^2)}{r(\sigma+R)},$$

$$a_{21}=\{B(1-\sigma)(1-R)+[B_1(1+\sigma R)-R_2'-\sigma R^2R_1']r'/r-[\lambda_1^2+(1-\sigma)R]\times$$
$$\times(\sigma+R)/r\}/(1-\sigma^2-\lambda_1^2);$$

$$a_{22}=\frac{1}{r}[2(1-R)(1-\sigma^2)r'/(\lambda_1^2-1+\sigma^2)-B_1];$$

$$\lambda_1=\lambda rA,\ A=(1+r'^2)^{1/2},$$

$$R=R_2/R_1=-rr''/A^2, \quad B=r''-r'^2r''/A^2-r'^2/r,$$

$$B_1=[(1-\sigma)(R-1)r'+R^2R_1'+\sigma R_2']/(\sigma+R),$$

$$f_1=-(\beta_0u_3+\tilde{f}_0)AF/(\sigma+R), \quad f_2=[-r'(1-R)f_1+$$
$$+(R+\sigma)rAf_1']/(\sigma^2-1+\lambda_1^2/(1-\sigma^2)).$$

Коэффициенты β_0 и $\tilde{f}_0$ указаны в (13), (14). Аналогично получается безмоментная система и для $n\neq0$, при этом порядок системы равен четырем.

Решения системы (16) называются безмоментными и имеют при $\mu\to0$ порядок $O(1)$. Таким образом, можно сделать вывод, что основной вклад в амплитуду рассеяния (11) дают безмоментные решения уравнений движения тонкостенных оболочек.

В заключение отметим, что полученное Л. М. Лямшевым решение задачи дифракции звука тонким ограниченным стержнем [8] также выразилось через интегралы системы типа (16), которая в случае $r=\text{const}$ описывает безмоментные колебания упругой цилиндрической оболочки в акустической среде, а при $R_2\to\infty$ переходит в уравнение для пластинки.

Автор благодарит В. В. Тютекина и М. В. Федорюка за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ligthill M. J.* A new approach to thin aerofoil theory // — Aero. Quart, 1951, № 3, P. 193–210.
2. *Федорюк М. В.* Рассеяние акустических волн тонким акустически жестким телом вращения // Акуст. журн., 1981, Т. 27, № 4, С. 605–609.
3. *Федорюк М. В.* Дифракция плоской волны на вытянутом теле вращения // Докл. АН СССР, 1983, Т. 272, № 3, С. 587–590.
4. *Бойко А. И.* Дифракция плоской волны на тонком полом упругом стержне // Тез. докл. X. Всесоюз. Акуст. конф.— М.: АКИН, 1983, АIУу70, с. 121–124.
5. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек.— М.: Наука, 1979.
6. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек.— М.: Наука, 1974.
7. *Абрамов А. А.* О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // ЖВМ и МФ, 1961, Т. 1, № 3, С. 542–545.
8. *Лямшев Л. М.* Рассеяние звука тонким ограниченным стержнем // Акуст. журн., 1958, Т. 4, № 1, С. 51–58.
9. *Тютекин В. В.* Импедансный метод расчета характеристик упругих неоднородных радиально-слоистых цилиндрических тел // Акуст. журн., 1983, Т. 29, № 4, С. 529–536.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20.I.1986