АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 2

УДК 534.26

# ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ И СРЕДЫ С ЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

*Ашин Н. Ю.*

Рассматривается отражение и преломление акустических импульсов на плоской границе раздела однородной среды и среды, в которой скорость звука линейно зависит от координаты. Источник может быть расположен как в той, так и в другой среде. В одномерной задаче для отраженного и прошедшего полей найдено точное решение. Исследованы асимптотики полей вблизи и вдали от фронта волны.

Задачи об отражении и преломлении звуковых волн на границе раздела однородной и неоднородной сред представляют большой интерес в акустике, сейсмике, разведке полезных ископаемых и т. п. Они подробно исследовались при различном характере зависимости показателя преломления от координаты, но только для гармонического сигнала [1]. Между тем импульсный случай имеет не меньшее практическое значение, поскольку решение для него, являясь функцией Грина, сильно упрощает отыскание отраженного и прошедшего полей, создаваемых источником с произвольным характером изменения во времени. Действительно, свертка функции Грина и функции распределения во времени источника представляет собой интеграл от произведения действительных функций на конечном интервале и вычисляется значительно легче, чем интеграл от произведения комплексных функций при бесконечных пределах, что имеет место, когда спектр источника сворачивают с выражением для поля гармонического сигнала.

В безграничной среде с постоянным градиентом скорости звука известны функции Грина для плоского, линейного и точечного источников [2]. Однако, насколько известно, вопрос об отражении и преломлении акустического импульса на границе раздела однородной среды и среды, имеющей линейный профиль скорости по $z$, пока еще не рассматривался. Пусть

$$c(z)=c_0+\alpha z, \qquad \alpha>0. \tag{1}$$

В отличие от гармонического случая решение импульсной задачи позволяет судить о свойствах исследуемой неоднородной среды вблизи границы раздела, даже если профиль скорости не линейный, а представляет собой некоторую функцию $c(z)$. Это возможно, поскольку импульс в фиксированный момент времени локализован в узкой области пространства. Следовательно, отраженное поле в небольшом интервале времени сразу после начала отражения определяется свойствами только того участка среды, который пройден импульсом за это время. Таким образом, в малом слое неоднородной среды вблизи границы $c(z)$ можно разложить в ряд по степеням $z$.

Если оставить первые два члена разложения

$$c(z)=c|_{z=0}+\left.\frac{dc}{dz}\right|_{z=0} z,$$

причем выполняется условие

$$\left(\frac{dc}{dz}\right)^2\Big|_{z=0} \gg \left|\left(c\frac{d^2c}{dz^2}\right)\Big|_{z=0}\right| ,$$

то для определения скорости звука справедлива формула (1), в которой

$$c_0 = c\,|_{z=0}, \qquad \alpha = \frac{dc}{dz}\Big|_{z=0} > 0.$$

В случае отсутствия внешнего поля для нахождения звукового давления будем исходить из уравнения

$$\operatorname{div}\frac{\operatorname{grad} p}{\rho} - \frac{1}{c^2\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

где $p$, $c$, $\rho$ — соответственно давление, скорость звука и равновесная плотность среды (см. [3]).

Система координат выбрана таким образом, что граница раздела находится в плоскости $z=0$. При $z>0$ скорость звука линейно растет по $z$ по формуле (1), а плотность $\rho_1(z)$ представляет собой некоторую функцию от $z$, причем $\rho_1(z=0)=\rho_0$. Найдем вид этой функции. В идеальном газе равновесные давление и плотность связаны следующим образом: $\bar{p}=\gamma^{-1}c^2\rho$, где $\gamma=c_p/c_v=\text{const}$ — показатель адиабаты. В отсутствие внешних полей $\bar{p}=\text{const}$. Тогда для равновесной плотности в верхней среде справедливо

$$\rho_1(z) = \frac{\rho_0}{(1+\alpha c^{-1}z)^2}. \tag{3}$$

Зная (1) и (3), уравнение (2) при помощи замены [1]

$$\psi_1 = \frac{p_1}{\rho_1^{1/2}} = \frac{p_1}{\rho_0^{1/2}}\left(1+\frac{\alpha}{c_0}z\right) \tag{4}$$

сводится к волновому:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} - (c_0+\alpha z)^2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} = 0, \qquad z>0.$$

Плотность нижней среды $\rho_2$ и скорость звука в ней $c_2$ — постоянные величины. Производя в (2) замену, аналогичную (4),

$$\psi_2 = p_2/\rho_2^{1/2}, \tag{5}$$

для звукового поля получаем выражение

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} - c_2^2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2} = 0, \qquad z<0.$$

Пусть источник расположен в однородной среде на расстоянии $z=-l$ от границы. Тогда в соответствии с характером рассматриваемого импульсного источника для нахождения звуковых полей следует исходить из уравнений

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} - (c_0+\alpha z)^2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} = 0, \qquad z>0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} - c_2^2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2} = A\delta(z+l)\,\delta(t), \qquad z<0, \tag{7}$$

где $\psi_1$ и $\psi_2$ связаны условиями непрерывности давления и нормальной компоненты скорости

$$\psi_1\,|_{z=0} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^{1/2}\psi_2\,|_{z=0}, \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\alpha}{c_0}\psi_1\right]\Big|_{z=0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_2}\right)^{1/2}\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\Big|_{z=0}. \tag{9}$$

Преобразуя уравнение (7) по Фурье и затем производя интегрирование по $k$, для поля падающей волны получаем выражение

$$\psi = \frac{Ai}{4\pi c_2} \int \frac{d\omega}{\omega} \exp\left\{ -i\omega\left( t - \frac{z+l}{c_2} \right) \right\}.$$

Отраженное и прошедшее поля ищем в виде

$$\psi^r = \frac{Ai}{4\pi c_2} \int V(\omega) \frac{1}{\omega} \exp\left\{ -i\omega\left( t + \frac{z-l}{c_2} \right) \right\} d\omega,$$

$$\psi^{tr} = \frac{Ai}{4\pi c_2} \int \hat{\psi}(\omega, z) \frac{1}{\omega} \exp\left\{ -i\omega\left( t - \frac{l}{c_2} \right) \right\} d\omega.$$

Для нахождения $\hat{\psi}$ исходим из линейного однородного уравнения с переменными коэффициентами

$$\omega^2 \hat{\psi} + (c_0 + \alpha z)^2 \hat{\psi}_{zz}'' = 0. \tag{10}$$

Его решением является выражение

$$\hat{\psi} = W(\omega) \exp\left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{\alpha^2}} \right) \ln\left( 1 + z\frac{\alpha}{c_0} \right) \right\} +$$

$$+ G(\omega) \exp\left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{\alpha^2}} \right) \ln\left( 1 + z\frac{\alpha}{c_0} \right) \right\}, \tag{11}$$

причем

$$\lim_{\omega\to\infty} \sqrt{1 - 4\omega^2/\alpha^2} = 2i\omega/\alpha, \quad \lim_{\omega\to 0} \sqrt{1 - 4\omega^2/\alpha^2} = -1. \tag{12}$$

В силу принципа причинности при интегрировании по $\omega$ особенности обходятся сверху ($\operatorname{Im}\omega > 0$), т. е. при $t < 0$ контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости полуокружностью бесконечного радиуса, и выражение (11) при $\omega \to \infty$ должно быть экспоненциально мало. Отсюда, учитывая (12), получаем, что $G(\omega) = 0$.

Коэффициенты отражения $V(\omega)$ и прохождения $W(\omega)$ находим, подставляя выражения для полей в граничные условия:

$$V(\omega) = -1 + \frac{4i\omega n}{\alpha}\left( -1 + \sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{\alpha^2}} + \frac{2i\omega n}{\alpha} \right)^{-1}, \quad n = \frac{\rho_0 c_0}{\rho_2 c_2}, \tag{13}$$

$$W(\omega) = [1 + V(\omega)] \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_0}}.$$

Найдем поле падающей волны. При $t < (z+l)/c_2$ контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости и внутри него особенностей нет, следовательно, $\psi = 0$. При $t > (z+l)/c_2$ контур замыкаем в нижней полуплоскости и внутри него находится полюс в точке $\omega = 0$. Выполняя интегрирование, получаем

$$\psi = \frac{A}{2c_2} \theta\left( t - \frac{z+l}{c_2} \right),$$

где $\theta$ — единичная функция Хевисайда. Поле падающей волны представляет собой распространяющийся в пространстве скачок давления. Отраженное поле удобно представить в виде суммы двух волн

$$\psi^r = \psi_0^r + \psi_1^r. \tag{14}$$

Первая есть волна, которая возникла бы при отражении от абсолютно мягкой границы. Вторая возникает вследствие неидеальности отражения. В выражениях для полей произведем замену переменной интегрирования: $y =$

$=2\omega/\alpha$. Тогда

$$\psi_0{}^r = -\frac{A}{2c_2}\theta\left(t+\frac{z-l}{c_2}\right),$$

$$\psi_1{}^r = B_2\int\frac{\exp(-iyT_2)}{-1+\sqrt{1-y^2}+iny}dy, \tag{15}$$

$$\psi^{tr} = B_1\int\frac{\exp(-iyT_1+R_1\sqrt{1-y^2})}{-1+\sqrt{1-y^2}+iny}dy, \tag{16}$$

где

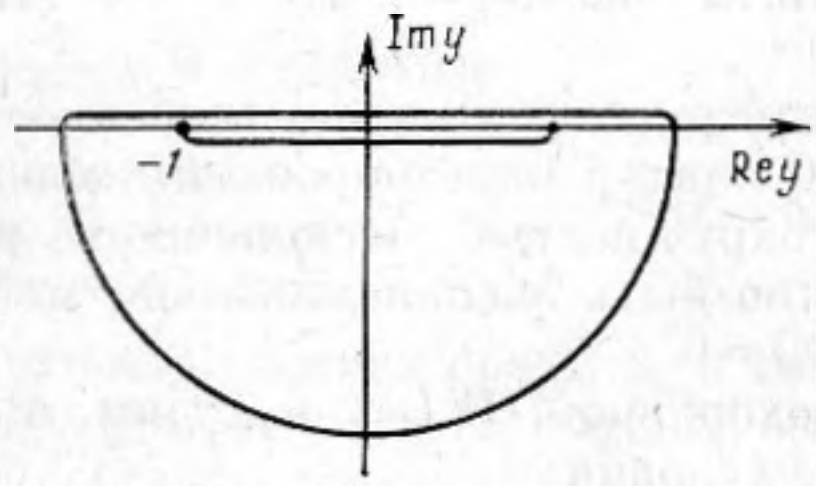
$$B_1 = -\frac{An}{2\pi c_2}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_0}}\sqrt{1+\frac{\alpha}{c_0}z}, \quad B_2=-An/2\pi c_2, \quad T_1=\frac{\alpha}{2}\left(t-\frac{l}{c_2}\right),$$

$$T_2=\frac{\alpha}{2}\left(t+\frac{z-l}{c_2}\right), \quad R_1=\frac{1}{2}\ln\left(t+\frac{\alpha}{c_0}z\right).$$

Таким образом, для решения задачи необходимо вычислить интеграл

$$\psi' = B\int\frac{\exp(-iyT+R\sqrt{1-y^2})}{-1+\sqrt{1-y^2}+iny}dy. \tag{17}$$

Особыми точками подынтегрального выражения являются точки ветвления $y_{1,2}=\pm1$, которые соединяем разрезом, идущим ниже действительной оси. Корни знаменателя подынтегрального выражения лежат на другом листе римановой поверхности (см. фиг. 1). При $T<R$ $\psi'=0$. При $T>R$ необходимо вычислить интеграл по берегам разреза:




Фиг. 1

$$\psi' = B\oint_{L_y}\frac{\exp(-iyT+R\sqrt{1-y^2})}{-1+\sqrt{1-y^2}+iny}dy.$$

Исследуем полученное выражение методом, использовавшимся в [4]. Произведем замену переменной:

$$y=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad z=y+i\sqrt{1-y^2}.$$

Функция $z$ отображает плоскость с разрезом комплексного переменного $y$ внутрь единичного круга $|z|=1$ плоскости комплексного переменного $z$. Окружностям $|z|=R$, где $0<R<1$, в плоскости $z$ соответствуют эллипсы в плоскости $y$, фокусы которых находятся в точках $y_{1,2}=\pm1$, причем отрицательному направлению обхода по эллипсу соответствует положительное направление обхода по окружности:

$$\psi' = iB\oint_L\frac{\exp\{-iz(T+R)/2+i(T-R)/2z\}}{z^2(n-1)+2iz+(n+1)}\frac{1-z^2}{z}dz.$$

Контур интегрирования $L$ представляет собой окружность с центром в точке $z=0$ и радиусом $R<1$. Внутри контура находится единственная особая точка $z=0$ — существенно особая точка.

Произведем еще одну замену:

$$\omega = -i\sqrt{\frac{T+R}{T-R}}z.$$

Представим знаменатель подынтегрального выражения в виде суммы простых дробей. Тогда $\psi'$ удобно записать в виде

$$\psi'=\psi_1'+\psi_2'+\psi_3', \tag{18}$$

где

$$\psi_1' = \frac{iB}{n+1}\oint\frac{d\omega}{\omega}\exp\left\{\frac{d}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)\right\},$$

$$\psi_2' = -\frac{iB}{n}\oint\frac{d\omega}{\omega-1/b}\exp\left\{\frac{d}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)\right\},$$

$$\psi_3' = -\frac{iB}{n}\frac{n^2+1}{n^2-1}\oint\frac{d\omega}{\omega+1/a}\exp\left\{\frac{d}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)\right\},$$

$$d=\sqrt{T^2-R^2},\qquad b=\sqrt{\frac{T-R}{T+R}},\qquad a=\frac{n-1}{n+1}b.$$

Внутри контура интегрирования нет иных особых точек, кроме существенно особой $\omega=0$. В ее окрестности знаменатели подынтегральных выражений раскладываем в ряды

$$\frac{1}{\omega-1/b}=-\sum_{k=1}^{\infty}b^k\omega^{k-1},\qquad \frac{1}{\omega+1/a}=-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a^k\omega^{k-1}.$$

Учитывая равномерную сходимость рядов на контуре интегрирования, меняем порядок интегрирования и суммирования. Получаем:

$$\psi_2' = \frac{iB}{n}\sum_{k=1}^{\infty}b^k\oint\omega^{k-1}\exp\left\{\frac{d}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)\right\}d\omega,$$

$$\psi_3' = \frac{iB}{n}\frac{n^2+1}{n^2-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a^k\oint\omega^{k-1}\exp\left\{\frac{d}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)\right\}d\omega.$$

По определению функции Бесселя [5, с. 29]

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint t^{-n-1}\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}dt,$$

тогда

$$\psi_1' = -\frac{2\pi}{n+1}BJ_0(d), \tag{19}$$

$$\psi_2' = -\frac{2\pi}{n}B\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b^k J_k(d), \tag{20}$$

$$\psi_3' = -\frac{2\pi}{n}\frac{n^2+1}{n^2-1}B\sum_{k=1}^{\infty}a^k J_k(d). \tag{21}$$

Выражение (20) можно представить в виде суммы функций Ломмеля от двух переменных [5, с. 594]:

$$\psi_2' = \frac{2\pi}{n}B[U_2(ibd,d)-iU_1(ibd,d)]. \tag{22}$$

Выражение для $\psi_3'$ исследуется аналогично $\psi_2'$, поэтому в дальнейшем его опускаем. Здесь

$$U_n(\omega,z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\omega/z)^{n+2m}J_{n+2m}(z).$$

Исследуем полученное точное решение задачи в различных случаях. Рассмотрим поведение поля вблизи фронта волны. Пусть $T-R\ll 1$. Тогда удобно воспользоваться (19)–(21). Ряды быстро сходятся и можно рас-

сматривать только первые члены разложения:

$$\psi'=-2\pi B\left[\frac{1}{n+1}J_0(d)-\frac{2b}{(n+1)^2}J_1(d)\right]+O(b^2J_2(d)). \qquad (23)$$

Если $d\ll 1$, то функции Бесселя можно разложить в ряды по $d$ вблизи точки $d=0$. Тогда

$$\psi'=-\frac{2\pi B}{n+1}\left(1-\frac{T-R}{n+1}\right). \qquad (24)$$

Из (24) видно, что поле вблизи фронта волны изменяется по линейному закону. Таким образом, зная значение $n=c_0\rho_0/c_2\rho_2$, по наклону этой прямой можно определить $\alpha$ — параметр, характеризующий неоднородность среды.

Сравним полученные выражения для полей с приближением геометрической оптики. Решение уравнения (10) ищем в виде: $\hat{\psi}=\Phi(z,\omega)\cdot\exp\{i\varphi(z,\omega)\}$. В ВКБ-приближении имеем

$$\Phi(z,\omega)=\frac{Ai}{2c_2\omega}\exp\left(i\omega\frac{l}{c_2}\right)W(\omega)\sqrt{1+\frac{\alpha z}{c_0}}; \qquad \varphi(z,\omega)=\frac{\omega}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\alpha z}{c_0}\right),$$

где $W(\omega)$ — некоторая функция $\omega$. Таким образом, для прошедшей волны получаем

$$\psi^{tr}=\frac{Ai}{4\pi c_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{W(\omega)}{\omega}\left[\exp\left\{-i\omega\left(t-\frac{l}{c_2}\right)\right\}+\left(\frac{1}{2}+\frac{i\omega}{\alpha}\right)\ln\left(1+\frac{\alpha z}{c_0}\right)\right]d\omega.$$

Подставляя выражения для полей в граничные условия (8), (9), находим коэффициенты отражения и прохождения:

$$V(\omega)=\frac{2n}{n+1}\omega\left[\omega+\frac{i\alpha}{2(n+1)}\right]^{-1}-1; \qquad W(\omega)=\sqrt{\rho_2/\rho_0}\,[1+V(\omega)].$$

Представим отраженное поле в виде суммы двух волн (14). Оставляем прежними все обозначения. Вычисляя интегралы, получаем

$$\psi_1^r=-\frac{2\pi B_2}{n+1}\exp\left(-\frac{T_2}{n+1}\right)\theta(T_2); \qquad \psi^{tr}=-\frac{2\pi B_1}{n+1}\exp\left(-\frac{T_1-R_1}{n+1}\right)\theta(T_1-R_1).$$

Если выполняются условия

$$\frac{T_2}{n+1}=\frac{\alpha}{2(n+1)}\left(t+\frac{z-l}{c_2}\right)\ll 1;$$

$$\frac{T_1-R_1}{n+1}=\frac{\alpha}{2(n+1)}\left[t-\frac{l}{c_2}-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\alpha z}{c_0}\right)\right]\ll 1,$$

то экспоненты можно разложить в ряды и ограничиться первыми двумя членами. Полученные выражения совпадают с (24). Таким образом, геометрооптическое приближение работает только вблизи фронтов отраженной и прошедшей волн.

Рассмотрим характер изменения поля вдали от фронта волны. Пусть $T-R\gg 1$. Тогда можно воспользоваться интегральным представлением суммы функций Ломмеля:

$$U_\nu(\omega,z)\pm iU_{\nu+1}(\omega,z)=\frac{w^\nu}{z^{\nu-1}}\int\limits_0^1 J_{\nu-1}(zt)\exp\left\{\pm\frac{1}{2}i\omega(1-t^2)\right\}t^\nu\,dt,$$

$$\psi_2'=\frac{2\pi}{n}Bbd\int\limits_0^1 J_0(dt)\exp\left\{-\frac{1}{2}bd(1-t^2)\right\}t\,dt.$$

Выражение для $\psi_2'$ можно представить в виде

$$\psi_2' = \frac{2\pi}{n} Bbd \left[ \int_0^{d^{-1/2}} J_0(dt) \exp\left\{-\frac{1}{2} bd(1-t^2)\right\} t\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{d^{-1/2}}^{1} J_0(dt) \exp\left\{-\frac{1}{2} bd(1-t^2)\right\} t\,dt \right] \tag{25}$$

Рассмотрим первый интеграл

$$\int_0^{d^{-1/2}} J_0(dt) \exp\left\{-\frac{1}{2} bd(1-t^2)\right\} t\,dt < \int_0^{d^{-1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} bd(1-t^2)\right\} t\,dt =$$

$$= \frac{e^{-bd/2}(e^{b/2}-1)}{bd}.$$

Поскольку $bd = T - R \gg 1$, этот член экспоненциально мал и им можно пренебречь. Так как $d \gg 1$, функцию Бесселя в (25) можно представить в виде ряда [5, с. 217] и ограничиться главным членом

$$J_0(dt) = (2\pi dt)^{-1/2} \left(1 - \frac{i}{8dt}\right) \exp\left(idt - i\frac{\pi}{4}\right) + \text{к. с.}$$

Тогда для вычисления асимптотики второго интеграла в (25) воспользуемся следующим разложением в ряд [6]:

$$F(\lambda) = \int_\gamma f(z) \exp\{\lambda S(z)\} \sim \exp\{\lambda S(z_0)\} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k-1},$$

где

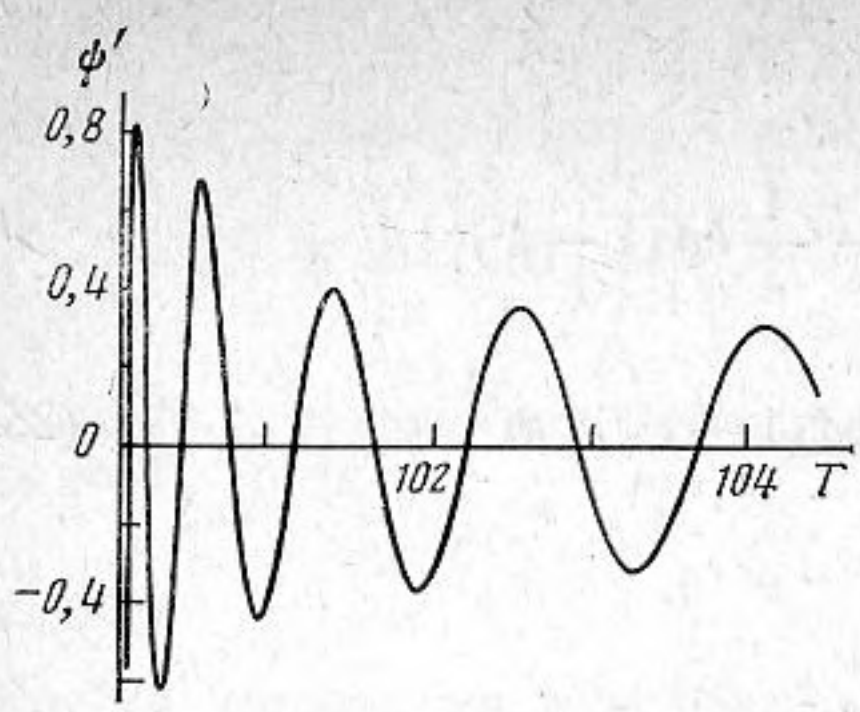
$$a_k = -\left(-\frac{1}{S'(z)} \frac{d}{dz}\right)^k \left(\frac{t(z)}{S'(z)}\right)\Bigg|_{z=z_0},$$

причем $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в начале $z_0$ контура $\gamma$, функции $f(z)$, $S(z)$ голоморфны в точке $z_0$ и $S'(z_0) \neq 0$. При этих условиях, а также при $z_0 = 1$, $\lambda = d = \sqrt{T^2 - R^2} \gg 1$, пропуская несколько громоздкие вычисления, для случая $R \gg 1$ получаем

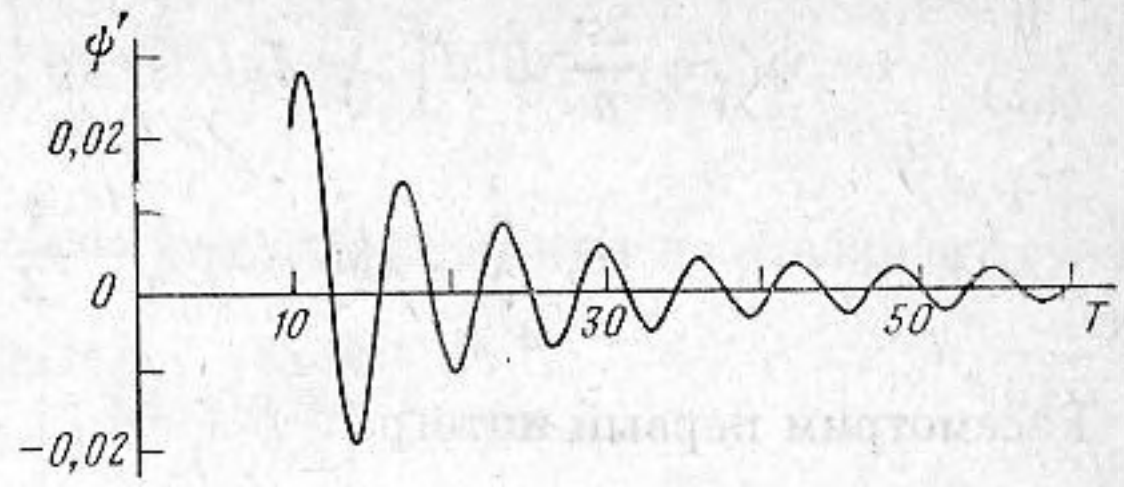
$$\psi' = \frac{B}{n^2+1} \frac{\sqrt{8\pi}}{\sqrt{T^2+R^2}} \frac{R}{T} \left(1 + \frac{2n}{n^2+1} \frac{R}{T}\right)^{-1} \left[ \frac{\sqrt{T^2-R^2}}{T} \sin\left(\sqrt{T^2-R^2} - \frac{\pi}{4}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(n + \frac{R}{T}\right) \cos\left(\sqrt{T^2-R^2} - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \tag{26}$$

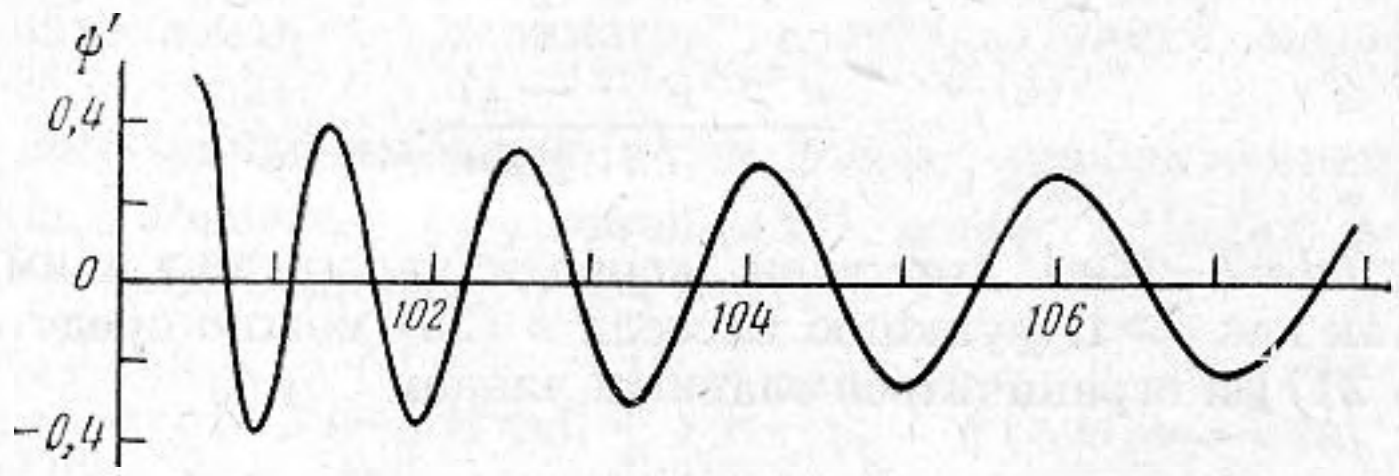
Выражение (26) представляет собой первый член разложения по степеням $d^{-1} = (T^2 - R^2)^{-1/2}$. В то же время точное решение в виде бесконечной суммы функций Бесселя (19)–(21) есть ряд по степеням $b = \sqrt{(T-R)/(T+R)}$. Очевидно, существует такая область параметров $T$ и $R$, где должны быть справедливы обе формулы. На фиг. 2 изображен график функции $\psi'$ по формуле (23). Видно, что поле имеет резкий максимум вблизи точки $T = 100$, а затем представляет собой квазигармонические колебания с увеличивающейся частотой и уменьшающейся амплитудой. На фиг. 3 изображен график функции $\psi'$ по формуле (26). Графики в общей области практически совпадают, причем в точке, где асимптотическая формула наименее точна, т. е. при $T = 100{,}5$, разница обнаруживается только в пятом знаке. С ростом $T$ точность (26) увеличивается, а формулы (23) — уменьшается, так как все больший вклад должны вносить отброшенные члены. Таким образом, получили, что при $R \gg 1$ звуковое поле известно в любой момент времени.




Фиг. 2




Фиг. 4




Фиг. 3

Фиг. 2. Поле вблизи фронта волны. $T-R\ll 1$, $R=100$, $n=2$, $B=1$

Фиг. 3. Поле вдали от фронта волны. $\sqrt{T^2-R^2}\gg 1$, $R=100$, $n=2$, $B=1$

Фиг. 4. Поле вдали от фронта волны. $T\gg 1$, $R=0$, $n=2$, $B=1$

Если $R\sim 1$, надо рассматривать первые два члена асимптотического разложения. Тогда

$$\psi' = -\frac{B}{n^2+1}\frac{(8\pi)^{1/2}}{T^{3/2}}\left[n\left(\frac{2}{n^2+1}+R\right)\cos\left(T-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}-R\right)\sin\left(T-\frac{\pi}{4}\right)\right], \qquad (27)$$

т. е. при больших $T$ вдали от фронта волны поле изменяется по гармоническому закону с частотой $\alpha/2$, а огибающая его спадает как $T^{-3/2}$ (см. фиг. 4). Такое поведение поля объясняется наличием дисперсии, поскольку у волн с длинами, близкими к характерному масштабу неоднородности, т. е. у которых $\omega\sim\alpha/2$, групповая скорость значительно меньше скорости распространения высокочастотных гармоник. Следовательно, при больших временах вдали от фронта волны вклад в поле вносят только низкочастотные гармоники.

Этот результат возможно получить только при точном решении задачи, поскольку в геометрооптическом приближении среда считается недиспергирующей, длины волн распространяющихся возмущений полагаются много меньшими всех характерных размеров системы и низкочастотные процессы вообще не рассматриваются.

Рассмотрим случай, когда источник расположен в неоднородной среде на расстоянии $z=l$ от границы. Для нахождения звуковых полей исходим из уравнений:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}-(c_0+\alpha z)^2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}=A\delta(z-l)\delta(t), \qquad z>0,$$
$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}-c_2^2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}=0, \qquad z<0, \qquad (28)$$

где $\psi_1$ и $\psi_2$ связаны граничными условиями (8), (9). Из (28) для фурье-образов по времени $\hat{\psi}(\omega, z)$ получим линейное неоднородное уравнение

$$\omega^2\hat{\psi}+(c_0+\alpha z)^2\hat{\psi}_{zz}''=-A\delta(z-l).$$

Исследуя его аналогично (10) и используя принцип причинности, находим, что его решением является выражение

$$\hat{\psi}=-\frac{A}{\alpha\sqrt{1-4\omega^2/\alpha^2}}\frac{\sqrt{c_0+\alpha z}}{(c_0+\alpha l)^{3/2}}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4\omega^2}{\alpha^2}}\left|\ln\frac{1+\alpha z/c_0}{1+\alpha l/c_0}\right|\right\}+\right.$$

$$\left.+V(\omega)\exp\left\{\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4\omega^2}{\alpha^2}}\ln\left(1+\frac{\alpha}{c_0}z\right)\left(1+\frac{\alpha}{c_0}l\right)\right\}\right].$$

Производя обратное преобразование, получаем поле в верхней среде. Поле при $z<0$ ищем в виде

$$\psi^{tr}=B_4\int W(\omega)\frac{\exp\{R_4\sqrt{1-4\omega^2/\alpha^2}-i\omega(t+z/c_2)\}}{\alpha\sqrt{1-4\omega^2/\alpha^2}}d\omega,$$

где

$$B_4=-\frac{A}{2\pi}\left(\frac{\rho_0}{\rho_2}\right)^{1/2}\frac{c_0^{1/2}}{(c_0+\alpha l)^{3/2}},\qquad R_4=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha}{c_0}l\right).$$

Представим $\psi_1$ в виде суммы падающей и отраженной волн: $\psi_1=\psi+\psi^r$. После преобразований, аналогичных проведенным выше, для звуковых полей получаем выражения

$$\psi=B_0\int\frac{\exp(R_0\sqrt{1-y^2}-iyT_0)}{2\sqrt{1-y^2}}dy,$$

$$\psi^r=B_0\left[-\int\frac{\exp(R_3\sqrt{1-y^2}-iyT_0)}{2\sqrt{1-y^2}}dy+\right.$$

$$\left.+\int\frac{\exp(R_3\sqrt{1-y^2}-iyT_0)}{-1+\sqrt{1-y^2}+iny}dy\right],$$

$$\psi^{tr}=B_4\int\frac{\exp(R_4\sqrt{1-y^2}-iyT_4)}{-1+\sqrt{1-y^2}+iny}dy,$$

где

$$T_0=\alpha T/2,\qquad B_0=-\frac{A}{2\pi}\frac{(c_0+\alpha z)^{1/2}}{(c_0+\alpha l)^{3/2}},\qquad R_0=\frac{1}{2}\left|\ln\frac{1+\alpha z/c_0}{1+\alpha l/c_0}\right|,$$

$$R_3=\frac{1}{2}\ln(1+\alpha z/c_0)(1+\alpha l/c_0),\qquad T_4=\frac{1}{2}\alpha(t+z/c_2).$$

Вычислим интеграл

$$\psi^0=\frac{B}{2}\int\frac{\exp(R\sqrt{1-y^2}-iyT)}{\sqrt{1-y^2}}dy.$$

После преобразований, аналогичных (17), получаем $\psi^0=-\pi BJ_0(\sqrt{T^2-R^2})\times\times\theta(T-R)$. Задача свелась к ранее исследованной. Для отраженных и прошедших звуковых полей справедливы те же асимптотики (23), (24), (26), (27).

Автор благодарен Немцову Б. Е., под чьим руководством была выполнена эта работа, Пылину А. В. за помощь при проведении численных расчетов и Годину О. А. за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Wood D. H.* Green's function for unbounded constant gradient media // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 46. N 5(2). P. 1333–1339.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1954.
4. *Денисов Н. Г.* Распространение электромагнитных сигналов в ионизированном газе // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 12. С. 1354–1363.
5. *Ватсон Г. И.* Теория бесселевых функций. М.: ОНТИ, 1949.
6. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 11.IV.1986