АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 2

УДК 534.2

МЕТОД ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С ПОТОКОМ

Гладенко А. Ф., Леонтьев Е. А.

Предложена модификация метода пограничного слоя для решения задач модового распространения звука в плавно неоднородных каналах с потоком. Сформулирована процедура построения асимптотического разложения решения и найдены его первые члены в случае, когда для заданной моды в канале имеется точка, где частота совпадает с критической частотой.

Целью работы является исследование распространения звука в цилиндрическом канале с потоком переменного сечения с жесткими стенками в предположении о медленности изменения сечения. При этих предположениях можно сохранить представление о волноводных модах регулярного канала, параметры которых однако подстраиваются под медленное изменение геометрии канала и скорости потока. Решение такого рода рассмотрено нами в работе [1], где было отмечено, что оно становится непригодным в определенных сечениях канала, где частота совпадает с критической частотой для данной моды, или, если стенки канала неидеальны, в сечении, где импеданс имеет значение, соответствующее слиянию двух мод (так называемый оптимальный импеданс [2, 3]). Эти случаи создают основные трудности при получении аналитических выражений для волноводных мод. В то же время они представляют наибольший интерес, поскольку связаны с характерными особенностями волноводного распространения звука в плавно неоднородных каналах.

В данной работе будем интересоваться только случаем совпадения частоты в некотором сечении канала с критической частотой. Такое сечение по аналогии с квантовой механикой будем называть точкой поворота (ТП). Для построения решений в окрестности ТП будем использовать метод пограничного слоя, развитый в классической теории дифракции В. М. Бабичем с сотрудниками [4] и в значительной мере модифицированный нами для интересующих нас случаев волноводных задач при наличии потока. Решение, полученное в [1], является в данном методе внешним, его необходимо срастить с внутренним решением, справедливым в окрестности ТП. Аналитически достаточно просто рассмотреть случай одной или двух близко расположенных ТП. При большом числе близких ТП эталонные функции, пригодные для описания такого случая, недостаточно изучены в рамках теории специальных функций. Здесь мы сосредоточим внимание на случае одной ТП, случай двух ТП будет описан в следующей работе.

Нас интересуют волноводные решения уравнения Блохинцева [5] для полной энтальпии B:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c^2}\frac{DB}{Dt}\right)+\frac{1}{2c^2}\nabla V^2\nabla B-\nabla^2 B=0 \qquad (1)$$

с зависимостью от времени $\exp(-i\omega t)$, где c — скорость звука в потенциальном изоэнтропийном основном потоке, $D/Dt=\partial/\partial t+(\mathbf{V}\nabla)$, $\mathbf{V}$ — скорость стационарного основного потока, которая определяется из уравнения потенциала с учетом сжимаемости. Предполагается, что основной поток является дозвуковым, он определен нами в [1]. На жестких стенках канала должно быть выполнено граничное условие $\partial B/\partial n=0$. Уравнение стенки канала: $r=r_0(\varepsilon z)$, где z — координата вдоль оси канала, ε — малый параметр, $r_0(\xi)$ — функция, все производные которой ограничены.

Для построения решения используем следующий анзатц [1]:

$$B=\{gJ_m(\rho)-ihJ_m{}'(\rho)\}\exp\{i(\theta-m\vartheta-\omega t)\},\tag{2}$$

где J_m и $J_m{}'$ — функция Бесселя и ее производная, ϑ — азимутальный угол. Функции θ, ρ, g и h, зависящие от z и r, подлежат определению. Подставляя (2) в (1) и выражая вторые производные функций J_m с помощью уравнения Бесселя через J_m и $J_m{}'$, получим два уравнения, соответствующие обращению в нуль выражений, стоящих сомножителями при J_m и $J_m{}'$:

$$(L_1+2iL_2+\Gamma)g+i[s(2L_3+Q)+(L_3s)]h=0,\tag{3}$$

$$(2L_3+Q)(g+ih/\rho)-i[L_1+2iL_2+\Gamma-\rho^{-2}(L_3\rho)]h=0,\tag{4}$$

где

$$L_1=p\left(\frac{1}{c^2}p\right)-\nabla^2+\frac{1}{2c^2}\nabla V^2\nabla;\quad L_2=\frac{1}{c^2}[(p\theta)-\omega]p-\nabla\theta\nabla;$$

$$L_3=\frac{1}{c^2}(p\rho)p-\nabla\rho\nabla;$$

$$\Gamma=\frac{\omega}{c^2}(p\theta)-\frac{\omega^2}{c^2}-(L_2\theta)-s(L_3\rho)+i\left[(L_1\theta)-\omega\left(p-\frac{1}{c^2}\right)\right]+\frac{m^2}{r^2};$$

$$Q=(L_1\rho)+2i(L_2\rho)-\rho^{-1}(L_3\rho);\ p=\mathbf{V}\nabla;\ s=1-m^2/\rho^2.$$

Сформулируем процедуру удовлетворения граничному условию на жесткой стенке канала $\partial B/\partial n=0$. Для функции ρ при $r=r_0(\varepsilon z)$ необходимо положить $\rho(z,\ r_0(\varepsilon z))=\zeta$, где ζ — корень производной функции Бесселя $J_m{}'(\zeta)=0$. С учетом этого условия на функцию ρ и при подстановке (2) в граничное условие, для амплитуд g и h на стенке будем иметь

$$\frac{\partial g}{\partial n}+i\left(1-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\frac{\partial\rho}{\partial n}h+i\frac{\partial\theta}{\partial n}g=0,\qquad r=r_0(\varepsilon z).\tag{5}$$

К этим граничным условиям необходимо добавить естественное условие, чтобы функция ρ обращалась в нуль на оси канала: $\rho(z,0)=0$.

Сформулируем теперь процедуру определения искомых функций во внешней области вдали от ТП. В этой области вместо переменной z необходимо использовать растянутую переменную $\xi=\varepsilon z$. Потребуем, чтобы функции $\theta^{(e)}$ и $\rho^{(e)}$ (индекс e далее означает внешнюю область) удовлетворяли системе уравнений

$$\frac{\omega}{c^2}(p\theta^{(e)})-\frac{\omega^2}{c^2}-L_2\theta^{(e)}-sL_3\rho^{(e)}+\frac{m^2}{r^2}=0;\quad L_2\rho^{(e)}=0.\tag{6}$$

Уравнения (6) эквивалентны уравнению эйконала движущейся среды. Действительно, если ввести функции $\Phi^{\pm}=\theta^{(e)}\pm\sqrt{(\rho^{(e)})^2-m^2}\mp\arccos(m/\rho^{(e)})$, тогда $\Phi^{\pm}$ в силу уравнений (6) будут удовлетворять уравнению эйконала $c^2(\nabla\Phi^{\pm})^2-[p\Phi^{\pm}-\omega]^2=0$. Другими словами, мы требуем, чтобы лучевая структура внешнего решения была согласована с уравнениями геометрической акустики. При таком определении функций уравнения (3) и (4) для амплитуд g и h приобретают смысл уравнений переноса геометрической акустики, а точнее, эквивалентны им.

Из системы уравнений (6), записанных в переменных ξ и r, и граничных условий на ρ, которые сформулированы выше, функции $\theta^{(e)}$ и $\rho^{(e)}$ определяются в виде разложений по степеням ε: $\rho^{(e)}=\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{2n}\rho_n^{(e)}(\xi,r)$, $\theta^{(e)}=\varepsilon^{-1}\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{2n}\theta_n^{(e)}(\xi,r)$, причем функции $\rho_n^{(e)}$ и $\theta_n^{(e)}$ ищутся в виде полиномов по r с коэффициентами, зависящими от ξ. Напомним также, что в уравнения (3), (4) и (6) входят параметры основного стационарного потока, которые определяются из уравнения потенциала сжимаемой жидкости и известных соотношений газовой динамики в виде разложений по степеням ε, полученных в работе [1] и справедливых при числах Маха основного потока, не слишком близких к единице. Конечный результат довольно громоздких вычислений, связанных с решением уравнений (6), для двух членов разложения функций $\rho^{(e)}$ и $\theta^{(e)}$ можно представить в виде

$$\rho_0^{(e)}=\zeta r/r_0(\xi),\quad \rho_1^{(e)}=\rho_{13}(\xi)r^3+\rho_{11}(\xi)r, \tag{7}$$

где $\rho_{13}=-\dfrac{\zeta}{3}\left\{\dfrac{r_0'^2}{r_0^3}+\left(q-\dfrac{(\gamma+1)M_0^2\mu_\pm^2}{2}\right)\dfrac{r_0''}{2\zeta^2}\right\},\quad \rho_{11}=-\rho_{13}r_0^2$

$$q=k^2\sigma^2-(1-M_0^2)\zeta^2/r_0^2,\ \mu_\pm=(k\sigma\mp M_0\sqrt{q})/(1-M_0^2),$$

$\sigma^2=1+(\gamma-1)M_0^2/2$, $k=\omega/c_0$, $\gamma=c_p/c_v$, $M_0(\xi)$ — осевое число Маха, определяемое уравнением (11) работы [1], c_0 — постоянная, определяемая значениями M_0 и V_0 в некоторой точке на оси канала:

$$\theta_0^{(e)}=\int_{\xi_0}^{\xi}\alpha_\pm(\xi)\,d\xi,\quad \theta_1^{(e)}=\theta_{12}(\xi)r^2+\theta_{10}(\xi), \tag{8}$$

где

$$\alpha_\pm=(-k\sigma M_0\pm\sqrt{q})/(1-M_0^2),\ \theta_{12}(\xi)=\alpha_\pm r_0'/2r_0,$$

$$\theta_{10}(\xi)=\pm\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{1}{\sqrt{q}}\left\{M_0u\left[\frac{\gamma-1}{2}M_0M_\pm^2-\mu_\pm\alpha_\pm\right]+\frac{m^2r_0'^2}{2r_0^2}+\rho_{13}r_0'\frac{\zeta^2+2m^2}{\zeta}\right\}d\xi$$

$$u=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{1-M_0^2}\frac{r_0'^2}{r_0^2}-\frac{r_0''}{r_0}\right]r_0^2.$$

При $M_0>0$, когда основной поток направлен в положительном направлении оси z и $q>0$, знак $(+)$ в формулах (7) и (8) соответствует распространению волны по потоку, а знак $(-)$ — против потока.

Амплитуды $g^{(e)}$ и $h^{(e)}$ определяются из уравнений (3) и (4) и граничного условия (5), записанных в переменных ξ и r, при подстановке в них известных функций $\theta^{(e)}$ и $\rho^{(e)}$. Функции $g^{(e)}$ и $h^{(e)}$ ищутся в виде разложения по степеням ε: $\quad g^{(e)}=\sum\limits_{n=0}^{N}\varepsilon^n g_n^{(e)}(\xi,r),\ h^{(e)}=\sum\limits_{n=1}^{N}\varepsilon^n h_n^{(e)}(\xi,r).$

В случае канала с жесткими стенками разложение $h^{(e)}$ фактически начинается с членов ε^2 $(h_1^{(e)}\equiv 0)$. При этом $g_n^{(e)}$ и $h_n^{(e)}$ являются полиномами по r с коэффициентами, зависящими от ξ, в частности $g_0^{(e)}=g_{00}(\xi)$, $g_1^{(e)}=g_{10}(\xi)$, $h_2^{(e)}=h_{21}(\xi)r$. Для первых членов разложения функции $g^{(e)}$ имеем

$$g_0^{(e)}=g_{00}(\xi)=C_\pm^{(0)}\,G(\xi),\quad G(\xi)=\sigma^{1/(\gamma-1)}q^{-1/4}r_0^{-1}, \tag{9}$$

$$g_1^{(e)}=G(\xi)\left(C_\pm^{(1)}+\int^{\xi}R(\xi)G^{-1}(\xi)\,d\xi\right),$$

где $R(\xi)=\dfrac{C_\pm^{(0)}}{i\sqrt{q}}\left\{(M_0M_0'-r_0^{-1}r_0')G'+\dfrac{M_0^2-1}{2}G''\right\}$, $\quad C_\pm^{(0)}$, $C_\pm^{(1)}$ — произвольные постоянные. Из формул (9) и (10) видно, что функции $g_0^{(e)}$ и $g_1^{(e)}$ обращаются в бесконечность в точках поворота, где $q(\xi)=0$. В окрестности таких точек внешнее разложение становится непригодным. Это связано с тем, что в уравнениях (3) и (4) в переменных ξ и r имеются члены, содержащие малый параметр при старшей производной, которые согласно процедуре построения внешнего решения учитываются как поправки в высших членах разложения по степеням ε. В окрестности ТП эти члены как поправки рассматривать нельзя, так как они становятся соизмеримыми с главными членами, что проявляется в виде особенностей внешнего решения.

Пусть $q(\xi)$ в точке $\xi=\xi_0$ имеет нуль первого порядка и нигде больше в нуль не обращается. Тогда в окрестности ξ_0 производная $q'(\xi)\neq0$, где

$$q'(\xi)=2(k^2\sigma^2E-qD)r_0'/r_0, \quad E=1-(\gamma+1)M_0^2/(1-M_0^2)^2, \tag{10}$$

$D=1-2M_0^2\sigma^2/(1-M_0^2)^2$. Это означает, что в окрестности ξ_0 $r_0'\neq0$ и $E\neq0$. Для дозвукового потока величина E обращается в нуль при $\pm M_0=M_0^*\simeq\simeq0{,}49$. Отметим, что для дальнейшего проведения процедуры сращивания произвольную постоянную ξ_0 в нижних пределах интегрирования в формулах (8) удобно отождествлять с ТП, поэтому мы сохраняем для них одинаковые обозначения.

Перейдем теперь к построению решения, справедливого в окрестности ξ_0. Введем внутреннюю переменную $\nu=(\xi-\xi_0)\varepsilon^{-2/3}$. Окрестность точки ξ_0, где $\nu=O(1)$ будем называть пограничным слоем. Предположим, что для решения во внутренней области, т. е. области, включающей в себя пограничный слой, остается справедливым анзатц (2). Искомые величины, относящиеся к внутренней области, будем обозначать $\theta^{(i)}$, $\rho^{(i)}$, $g^{(i)}$ и $h^{(i)}$. Очевидно, что во внутренней области выражение (2) также будет решением уравнения (1) с граничным условием на жестких стенках, если будут удовлетворяться уравнения (3) и (4), граничные условия на функцию ρ и условие (5) для амплитуд g и h. Указанные уравнения и граничные условия должны быть записаны в переменных ν и r. Во внутренней области разложения по ε искомых функций $\theta^{(i)}$, $\rho^{(i)}$, $g^{(i)}$ и $h^{(i)}$ должны быть, однако, существенно перестроены.

Прежде всего отметим, что функции $\theta^{(i)}$ и $\rho^{(i)}$ во внутренней области уже не определяются уравнениями (6) геометрической акустики. Сформулируем процедуру их определения. Обозначим через $\theta_\pm^{(e)}(\xi,r,\varepsilon)$ и $\rho_\pm^{(e)}(\xi,r,\varepsilon)$ уже известные функции внешней области, где знак (+) означает, что соответствующая функция относится в моде, распространяющейся по потоку, а знак (−) — против потока. С помощью этих функций определим $\theta^{(i)}$ и $\rho^{(i)}$:

$$\theta^{(i)}(\nu,r,\varepsilon)=\frac{1}{2}\left[\theta_+^{(e)}(\xi,r,\varepsilon)+\theta_-^{(e)}(\xi,r,\varepsilon)\right], \tag{11}$$

$$\rho^{(i)}(\nu,r,\varepsilon)=\frac{1}{2}\left[\rho_+^{(e)}(\xi,r,\varepsilon)+\rho_-^{(e)}(\xi,r,\varepsilon)\right], \quad \xi=\xi_0+\varepsilon^{2/3}\nu. \tag{12}$$

Такое определение предполагает, что функции, стоящие в правых частях (11) и (12), могут быть аналитически продолжены во внутреннюю область и разложены в ряд Тейлора в точке $\xi=\xi_0$. Отдельно для каждой из функций $\theta_\pm^{(e)}$ и $\rho_\pm^{(e)}$ разложение в ряд Тейлора в точке, где обращается в нуль $q(\xi)$, невозможно из-за наличия в формулах (7) и (8) величины $\sqrt{q}$. Однако для комбинаций (11) и (12) разложение справедливо, так как $\sqrt{q}$ из них выпадает. Здесь положение аналогично с поведением эйконалов в окрестности неособой точки акустики [4]. Легко видеть, что определенная согласно (12) функция $\rho^{(i)}$ в силу аналитического продолжения автоматически удовлетворяет граничным условиям. Из формул (7), (8), (11) и (12) имеем

$$\theta^{(i)}=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{k\sigma M_0}{1-M_0^2}d\xi-\varepsilon\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{k\sigma M_0}{(1-M_0^2)^2}\Bigg[(1+\gamma M_0^2)u+ +\frac{(\gamma+1)M_0^2(\zeta^2+2m^2)}{6\zeta^2}\Bigg]r_0r_0''\,d\xi, \tag{13}$$

$$\rho^{(i)}=\zeta r/r_0(\xi)+\varepsilon^2(\rho_{13}^{(i)}(\xi)r^3+\rho_{11}^{(i)}(\xi)r)+O(\varepsilon^4), \tag{14}$$

$$\rho_{13}^{(i)}=-\frac{\zeta}{3}\left\{\frac{r_0'^2}{r_0^3}+\left(q-\frac{(\gamma+1)M_0^2\mu^2}{2}\right)\frac{r_0''}{2\zeta^2}\right\},\quad \rho_{11}^{(i)}=-\rho_{13}^{(i)}r_0^2,$$

$$\mu^2=(k^2\sigma^2+M_0^2q)/(1-M_0^2)^2.$$

Определения (11) и (12) дают возможность представить функции $\theta^{(i)}$ и $\rho^{(i)}$ в виде разложений по $\varepsilon^{2/3}$:

$$\theta^{(i)}=\varepsilon^{-1/3}\sum_{n=0}^{N_1}\varepsilon^{2n/3}\theta_n^{(i)}(\nu,r),\quad \rho^{(i)}=\sum_{n=0}^{N_1}\varepsilon^{2n/3}\rho_n^{(i)}(\nu,r),$$

которые получаются разложением известных функций в правой части (11) и (12) в ряд Тейлора по степеням $\varepsilon^{2/3}\nu$ в точке $\xi=\xi_0$. Используя выражения (13) и (14) для первых членов $\theta_n^{(i)}$ и $\rho_n^{(i)}$, будем иметь

$$\theta_0^{(i)}=-\frac{k\sigma M_0\nu}{1-M_0^2},\quad \theta_1^{(i)}=(1+\gamma M_0^2)\frac{k\sigma M_0\nu^2}{(1-M_0^2)^3}\frac{r_0'}{r_0}, \tag{15}$$

$$\rho_0^{(i)}=\zeta r/r_0,\quad \rho_1^{(i)}=-\zeta r\nu r_0'/r_0^2. \tag{16}$$

Следует помнить, что в формулах (15), (16) величины, зависящие от ξ, берутся в точке ξ_0.

Теперь можем перейти к определению функций $g^{(i)}$ и $h^{(i)}$ внутренней области. При известных функциях $\theta^{(i)}$ и $\rho^{(i)}$ амплитуды $g^{(i)}$ и $h^{(i)}$ определяются из уравнений (3), (4) и граничного условия (5), записанных в переменных ν, r, в виде разложений по степеням $\varepsilon^{2/3}$:

$$g^{(i)}=\sum_{n=0}^{N_1}\varepsilon^{2n/3}g_n^{(i)}(\nu,r),\quad h^{(i)}=\varepsilon^2\sum_{n=0}^{N_1}\varepsilon^{2n/3}h_n^{(i)}(\nu,r), \tag{17}$$

где $g_n^{(i)}$ и $h_n^{(i)}$ — полиномы по r с коэффициентами, зависящими от ν. Разложение $h^{(i)}$ начинаются с членов ε^2 только для жестких стенок канала. Подставляя разложения (17) в уравнения (3), (4) и в граничное условие (5) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε с учетом явных выражений для $\theta_n^{(i)}$ и $\rho_n^{(i)}$ (см. (15), (16)), получим систему рекуррентных уравнений для $g_n^{(i)}$ и $h_n^{(i)}$. Выпишем несколько уравнений из главных порядков по дробным степеням ε, следующих из (3), (4):

$$\frac{\partial g_0^{(i)}}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial^2 g_0^{(i)}}{\partial\nu^2}+\varkappa_0^2q'(\xi_0)\nu g_0^{(i)}=0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial^2 g_1^{(i)}}{\partial\nu^2}+\varkappa_0^2q'(\xi_0)\nu g_1^{(i)}-\varkappa_1\frac{\partial g_0^{(i)}}{\partial\nu}+\varkappa_2\nu^2g_0^{(i)}+\varkappa_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g_2^{(i)}}{\partial r}\right)=0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial g_2^{(i)}}{\partial r}-\frac{r_0'(\xi_0)}{r_0(\xi_0)}r\frac{\partial g_0^{(i)}}{\partial\nu}=0, \tag{20}$$

где

$$\varkappa_0=1/(1-M_0^2),\quad \varkappa_1=2M_0M_0'\varkappa_0,\quad \varkappa_2=\varkappa_0^2[q''/2+2\varkappa q']|_{\xi=\xi_0},$$

причем в выражениях, определяющих коэффициенты $\varkappa_n$, величины, зависящие от ξ, берутся в точке $\xi=\xi_0$. Из граничного условия (5) получаем аналогично

$$\left.\frac{\partial g_0^{(i)}}{\partial r}\right|_{r=r_0(\xi_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial r}\right|_{r=r_0(\xi_0)}=0,\quad \left(\frac{\partial g_2^{(i)}}{\partial r}-r_0'(\xi_0)\frac{\partial g_0^{(i)}}{\partial \nu}\right)_{r=r_0(\xi_0)}=0.$$

Очевидно, последние условия выполняются в силу уравнений (18)–(20).

Из (18), (19) и (20) следует, что $g_0^{(i)}$ и $g_1^{(i)}$ являются функциями только от ν, а $g_2^{(i)}$ представима в виде $g_2^{(i)}=\frac{r^2}{2}\frac{r_0'(\xi_0)}{r_0(\xi_0)}\frac{\partial g_0^{(i)}}{\partial \nu}+g_{20}^{(i)}(\nu)$, где $g_{20}^{(i)}$ – функция только от ν и определяется из уравнений более высокого порядка. Определим функции $g_0^{(i)}$ и $g_1^{(i)}$.

Второе из уравнений (18) есть известное уравнений Эйри [6]. Его решение, конечное всюду, можно записать следующим образом:

$$g_0^{(i)}=C_0^{(i)}v(\beta_0^{1/3}\nu),\quad \beta_0=-\varkappa_0^2q'(\xi_0)=-q'/(1-M_0^2)^2|_{\xi=\xi_0},\tag{21}$$

где $v(\tau)$ – функция Эйри, $\beta_0^{1/3}$ – действительная величина, $C_0^{(i)}$ – постоянная, подлежащая определению. Используя переменную $\tau=\beta_0^{1/3}\nu$, второе из уравнений (19) с учетом (20) можно записать как неоднородное уравнение Эйри:

$$\frac{d^2g_1^{(i)}}{d\tau^2}-\tau g_1^{(i)}=C_0^{(i)}\left(av'(\tau)-bv(\tau)\right),\tag{22}$$

где $v'(\tau)$ – производная функции Эйри, $a=(\varkappa_1-2\varkappa_0r_0'r_0^{-1})\beta_0^{-1/3}$, $b=\varkappa_2\beta_0^{-4/3}$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что решением уравнения (22) является

$$g_1^{(i)}=C_0^{(i)}\left[\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{5}\right)\tau v(\tau)-\frac{b}{5}\tau^2v'(\tau)\right].\tag{23}$$

Формулы (2), (15)–(17), (21), (23) определяют первые члены разложения во внутренней области. Его удобно записать в виде

$$B^{(i)}=g^{(i)}J_m(\rho^{(i)})\exp[i(\theta^{(i)}-m\vartheta-\omega t)]+O(\varepsilon),\tag{24}$$

$$\theta^{(i)}=\varepsilon^{-1/3}\theta_0^{(i)}+\varepsilon^{1/3}\theta_1^{(i)}+O(\varepsilon),\quad \rho^{(i)}=\rho_0^{(i)}+\varepsilon^{2/3}\rho_1^{(i)}+O(\varepsilon^{4/3}),$$

$$g^{(i)}=C_0^{(i)}(1-\varepsilon^{2/3}\beta_2\nu)v(y)+O(\varepsilon^{4/3}),\quad y=\beta_0^{1/3}\nu(1+\varepsilon^{2/3}\beta_1\nu),$$

где

$$\beta_1=-\frac{b}{5}\beta_0^{1/3}=\frac{1}{5}\left.\left(\frac{4M_0M_0'}{1-M_0^2}+\frac{q''}{q'}\right)\right|_{\xi=\xi_0},$$

$$\beta_2=-\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{5}\right)\beta_0^{1/3}=\left[\frac{q''}{q'}+\frac{r_0'}{r_0(1-M_0^2)}-\frac{M_0M_0'}{5(1-M_0^2)}\right]_{\xi=\xi_0}.$$

Можно показать, что внутреннее разложение справедливо в области $|\nu|\leqslant A_1\varepsilon^{-2/3-\delta}$, где $\delta>0$. Это, по существу, и есть определение внутренней области. С другой стороны, выделяя главные особенности функций $g_n^{(e)}$ и $h_n^{(e)}$ внешнего решения при $\xi\to\xi_0$ в предположении, что $q'(\xi_0)\neq0$, можно получить, что внешнее разложение справедливо в области $|\xi-\xi_0|\geqslant A_2\varepsilon^{2/3-\delta}$, $\delta>0$ или $|\nu|\geqslant A_2\varepsilon^{-\delta}$. В частности, его справедливость нарушается в пограничном слое. Внутреннее и внешнее разложения решения должны быть сшиты на пересечении областей их применимости, т. е. при $A_2\varepsilon^{-\delta}\leqslant|\nu|\leqslant A_1\varepsilon^{-2/3-\delta}$. В этой области разложения должны совпадать. Но это не означает, конечно, соответственного совпадения разложений для функций θ, ρ, g, h с индексами (i) и (e), поскольку в общей области определения это разные функции.

Во внешнем решении перейдем к переменной $\xi=\xi_0+\varepsilon^{2/3}\nu$. Выделим главные члены функций $\theta^{(e)}$, $\rho^{(e)}$, $g^{(e)}$, $h^{(e)}$, а поправочные члены представим в виде разложения по $\varepsilon^{2/3}$. Далее переразложим внешнее решение, оставляя в аргументах экспоненты и функций Бесселя только главные члены $\theta^{(e)}$ и $\rho^{(e)}$. В результате внешнее решение можно представить в виде (2), где в качестве аргументов θ и ρ будут стоять главные члены функций $\theta^{(e)}$ и $\rho^{(e)}$, а в качестве амплитуд при функциях Бесселя и ее производной – главные члены амплитуд $g^{(e)}-h^{(e)}$, соответственно умноженные на ряды по степеням $\varepsilon^{1/3}$. В том же виде можно представить и внутреннее решение, если заменить функцию Эйри ее асимптотическим разложением. Сращивание внутреннего и внешнего решений достигается взятием подходящей линейной комбинации внешних решений в освещенной области, где $q(\xi)>0$, соответствующих распространению мод по потоку и против потока, а в области тени, где $q(\xi)<0$, взятием только затухающего внешнего решения и подходящим выбором имеющихся в наличии произвольных постоянных.

Пусть ради определенности освещенной области соответствует $\xi<\xi_0$, а $\xi>\xi_0$ отвечает области тени. Это означает, что $q'(\xi_0)<0$. Из явного выражения для производной $q'(\xi)$ следует, что запирание сужающегося канала ($r_0'(\xi_0)<0$) возможно при $|M_0|<M_0^*$, когда $E>0$, а расширяющегося канала ($r_0'(\xi_0)>0$) при $|M_0|>M_0^*$. Направление основного потока при этом несущественно. Отметим, что запирание расширяющегося канала при $|M_0|>M_0^*$ является главным качественным отличием канала с потоком от канала, в котором среда покоится.

В соответствии со сказанным выше в освещенной области $\xi<\xi_0$ нужно взять сумму внешних решений со знаком ($\pm$), определяемых формулами (2), (7)–(10), и между постоянными внутреннего и внешнего решения установить связь:

$$C_\pm^{(0)}=C_0^{(i)}\exp(\pm i\pi/4)\{2\sigma^{1(\gamma-1)}[\varepsilon(1-M_0^2)q']^{-1/6}r_0^{-1}\}_{\xi=\xi_0}.$$

Тогда с точностью $O(\varepsilon)$ внешнее и внутреннее решения совпадают в области перекрытия со стороны освещенной области. Совершенно аналогично производится сращивание в области тени.

Отметим, что при учете членов порядка $\varepsilon^{4/3}$, принимая во внимание зависимость функции $g_2^{(i)}$ от r, аргумент функции Эйри в формуле (24) следует заменить выражением

$$y=\beta_0^{1/3}(\nu+\varepsilon^{2/3}\beta_1\nu^2+\varepsilon^{4/3}r^2r_0'(\xi_0)/2r_0(\xi_0)),$$

которое обращается в нуль на поверхности

$$\nu=-\varepsilon^{4/3}r^2r_0'(\xi_0)/2r_0(\xi_0)+O(\varepsilon^2).$$

Это означает, что при учете членов более высокого порядка малости мы фактически имеем дело не с точкой поворота одномерной задачи, а с каустической поверхностью, которая разделяет освещенную область в канале и область каустической тени. Положение и форма каустики зависят от номера моды, частоты, геометрии канала и числа M_0 основного потока.

В заключение отметим, что полученные результаты согласуются с известными результатами, относящимися к случаю покоящейся среды [7], когда можно построить равномерную асимптотику решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гладенко А. Ф., Леонтьев Е. А.* Распространение акустических возмущений в плавно неоднородном канале с потенциальным индоэнтропическим потоком // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 2. С. 171–177.
2. *Леонтьев Е. А.* Распространение звука в цилиндрическом канале с медленно изменяющимся вдоль оси импедансом стенок. Аэроакустика. М.: Наука, 1980. С. 18–33.
3. *Zorumski W., Mason J.* Multiple eigenvalues of sound absorbing circular and annular ducts // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. Т. 55. № 6. С. 1158–1165.
4. *Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я.* Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
5. *Мунин А. Г., Кузнецов В. М., Леонтьев Е. А.* Аэродинамические источники шума. М.: Машиностроение, 1981.
6. *Фок В. А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. Радио, 1970.
7. *Попов А. В.* Трансформация мод в кусочно-аналитических волноводных переходах: Препринт № 11(210). М.: Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн, 1978.

Поступила в редакцию
18.VI.1986