

УДК 534.213

КОЛЕБАНИЯ ГАЗА БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ТРУБЕ С ОТКРЫТЫМ КОНЦОМ

Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Пермязов Е. И.

Дано теоретическое исследование колебаний большой амплитуды в трубе с открытым концом с учетом сложного гармонического состава колебаний и проведено сравнение результатов теории с экспериментом.

Известно, что увеличение амплитуды колебаний газа в трубе приводит к образованию струйного истечения из открытого конца трубы [1]. Случай колебаний большой амплитуды, когда струйные потери намного превышают акустическое излучение с открытого конца трубы (это имеет место при условии $\omega R/V \ll 1$, где ω — циклическая частота, R — характерный размер открытого конца, V — максимальное значение скорости газа на открытом конце), представляет особый практический интерес для интенсификации процессов тепло- и массопереноса [2].

Использование трубы — резонатора с открытым концом и присоединенным через конусный переходник гармонически движущимся поршнем дало простой и надежный генератор колебаний большой амплитуды, позволяющий получать колебания газа с амплитудой скорости 160 мс^{-1} и УЗД 190 дБ [2]. В [1] предложено акустическое приближение к теории колебаний большой амплитуды, позволившее рассчитать амплитуды первой гармоники скорости и давления в трубе, и получены осциллограммы давления и скорости, по которым измерялся полуразмах колебаний скорости и давления. Полученные результаты позволили решить некоторые прикладные задачи, связанные с теплопереносом в поле колебаний большой амплитуды [2, 3] и разработкой ряда устройств для нагрева, сушки, распыления и т. д. Однако акустическое приближение не позволяет описывать форму колебаний большой амплитуды, так как не учитывает генерацию высших гармоник на открытом конце и генерацию гармоник на поршне.

В данной работе ставится задача построения теории колебаний большой амплитуды, возбуждаемых в трубе с открытым концом поршнем, приводимым в движение кривошипно-шатунным механизмом и присоединенным к трубе через конусный переходник, и сравнение ее с результатами экспериментального исследования.

Рассмотрим колебания газа в цилиндрической трубе длиной L , радиусом R , на одном конце которой находится конусный переходник длиной h , к которому присоединен поршень, приводимый в движение внутри цилиндра радиусом R_0 кривошипно-шатунным механизмом, длина кривошипа l_0 , длина шатуна d . Кривошип вращается с частотой ω , близкой к собственной частоте трубы.

Если труба длинная ($R/L \ll 1$), колебательное число велико ($R\sqrt{\omega/2\nu} \gg 1$, где ν — коэффициент кинематической вязкости), амплитуда смещения поршня l_0 мала ($kl_0 \ll 1$, где $k = \omega/c_0$, c_0 — скорость звука в невозмущенной среде), движение газа внутри трубы можно считать одномерным и пренебречь влиянием пограничного слоя на ядро течения, а систему уравнений, описывающую колебания

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa, \quad (1)$$

решать методом теории возмущений. (Здесь ρ , p , u — плотность, избыточ-

ное давление и скорость соответственно, $\kappa = c_p/c_v$, индекс 0 относится к невозмущенному газу).

Пусть $U/\omega L \ll 1$, где U — амплитуда скорости, тогда нелинейность внутри трубы можно считать малой [1]. Условие $\omega R/V \ll 1$ приводит к связи $\varepsilon \sim M^{1/2}$ для безразмерной амплитуды результирующих колебаний и числа Маха движения поршня [1]. Предлагавшийся ранее рядом авторов параметр $\varepsilon \sim M^{1/3}$ для трубы с открытым концом приводит к теории, не согласующейся с экспериментом [4].

Для постановки граничного условия на закрытом конце трубы рассмотрим движение газа в конусном переходнике и цилиндре с колеблющимся поршнем, которое также должно быть описано системой уравнений (1). Рассмотрим первое уравнение системы. Так как масштабом скорости в этой области является амплитуда скорости поршня U_{Π} , а масштабом x — величина $h+l_0$, то при выполнении условия $l_0/(h+l_0) \ll 1$ второй член уравнения имеет порядок ε^4 , а первый член — $\varepsilon^2 k(h+l_0)$. Поэтому при $k(h+l_0) \ll 1$ можно считать $\partial p/\partial x = 0$, т. е. давление в конусном переходнике не зависит от координат и $p = p(t)$. Вместо второго уравнения (1) возьмем уравнение неразрывности в интегральной форме

$$\oint \rho(\mathbf{u} ds) = -(\partial/\partial t) \int \rho dv, \text{ где } s \text{ — площадь поверхности, а } v \text{ — объем обла-$$

сти, ограниченной поверхностями поршня s_0 , узким сечением конуса s и боковыми поверхностями цилиндра и конусного переходника. Проинтегрировав, получим $\rho u s = -(\partial/\partial t) \rho v$. Очевидно, что $v(t) = v_0 - x_{\Pi}(t)s$, где v_0 — суммарный объем цилиндра и конусного переходника, $x_{\Pi}(t)$ — координата поршня. Если $l_0/d \ll 1$, то $\bar{u}_{\Pi} = M \cos \omega t + (M l_0/2d) \sin 2\omega t$, где $u_{\Pi} = \partial x_{\Pi}/\partial t$, черта означает обезразмеривание, т. е. $\bar{u} = u/c_0$, $\bar{p} = p/\rho_0 c_0^2$, $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$, а $M = m^2 \omega l_0/c_0$ — число Маха движения поршня. После преобразований и перехода к безразмерным переменным (черту далее опускаем), получим для граничного условия на закрытом конце следующее выражение:

$$u(x=0) = u_{\Pi} - \frac{m^2}{c_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} (l_0 \sin \omega t - h), \quad (2)$$

где $m = R_0/R$.

Граничное условие на открытом конце (при $x=L$) должно получаться из рассмотрения течений вне трубы вблизи открытого конца и условий сшивания внешнего и внутреннего решений. Авторы [5] показали, что на открытом конце трубы кроме потерь на акустическое излучение имеются так называемые потери типа Бернулли, связанные с формированием струйного выброса, когда часть массы воздуха, находившегося в трубе, выбрасывается в окружающую среду безвозвратно. Потери типа Бернулли начинают преобладать уже с уровнем звукового давления порядка 140 дБ, чему соответствует амплитуда пульсаций скорости порядка 1 мс^{-1} . Следовательно, в фазе выброса на открытом конце должно быть $p = (1/2)u^2$ (вблизи открытого конца газ считается несжимаемым). В [6] показано, что в фазе всасывания, когда труба наполняется воздухом из областей, прилегающих непосредственно к открытому концу, при выполнении условия $\omega R/V \ll 1$, $p = (1/2)u^2$. В экспериментальной работе [7] было обнаружено, что давление на открытом конце трубы не содержит постоянной составляющей в отличие от скорости, которая ввиду отрыва струи в процессе выброса начинает пульсировать около некоторого постоянного значения $\langle u \rangle$. Полагая, что на открытом конце форма пульсаций скорости близка к синусоидальной, можно получить, что $\langle u \rangle = aV$, где $a \approx 1/\pi$. В общем случае, параметр должен быть определен экспериментально. Эксперименты [4] показывают, что $a = 1 \div 0,3$ при $Re = VR/\nu = 10^3 - 10^5$. Суммируя все изложенное выше, можно записать, пренебрегая величиной импеданса акустического излучения,

$$p(x=L) = \frac{1}{2} \{ [u(x=L) + aV]^2 \}, \quad (3)$$

где фигурные скобки означают, что в окончательном выражении нужно опустить постоянные члены.

При подстановке решений (1) в граничные условия (2) и (3) нужно удерживать лишь члены соответствующего порядка по ε .

Решение уравнений первого приближения ищем в виде

$$u^{(1)} = r_1^{(1)} \sin(kx + \alpha_1^{(1)}) \sin \omega t, \quad p^{(1)} = r_1^{(1)} \cos(kx + \alpha_1^{(1)}) \cos \omega t, \quad (4)$$

где верхний индекс в скобках означает порядок приближения, нижние индексы — номер гармоники. Граничные условия имеют вид: $u^{(1)} + (\sigma/c_0) \partial p^{(1)} / \partial t = 0$, $x=0$ (здесь введено $\sigma = m^2 h$); $p^{(1)} = 0$, $x=L$. Отсюда $\alpha_1^{(1)} = \arctg k\sigma$ и условие резонанса $kL = (\pi/2) - \arctg k\sigma$. Амплитуда $r_1^{(1)}$ в первом приближении не определяется. Для ее определения необходимо использовать граничные условия во втором порядке: $u_1^{(2)} = M \cos \omega t$; $x=0$; $p_1^{(2)} = ar_1^{(1)2} \sin \omega t$, $x=L$. Получим $r_1^{(1)} = [M/a\sqrt{1+(k\sigma)^2}]^{1/2}$.

Уравнения второго приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x} &= -\rho_1^{(1)} \frac{1}{c_0} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial t} - u_1^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial x}, \\ \frac{1}{c_0} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\rho_1^{(1)} u_1^{(1)}), \quad p^{(2)} = \rho^{(2)} + \frac{\kappa-1}{2} \rho_1^{(1)2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как выполнено $U/\omega L \ll 1$, а $V/\omega R \gg 1$, то нелинейность на открытом конце трубы вносит во второе приближение больший вклад по сравнению с нелинейностью внутри трубы. Следовательно, правой частью в (5) можно пренебречь и решать однородные уравнения. (Отметим, что этот вывод подтверждается прямым расчетом).

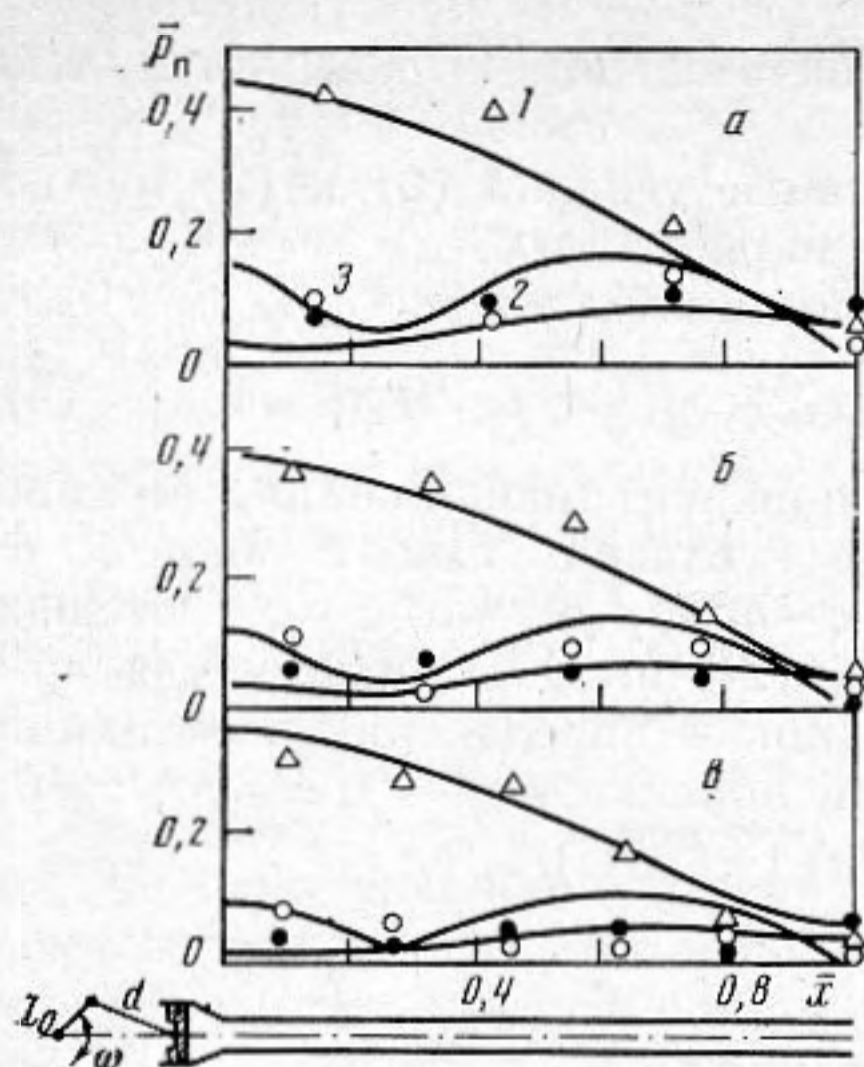
Анализ граничных условий (2), (3) с учетом (4) показывает, что второе приближение должно содержать 1–3 гармоники. Общее решение системы (5) поэтому таково:

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= r_1^{(2)} \sin(kx + \alpha_1^{(2)}) \cos \omega t + r_2^{(2)} \sin(2kx + \alpha_2^{(2)}) \sin 2\omega t + \\ &\quad + r_3^{(2)} \sin(3kx + \alpha_3^{(2)}) \cos 3\omega t, \\ p^{(2)} &= -r_1^{(2)} \cos(kx + \alpha_1^{(2)}) \sin \omega t + r_2^{(2)} \cos(2kx + \alpha_2^{(2)}) \cos 2\omega t - \\ &\quad - r_3^{(2)} \cos(3kx + \alpha_3^{(2)}) \sin 3\omega t. \end{aligned} \quad (6)$$

Все величины, входящие в (6), кроме $r_1^{(2)}$ и $r_3^{(2)}$, определяются из граничных условий (2), (3), в которых удерживаются лишь члены порядка ε^2 : $r_2^{(2)} = (3\kappa - 13)r_1^{(1)2}/32 \cos(\alpha_2^{(2)} - 2\alpha_1^{(1)})$, $\alpha_2^{(2)} = \arctg \{ [8k\sigma(\kappa - 1) + (\kappa + 1 + 8k^2\sigma^2) \sin 2k\sigma + 6k\sigma(\kappa + 1) \cos 2k\sigma - 16\kappa k\sigma \cos^2 \alpha_1^{(1)}] / \sqrt{1 + (2k\sigma)^2} (3\kappa - 13) \} + 2\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_3^{(2)} = 3\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_1^{(2)} = \arctg \{ 2aM / [\kappa k\sigma r_2^{(2)} \cos \alpha_1^{(1)} \cos \alpha_2^{(2)} - \sqrt{1 + (k\sigma)^2} r_2^{(2)} \sin(\alpha_2^{(2)} - 2\alpha_1^{(1)})] \} + \alpha_1^{(1)}$. Амплитуды второго приближения резонансных колебаний $r_1^{(2)}$ и $r_3^{(2)}$ находятся из граничных условий в третьем порядке: $r_1^{(2)} = M [\sqrt{1 + (k\sigma)^2} \sin(\alpha_2^{(2)} - \alpha_1^{(1)})]^{-1}$, $r_3^{(2)} = [(3\kappa k\sigma r_2^{(2)} \times \cos \alpha_1^{(1)} \cos \alpha_2^{(2)} / \sqrt{1 + (3k\sigma)^2} - r_2^{(2)} \sin(\alpha_2^{(2)} - 2\alpha_1^{(1)})] / 2a$.

Экспериментальное исследование колебаний большой амплитуды проводилось на установке, подробно описанной в [2]. Параметры установки: $2R = 0,04$ м, $h = 0,1$, $l_0 = 0,043$, $2R_0 = 0,077$, $d = 0,15$, $L = 5,5$ м. Труба состоит из пяти секций, что позволяет изменять длину трубы.

На фиг. 1 представлены распределения вдоль длины трубы максимальных мгновенных значений гармоник давления, вычисленных по (4), (6) и полученных при машинной обработке экспериментальных данных. Наибольший вклад в результирующее колебание газа около закрытого конца трубы вносит первая гармоника. С приближением к открытому концу вклад первой гармоники убывает, а значения остальных растут, т. е. происходит перекачка энергии из основной гармоники в высокочастотные составляющие колебания. На фиг. 1 показаны только три первые гармоники, так как вклады остальных имеют значения, меньшие точности экс-

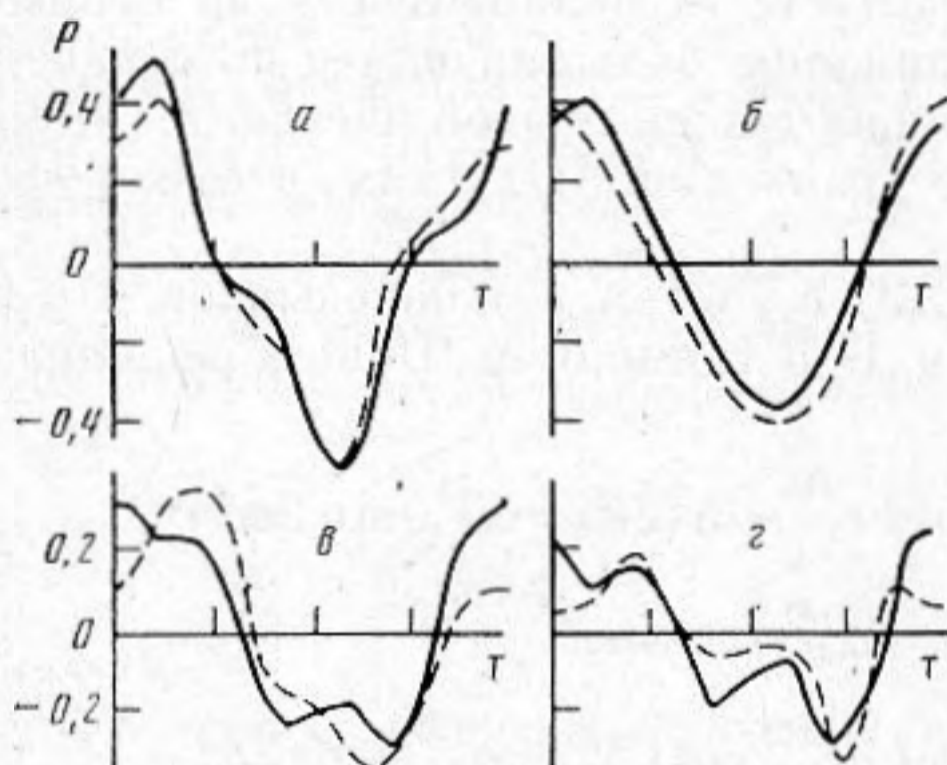


Фиг. 1

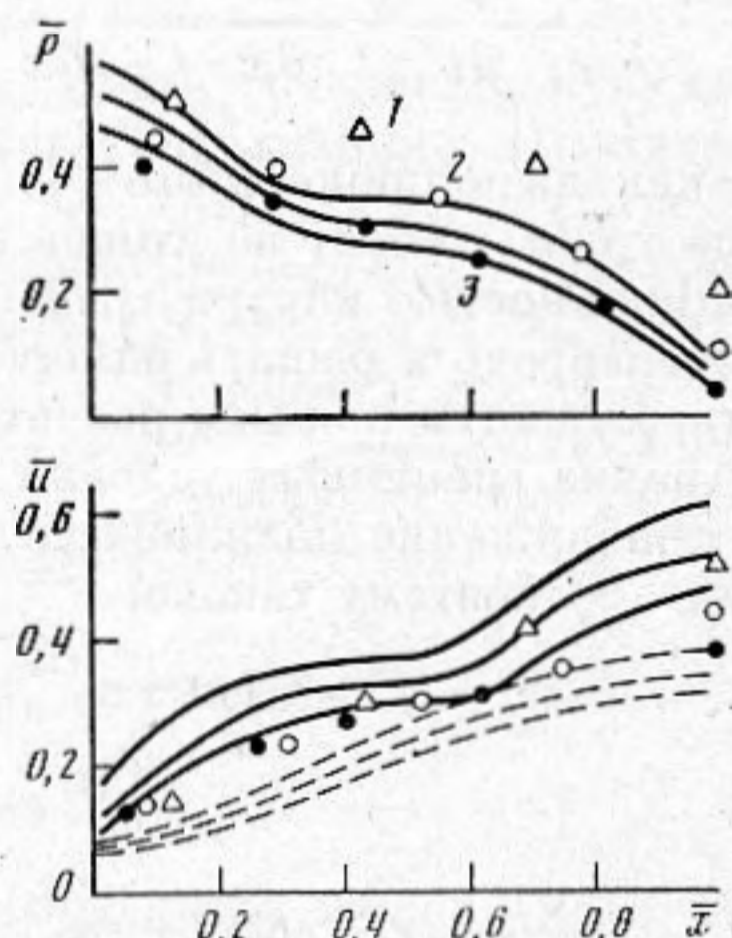
Фиг. 1. Распределение безразмерных максимальных значений гармоник давления по длине трубы. Сплошные линии — теория, точки — эксперимент: 1 — первая гармоника, 2 — вторая, 3 — третья; а — $L=3,5$ м, б — 4,5; в — 5,5 м: $\bar{x}=x/L$

Фиг. 2. Зависимость безразмерного избыточного давления от времени за период колебаний T на различных участках трубы. Сплошные линии — теория, пунктирные — экспериментальные осциллограммы: а — $\bar{x}=0,5$ м; б — 1,5; в — 2,5; г — 3,5 м; $L=4,5$ м

Фиг. 3. Эпюры безразмерных давления и скорости для различных длин труб. Сплошные линии — теория, точки — эксперимент, пунктирные линии + эпюры скорости, рассчитанные по [1]; 1 — $L=3,5$ м; 2 — 4,5; 3 — 5,5 м



Фиг. 2



Фиг. 3

перимента (для измерения давления составляющей 13,7%). Как видно, теоретические результаты согласуются с экспериментальными.

На фиг. 2 построены рассчитанные по (4), (6) зависимости избыточного давления от времени за период колебаний на различных участках трубы и осциллограммы давления, полученные экспериментально. Очевидно, что теория хорошо описывает изменение формы колебаний вдоль длины трубы.

На фиг. 3 показаны эпюры скорости и давления для различных длин труб по (4), (6) и полученные экспериментально. Здесь же для сравнения нанесена пунктирной линией эпюра скорости, соответствующая акустическому приближению [1]. Полученные эпюры в отличие от [1] имеют характерный прогиб, наблюдаемый и в эксперименте (для давления при $\bar{x} \approx 0,3$, для скорости $\bar{x} \approx 0,6$), за счет вклада второй и третьей гармоник.

Таким образом, предлагаемая теория колебаний газа большой амплитуды в трубе с открытым концом позволяет рассчитывать вклад каждой гармонической составляющей колебания, соотношение между ними на различных участках трубы и, по сравнению с акустическим приближением [1], лучше описывает форму колебаний и эпюры скорости и давления внутри трубы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Халимов Г. Г. Теория термических автоколебаний. Казань: Изд-во КГУ, 1982. 156 с.
2. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Халимов Г. Г. Нелинейные колебания газа в полукоткрытой трубе // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 5. С. 617-623.
3. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Халимов Г. Г. Термоакустический эффект в резонансной полукоткрытой трубе // Инж.-физ. журн. 1982. Т. 43. № 4. С. 615-623.
4. Sturtevant B. B. Nonlinear gas oscillations in pipes. Experiment // JFM. 1974. V. 63. Pt 2. P. 97-120.
5. Ingard U., Ising H. Acoustic nonlinearity of an orifice // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 42. № 1. P. 61-7.
6. Hersch A. S., Rogers T. Fluid mechanical model of the acoustic impedance of small orifices // AIAA Pap. 1975. V. 495. P. 1-10.
7. Галиуллин Р. Г., Халимов Г. Г. Исследование нелинейных колебаний газа в открытых трубах // Инж.-физ., журн. 1979. Т. 37. № 6. С. 1043-1050.

Казанский государственный
университет им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступила в редакцию
23.IX.1986