

УДК 534.232

ЗВУКОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПРИ ОКОЛОЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ И ВОЛНА МАХА ДВУМЕРНОГО ТЕПЛООВОГО ИСТОЧНИКА

Коломенский А. А.

Рассмотрено нарастание звуковых возмущений при перемещении пучка электромагнитного или проникающего излучения в слабопоглощающей среде. Исследованы околозвуковой и сверхзвуковой режимы.

Сканирование пучка проникающего излучения в слабопоглощающей среде приводит к задаче о звуковых возмущениях, создаваемых двумерным тепловым источником. Рассмотрение стационарных звуковых возмущений от подобного источника, реализуемого при поступательном перемещении лазерного пучка в воздухе со скоростью V , большей скорости звука в среде c , проведено в работе [1]. При $V \rightarrow c$ в рамках использованного линейного приближения получена корневая расходимость амплитуды стационарных звуковых возмущений. На практике проникающее излучение часто имеет импульсный характер. При этом даже в рамках линейного расчета не возникает расходимости при $V \rightarrow c$, хотя и в этом случае околозвуковое сканирование соответствует наибольшим амплитудам возбуждаемого звука.

В данной работе рассчитан звуковой импульс, возбуждаемый при конечной длительности действия двумерного источника, движущегося со скоростью звука (аналогичная задача для околозвукового движения трехмерного источника рассмотрена в работе [2]). Исследовано также сверхзвуковое перемещение источника, при котором возбуждается волна Маха, имеющая в двумерном случае по сравнению с трехмерным [3, 4] ряд существенных отличий.

Пусть плотность мощности тепловых источников в среде описывается выражением

$$Q(\mathbf{r}, t) = Q_0 f(t) g(x - Vt, y), \quad \mathbf{r} = \{x, y\}, \quad (1)$$

$$f(t) = \theta(t - t_1) - \theta(t - t_2), \quad g(\mathbf{r}) = \exp(-r^2/a^2),$$

т. е. предполагается, что источник включается в момент времени t_1 и выключается в момент t_2 (это описывается разностью двух ступенчатых θ -функций). Кроме того, распределение тепловыделения по сечению пучка предполагается гауссовым, причем это распределение перемещается в среде вдоль оси x со скоростью V .

Исходим из уравнения для возмущений давления, которое обычно используется в оптико-акустических задачах (см., например, [5]):

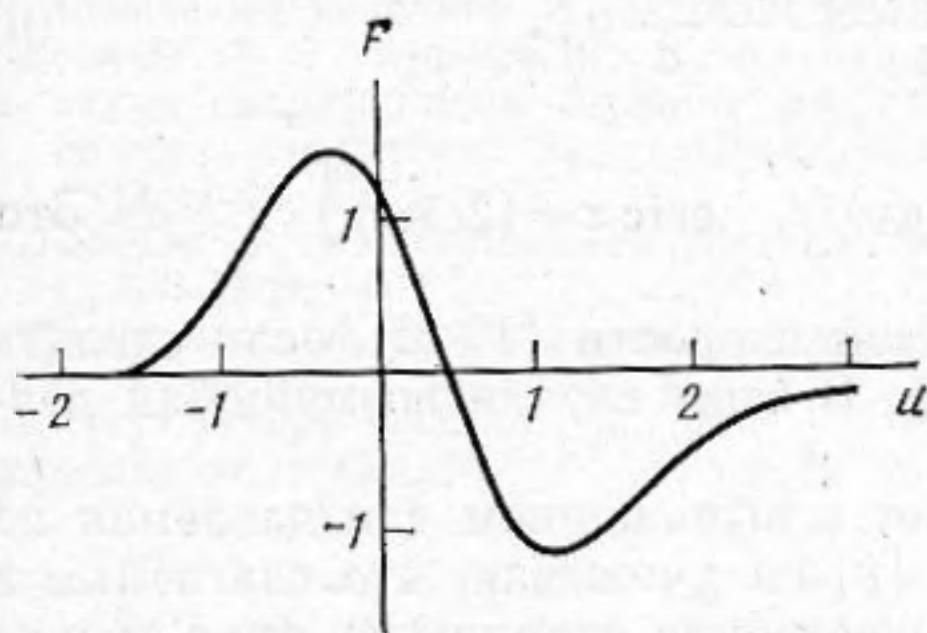
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\alpha}{c_p} \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (2)$$

где c — скорость звука, α — коэффициент теплового расширения, c_p — теплоемкость среды, предполагаемой одномерной и изотропной. Функция Грина уравнения (2) имеет вид [6]

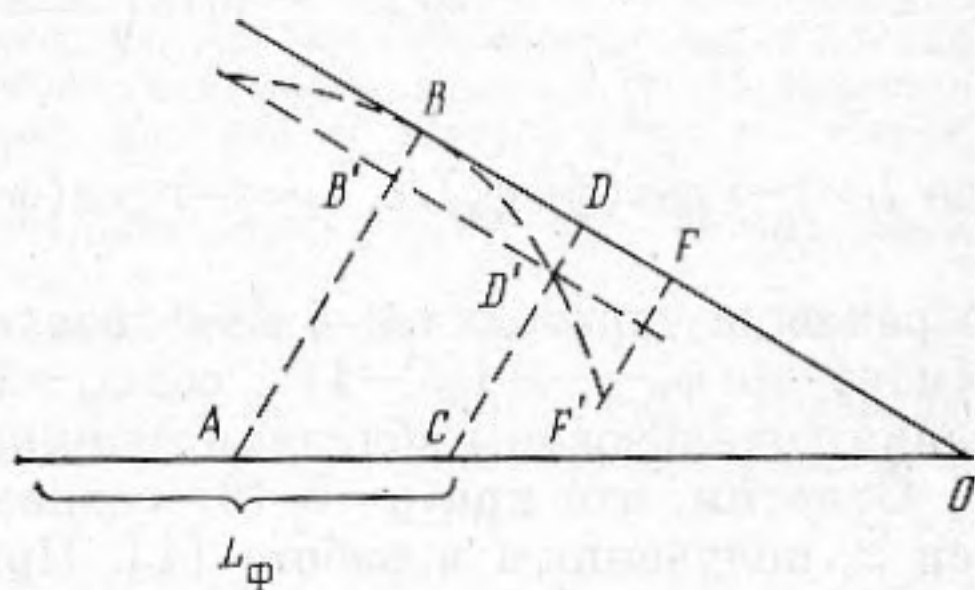
$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c\theta(ct - r)}{2\pi(c^2t^2 - r^2)^{1/2}}, \quad (3)$$

а решение представляет собой свертку этой функции с правой частью уравнения (2). Импульсы включения и выключения не связанные с движением источника при длительном его действии сравнительно малы [3] и здесь не рассматриваются.

Допустим сначала, что $V=c$ и $t_1 \leq t \leq t_2$. Рассмотрим нарастание звуковых возмущений непосредственно в области локализации источника, перемещающейся вместе с ним. Для нахождения решения применим метод вычисления аналогичной свертки, использованный в работе [3]. Пусть интегралы в свертке берутся по временной переменной τ и пространственным переменным ξ и η (соответствующим x и y), которые служат аргументами функции Грина под интегралом. Учтем, что существенный вклад в свертку дает только область в пространстве интегрирования, локализованная вблизи источника: $|x-ct+c\tau-\xi| \leq a$, $|y-\eta| \leq a$. При прохождении источником пути, значительно превосходящего его собственные размеры, $c(t-t_1) \gg a$, можно положить $[(c\tau-\rho)(c\tau+\rho)]^{1/2} \approx [2c\tau(c\tau-\xi)]^{1/2}$, где $\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$. Это соответствует пренебрежению кривизной фронтов звуко-



Фиг. 1. Форма околосвукового импульса, u — нормированное время приема



Фиг. 2. Схема формирования волны Маха

вых возмущений, созданных источником в предшествующие моменты времени и дающих основной вклад, и рассмотрению только возмущений, локализованных вблизи источника и бегущих вместе с ним в положительном направлении оси x .

При сделанных предположениях для звукового импульса находим

$$p(x, y=0, t) = \frac{\alpha Q_0 c}{c_p} \left(\frac{ca}{2\pi} \right)^{1/2} F \left(\frac{ct-x}{a} \right) h(t),$$

$$F(u) = e^{-u^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2u)^n}{n!} \left[\Gamma \left(\frac{n}{2} + \frac{3}{4} \right) - u \Gamma \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) \right], \quad (4)$$

где функция $h(t) = (t-t_1)^{1/2}$ описывает нарастание амплитуды импульса, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция. Форма импульса, описываемая функцией $F(u)$, показана на фиг. 1.

При $t > t_2$, т. е. для импульса, распространяющегося после выключения источника, получаем выражение, аналогичное (4), но с функцией $h(t) = (t-t_1)^{1/2} - (t-t_2)^{1/2}$. Отсюда следует, что при регистрации импульса на расстояниях, много больших длины траектории, $R_1 = c(t-t_1) \gg L = c(t_2-t_1)$, амплитуда импульса пропорциональна $L/2R_1^{1/2}c^{1/2}$.

Исследуем теперь возбуждение звука при $V \neq c$. Исходим из уравнения (2), в котором совершим преобразование Фурье по времени. Нас интересует собственное поле источника, которое представляет собой вынужденное решение. С учетом того, что решение при $|y| \rightarrow \infty$ должно быть ограничено и, кроме того, при $y \rightarrow \infty$ должна распространяться только волна, бегущая в положительном направлении оси y , а при $y \rightarrow -\infty$ — только волна, бегущая в отрицательном направлении этой оси, для ω -компоненты давления находим

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\beta \sin \varphi_M} e^{-ik_x x} \left[e^{ik_y y} \left(\int_y^{\infty} d\eta e^{-ik_y \eta} \bar{D}(k_x, \eta) \right) + e^{-ik_y y} \left(\int_{-\infty}^y d\eta e^{ik_y \eta} \bar{D}(k_x, \eta) \right) \right], \quad (5)$$

где при $\beta = v/c > 1$: $k_y = k \sin \varphi_M$, $k_x = k \cos \varphi_M$, $k = \omega/c$, $\varphi_M = \arccos(1/\beta)$ — угол Маха; при $\beta < 1$:

$$k_x = \omega/V, \quad k_y = -i(\omega/c)(1/\beta^2 - 1)^{1/2}, \quad \bar{D}(k_x, y) = (2\pi)^{-1} \int D(x, y) \times \\ \times \exp(ik_x x) dx, \quad D(\mathbf{r}) = (\alpha Q_0/c_p) g(\mathbf{r}).$$

Учтем теперь, что поперечное распределение пучка гауссово (см. (1)). Тогда интегрируя спектральное представление (5) по частотам, получаем в сверхзвуковом режиме

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{\pi} a c \alpha Q_0}{4c_p \beta \sin \varphi_M} \left[e^{-\frac{t_1^2 c^2}{a^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{V t_1 \sin \varphi_M}{a} + \frac{\beta}{a} y \right) + \right. \\ \left. + e^{-\frac{t_2^2 c^2}{a^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{V t_2 \sin \varphi_M}{a} - \frac{\beta}{a} y \right) \right], \quad (6)$$

где $t_1 = t - r \cos(\varphi - \varphi_M)/c$, $t_2 = t - r \cos(\varphi + \varphi_M)/c$, $\operatorname{erfc} x = (2/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^x e^{-\chi^2} d\chi$. Это

выражение справедливо и при дозвуковой скорости ($V < c$), если сделать замену $\sin \varphi_M \rightarrow -i(1/\beta^2 - 1)^{1/2}$, $\cos \varphi_M \rightarrow 1/\beta$. В этом случае возмущения давления локализованы вблизи источника.

Отметим, что при $y=0$ (6) совпадает с выражением для давления на оси x , полученным в работе [1]. При $|y| \gg a$ учитывая, что слагаемые в квадратных скобках выражения (6) существенно отличны от нуля только при $|t_{1,2}| \lesssim a/c$, нетрудно видеть, что одна из функций erfc примерно равна 2, при этом другая — экспоненциально мала. В таком случае для волны Маха в удаленных от оси x точках наблюдения имеем

$$p(x, y \geq 0, t) = \frac{\sqrt{\pi} a c \alpha Q_0}{2c_p \beta \sin \varphi_M} e^{-\frac{c^2 t_{1,2}^2}{a^2}}. \quad (7)$$

Особенность волны Маха для двумерного источника состоит в том, что амплитуда постоянна вдоль фронта волны при удалении от оси x , тогда как для трехмерного источника [4] имеется корневое убывание амплитуды.

Рассмотрим подробнее формирование волны Маха (см. фиг. 2). Положению источника на рисунке соответствует точка O . С каждого участка траектории A единичной длины идут цилиндрически расходящиеся звуковые возмущения с амплитудой $p_0/(aR)^{1/2}$, где $R=AB$, $p_0 = \rho c^2 \alpha \Delta T$, $\Delta T = aQ_0/\rho c_p V$ — характерный нагрев при прохождении источника. В участок фронта волны Маха вблизи точки B дает вклад, формирующий участок траектории L_ϕ , с которого звуковые возмущения приходят с пространственным рассогласованием, меньшим a . Учитывая, что длина формирующего участка траектории для точек фронта B и D примерно одинакова, а отрезок BD определяется точкой пересечения цилиндрического фронта, идущего из точки A с внутренним фронтом волны Маха (отстоящим от внешнего на величину порядка a), находим $L_\phi = 2AC = 2BD/\sin \varphi_M \approx \approx 2(2Ra)^{1/2}/\sin \varphi_M$. Таким образом, для амплитуды волны Маха находим $p_M \approx L_\phi p_0/(aR)^{1/2} = 2\sqrt{2} c a \alpha Q_0/c_p \beta \sin \varphi_M$, что с точностью до численного множителя совпадает с амплитудой, даваемой (7).

Предположим теперь, что источник начал действовать в точке A в момент времени t_1 , тогда $R=AB=c(t-t_1)$. Нетрудно видеть, что точкам фронта волны Маха на отрезке BD соответствует формирующий участок траектории, меньший $2AC$ и, следовательно, волна Маха здесь из-за близости края траектории не будет полностью сформировавшейся. В то же время для любой точки фронта F , такой что $FF' \gg a$, ограниченность траектории на волну Маха не сказывается. Следовательно, длину участка фронта сформировавшейся волны Маха можно положить равной $OD = R \operatorname{tg} \varphi_M - BD = R[(\beta^2 - 1)^{1/2} - (2a/R)^{1/2}]$. Отсюда видно, что при $\beta \rightarrow 1$ длина $OD \rightarrow 0$ даже при $R \gg a$, т. е. при скоростях, близких к скорости звука, волна формируется на всей траектории (околозвуковой режим). Учитывая

также результаты, полученные в работе [2] для случая $\beta < 1$, в качестве критерия реализации околосвукового режима получаем условие $|\beta - 1|^{1/2} \ll \ll a/R$, которое соответствует неравенству $OD \ll a$.

Автор благодарен Г. А. Аскарьяну и Ф. В. Бункину за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоконь В. А., Руденко О. В., Хохлов Р. В. Аэродинамические явления при сверхзвуковом обтекании лазерного луча // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 4. С. 632–634.
2. Божков А. И., Бункин Ф. В., Коломенский Ал. А. Звуковые возмущения в среде при ограниченном движении теплового источника со скоростью звука // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 1. С. 35–40.
3. Коломенский Ал. А. Излучение звука оптико-акустическим источником, движущимся по конечной траектории // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 4. С. 547–555.
4. Божков А. В., Бункин Ф. В., Коломенский Ал. А. Термооптическое возбуждение звука сканирующим пучком импульсного излучения лазера // Тр. II Всесоюз. симпоз. по физике акустико-гидродинам. явлений и оптоакустике. М.: Наука, 1982. С. 40–43.
5. Лямшев Л. М. Оптико-акустические источники звука // УФН. 1981. Т. 135. № 4. С. 637–669.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

Институт общей физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7.VIII.1986