АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 5

УДК 534

ФРЕНЕЛЕВСКИЕ ТЕНЗОРЫ ОТРАЖЕНИЯ И ПРОПУСКАНИЯ АКУСТИЧЕСКИ-АНИЗОТРОПНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕД

Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Лавриненко А. В.

Бескоординатным методом получена система дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая распространение акустических полей в неоднородных анизотропных плоскослоистых средах. Построены френелевские операторы отражения и пропускания для таких сред. Предложено обобщение метода пересчета входного импеданса в тензорной кристаллоакустике.

При изучении различных вопросов распространения, отражения и преломления акустических полей широко используется понятие импеданса [1—3]. Векторная природа волн смещения в анизотропных средах приводит к тому, что акустический импеданс в них становится тензорным [4—8], а соответственно тензорными должны стать и коэффициенты отражения и пропускания упругих волн, выражающиеся через импедансы. В работах [7, 8] получены общие формулы для френелевских тензоров отражения и пропускания при нормальном падении на стратифицированные анизотропные среды. В этом случае тензоры характеристического и поверхностного импедансов совпадают. В данной работе с помощью обобщенных тензоров поверхностного импеданса [4—6] строятся френелевские тензоры отражения и пропускания для наклонного падения упругих волн на слоистые анизотропные структуры.

Рассмотрим систему, состоящую из дискретного набора анизотропных слоев, на границах которых плотности $\rho(z)$ и тензоры модулей упругости $c(z)$ изменяются скачком, а в пределах каждого слоя являются непрерывными функциями переменной $z=\mathbf{qr}$, где $\mathbf{r}$ радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{q}$ — единичный вещественный вектор нормали к слоям.

Уравнение движения упругой среды имеет вид:

$$\rho\mathbf{u}=\nabla\sigma, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ — вектор смещения, $\ddot{\mathbf{u}}=\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2$, σ — тензор напряжений, $\nabla=\partial/\partial\mathbf{r}$ — оператор Гамильтона. В декартовых координатах x_1, x_2, x_3 уравнение движения (1) перепишется следующим образом $\rho\ddot{u}_i=\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$, $i, j=1, 2, 3$. Мы пользуемся здесь в основном бескоординатной формой записи, поскольку тензоры являются прямыми геометрическими объектами, а с точки зрения алгебры являются примерами операторов матричного типа. (см. [9]). С учетом закона Гука для анизотропных сред $\sigma_{ij}=c_{ijkl}\partial u_l/\partial x_k$, уравнение (1) преобразуется к следующему виду

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}=L\mathbf{u}, \quad L=\nabla(c\nabla), \quad L_{il}=\frac{\partial}{\partial x_j}c_{ijkl}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Так как мы не накладываем никаких ограничений по симметрии на тензор модулей упругости c_{ijkl}, за исключением симметрии по двум последним индексам, следующий из симметричности тензора деформаций $u_{ij}={}^1/_2(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)$, то изложенный подход справедлив для широкого набора сред, включая вязкие среды (c_{ijkl} — комплексный) [7], среды с акустической активностью [10] и с акустическим эффектом Фарадея [11].

Пусть на плоскослоистую систему наклонно падает упругая монохроматическая волна $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)=\mathbf{u}_0\exp[i\omega(\mathbf{mr}-t)]$, где ω — частота, $\mathbf{m}$ — вектор рефракции [9]. При жестком контакте между слоями в них возникает

преломленная волна вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\ t)=\mathbf{u}(z)\exp\left[i\omega(\mathbf{br}-t)\right], \tag{2}$$

где $\mathbf{b}=I\mathbf{m}$ — тангенциальная (относительно границы раздела) составляющая вектора рефракции $\mathbf{m}$, $I=1-\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}=-\mathbf{q}^{\times 2}$ — проективный оператор границы раздела, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}$ диада (кронекеровское произведение двух векторов), а $\mathbf{q}^{\times}$ антисимметричный тензор, дуальный вектору $\mathbf{q}$ [9]. Для волн типа (2) оператор ∇ сводится к оператору $i\omega\mathbf{b}+\mathbf{q}d/dz$, а $\ddot{\mathbf{u}}=-\omega^2\mathbf{u}$. Поэтому вместо уравнения (1) для указанных полей можно записать

$$-\rho\omega^2\mathbf{u}=i\omega\sigma\mathbf{b}+d\mathbf{f}/dz, \tag{3}$$

где $\mathbf{f}=\sigma\mathbf{q}$ — нормальная сила, действующая на границу раздела. С другой стороны, используя закон Гука, векторы $\mathbf{f}$ и $\sigma\mathbf{b}$ можно выразить так $\mathbf{f}=Y\mathbf{u}$, $\sigma\mathbf{b}=Z\mathbf{u}$, $Y=\mathbf{q}c^{\nabla}$, $Z=\mathbf{b}c^{\nabla}$, где Y и Z дифференциальные операторы с компонентами

$$Y_{ij}=q_k c_{iklj}\frac{\partial}{\partial x_l},\qquad Z_{ij}=b_k c_{iklj}\frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Для преломленных акустических полей вида (2) отсюда следует

$$\mathbf{f}=i\omega C\mathbf{u}+Q\frac{d\mathbf{u}}{dz},\qquad \sigma\mathbf{b}=i\omega B\mathbf{u}+S\frac{d\mathbf{u}}{dz}, \tag{4}$$

где $B_{ij}=b_k c_{iklj}b_l$, $Q_{ij}=q_k c_{iklj}q_l$, $C_{ij}=q_k c_{iklj}b_l$, $S_{ij}=b_k c_{iklj}q_l$. Несложно показать, что уравнения (3), (4) преобразуются к следующей системе уравнений

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{f}\end{pmatrix}=iM\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{f}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где M блочная матрица:

$$M=\begin{pmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{pmatrix},\ M_{11}=-\omega Q^{-1}C,\ M_{12}=-iQ^{-1},\ M_{21}=i\omega^2(\rho+SQ^{-1}C-B),$$

$$M_{22}=-\omega SQ^{-1}. \tag{6}$$

В случае нормального падения ($\mathbf{b}=0$, $B=C=S=0$) матрица M (6) переходит в соответствующую матрицу из работы [12], а из системы (5) получаем следующее волновое уравнение для неоднородных сред

$$\frac{d}{dz}\left(Q\frac{d\mathbf{u}}{dz}\right)+\rho\omega^2\mathbf{u}=0.$$

Общее фундаментальное решение уравнений типа (5) выражается через мультипликативный интеграл [13]. В нашем случае имеем

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}(z)\\ \mathbf{f}(z)\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\mathbf{u}(z_0)\\ \mathbf{f}(z_0)\end{pmatrix},\ P=\hat{\int}_{z_0}^{z}(E+iM(\xi)\,d\xi), \tag{7}$$

где $\mathbf{u}(z_0)$, $\mathbf{f}(z_0)$ некоторые постоянные векторы, задающие начальное состояние акустического поля в точке $z=z_0$, E — единичная матрица 6×6, а мультипликативный интеграл P представляет собой характеристическую матрицу плоскослоистой анизотропной системы, связывающую значения полей на первой и последней границах системы. Матрица P называется матрицантом или интегральной экспонентой системы уравнений (5). Свойства операторов подобных P рассмотрены в [14]. Для однородной среды мультипликативный интеграл P сводится к экспоненциальному оператору $\exp(iMl)$, где $l=z-z_0$.

Задачи распространения упругих волн в плоскослоистых средах рассматривались в работах [4, 7, 15—17]. В [15, 17] получены матрицы передачи изотропных и трансверсально-изотропных стратифицированных структур. Произвольные анизотропные структуры изучались в [4, 7, 16], причем в работе [4] получена система уравнений, подобная системе (5), однако, слои при этом считались однородными.

При вычислениях интервала P (7) приходится иметь дело с матрицами порядка 6×6. Можно уменьшить размерность вычисляемых матриц, если использовать тензор импеданса. Тензор поверхностного импеданса γ связывает вектор смещений и вектор нормальной силы на некоторой поверхности (в нашем случае это плоскости границ раздела слоев) на определенной частоте ω [4, 7] $\mathbf{f}=i\omega\gamma\mathbf{u}$. Подставляя эту связь в систему уравнений (5) получаем

$$\frac{1}{i\omega}\frac{d\gamma}{dz}+\gamma Q^{-1}\gamma-\gamma Q^{-1}C+SQ^{-1}\gamma+B-SQ^{-1}C-\rho=0, \tag{8}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dz}=i\omega N\mathbf{u}, \quad N=Q^{-1}(\gamma-C). \tag{9}$$

Для нахождения тензоров импеданса γ, удовлетворяющих тензорному уравнению Риккати (8) [5] обычно пользуются численным пересчетом (прогонкой) импеданса из начальной точки z_0 в конечную z [18, 19].

Общим фундаментальным решением уравнения (9), подобно (7), является мультипликативный интеграл

$$\mathbf{u}(z)=P_u(z, z_0)\,\mathbf{u}(z_0),\ P_u(z, z_0)=\int\limits_{z_0}^{z}(1+i\omega N(\xi)\,d\xi), \tag{10}$$

где 1 трехмерная единичная матрица. Используя свойства мультипликативного интеграла [13], можно показать, что матрицант P (7) уравнения (5) выражается следующим образом

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_u^1 & 0\\ 0 & P_u^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix},$$

где γ_1, γ_2 решения уравнения Риккати (8), а P_u^1, P_u^2 соответствующие им мультипликативные интегралы (10). Аналогичная форма представления матрицанта P для оптических задач дана в работе [14].

Применим полученные решения к системе, состоящей из $N-1$ неоднородных слоев, в пределах каждого из которых плотность ρ, тензор модулей упругости c, а следовательно, и матрица M (6) являются непрерывными функциями переменной z. Характеристическая матрица P (7) позволяет найти френелевские тензорные коэффициенты отражения и пропускания анизотропной слоистой структуры при наклонном падении упругих волн. Пусть на систему с обеих сторон падают волны $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_N'$ с одинаковой зависимостью от тангенциальной составляющей радиуса-вектора $I\mathbf{r}=\mathbf{r}-(\mathbf{qr})\mathbf{q}$, даваемой множителем $\exp(i\omega\mathbf{br})$. При этом акустические поля во всех слоях описываются функциями вида (2). Считаем тензоры импедансов падающих $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_N'$ и отраженных $\mathbf{u}_0'$, $\mathbf{u}_N$ волн заданными и равными γ_0, γ_N', γ_0', γ_N, соответственно. В частном случае, когда система анизотропных слоев окружена изотропной средой, эти тензоры импедансов задаются формулой

$$\gamma_0=\gamma_N=-\gamma_N'=-\gamma_0'=a\eta_1\tau_a+\left(\frac{1}{b^2+\eta_0\eta_1}-2a\right)a^x+\frac{1}{b^2+\eta_0\eta_1}(\eta_1\tau_q+\eta_0\tau_b),$$

где $\tau_a=\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{a}_0$, $\tau_b=\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{b}_0$, $\tau_q=\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}$, $b=|\mathbf{b}|$, $\mathbf{b}_0=\mathbf{b}/b$, $\mathbf{a}_0=\mathbf{a}/b$, $\mathbf{a}=[\mathbf{bq}]$, $a=(c_{11}-c_{12})/2$ — коэффициент Ламе [9], $\eta_{0,1}=\mathbf{qm}_{0,1}$, $\mathbf{m}_{0,1}$ — векторы рефракции продольной и поперечной волн, соответственно. Если же система находится в акустической среде плотности ρ_0, тогда $\gamma_0=\gamma_N=-\gamma_0'=-\gamma_N'=\rho_0 v_0/\cos\theta$ [1], где θ — угол падения, v_0 — скорость звука в данной среде. Так как векторы смещения и нормальной силы непрерывны на границах раздела [9], то можно записать

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_N(z_{N-1})+\mathbf{u}_N'(z_{N-1})\\ \mathbf{f}_N(z_{N-1})+\mathbf{f}_N'(z_{N-1})\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\mathbf{u}_0(z_0)+\mathbf{u}_0'(z_0)\\ \mathbf{f}_0(z_0)+\mathbf{f}_0'(z_0)\end{pmatrix}, \tag{11}$$

где P характеристическая матрица слоистой структуры (7), а падающие и отраженные волны связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N(z_{N-1}) &= D\mathbf{u}_0(z_0) + R'\mathbf{u}_N'(z_{N-1}), \\ \mathbf{u}_0'(z_0) &= R\mathbf{u}_0(z_0) + D'\mathbf{u}_N'(z_{N-1}). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь R и D (R' и D') — френелевские тензоры отражения и пропускания для волны $\mathbf{u}_0(\mathbf{u}_N')$, наклонно падающей на систему слоев из области $z<z_0$ ($z>z_{N-1}$). Используя тензоры импедансов γ_0, γ_0', γ_N, γ_N' из соотношений (11), (12) нетрудно найти операторы отражения и пропускания R, R', D, D':

$$\begin{aligned} R &= \left[(-i\omega\gamma_N, 1)P\begin{pmatrix}1\\ i\omega\gamma_0'\end{pmatrix}\right]^{-1}\left[(i\omega\gamma_N, -1)P\begin{pmatrix}1\\ i\omega\gamma_0\end{pmatrix}\right], \\ D &= i\omega\left[(-i\omega\gamma_0', 1)P^{-1}\begin{pmatrix}1\\ i\omega\gamma_N\end{pmatrix}\right]^{-1}(\gamma_0-\gamma_0'), \\ R' &= \left[(-i\omega\gamma_0', 1)P^{-1}\begin{pmatrix}1\\ i\omega\gamma_N\end{pmatrix}\right]^{-1}\left[(i\omega\gamma_0', -1)P^{-1}\begin{pmatrix}1\\ i\omega\gamma_N'\end{pmatrix}\right], \\ D' &= i\omega\left[(i\omega\gamma_N, -1)P\begin{pmatrix}1\\ i\omega\gamma_0'\end{pmatrix}\right]^{-1}(\gamma_N-\gamma_N'). \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь в квадратных скобках подразумевается умножение характеристической матрицы P (или обратной ей матрицы P^{-1}) на блочные матрицу-строку слева от P и матрицу-столбец справа от P, $P^{-1}=\overset{z_0}{\underset{z_{N-2}}{\hat{\hat{\int}}}}(E+iM(\xi)\,d\xi)$.

Частный случай, когда падает одна волна, например $\mathbf{u}_0$, получается из общих формул (12), (13) при $\mathbf{u}_N'(z_{N-1})=0$.

В случае нормального падения упругих волн на однородную или слабоанизотропную стратифицированную среду для решения задачи отражения можно воспользоваться методом пересчета входного импеданса, подробно рассмотренного для изотропных сред в монографии [1]. В работе [20] этот метод был обобщен для входных тензорных импедансов в оптически анизотропных средах.

Рассмотрим вначале однородный анизотропный акустический слой 2, находящийся между анизотропными полупространствами. Из верхнего полупространства 3 на слой падает упругая волна

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)=\mathbf{u}_0\exp\left[i(Kz-\omega t)\right], \tag{14}$$

где $K=\omega\rho\gamma^{-1}$ тензор волновых чисел [21]. Волна (14) представляет собой суперпозицию трех изонормальных волн, волновые числа которых являются собственными значениями тензора K и удовлетворяют одномерному волновому уравнению кристаллоакустики [12].

В слое 2 установившуюся в результате многократных отражений результирующую упругую волну можно представить в виде суперпозиции двух бегущих суммарных волн вида (14), распространяющихся в противоположных направлениях: $\mathbf{u}_2=\exp(iK_2z)\mathbf{u}_2^+ + \exp(-iK_2z)\mathbf{u}_2^-$. Здесь и далее множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается. На границе слоя 2 и полупространства 1 ($z=0$) непрерывность полных смещения и нормальной силы дает

$$\gamma_1(\mathbf{u}_2^+ + \mathbf{u}_2^-)=\gamma_2(\mathbf{u}_2^+ - \mathbf{u}_2^-), \tag{15}$$

где γ_1, γ_2 тензорные импедансы волн вида (14) [7] в полупространстве и в слое, соответственно. Здесь учтен тот факт, что тензоры импеданса падающей и отраженной волн отличаются знаком. На верхней границе слоя ($z=-l_2$, ось z направлена вниз), разделяющей среды 2 и 3 можно записать $\gamma_2[\exp(-iK_2l_2)\mathbf{u}_2^+ - \exp(iK_2l_2)\mathbf{u}_2^-]=\gamma_{\text{вх}}[\exp(-iK_2l_2)\mathbf{u}_2^+ + \exp(iK_2l_2)\mathbf{u}_2^-]$. Откуда с учетом (15) получаем следующее выражение

для входного импеданса $\gamma_{вх}$ анизотропного слоя

$$\gamma_{вх}=\gamma_2[\exp(-iK_2l_2)-\exp(iK_2l_2)(\gamma_2+\gamma_1)^{-1}(\gamma_2-\gamma_1)][\exp(-iK_2l_2)+ \\ +\exp(iK_2l_2)(\gamma_2+\gamma_1)^{-1}(\gamma_2-\gamma_1)]^{-1}. \quad (16)$$

Сшивая акустические поля на границе $z=-l_2$ между слоем 2 и верхним полупространством 3, для тензора отражения R ($\mathbf{u}_3=R\mathbf{u}$) имеем

$$R=(\gamma_3+\gamma_{вх})^{-1}(\gamma_3-\gamma_{вх}), \quad (17)$$

где γ_3 импеданс волны (14) в среде 3, а $\gamma_{вх}$ дается формулой (16). Если у нас имеется многослойная структура, состоящая из N слоев, то ее входной импеданс $\gamma_{вх}^N$ можно получить последовательным пересчетом импедансов по формуле (16), а именно

$$\gamma_{вх}^N=\gamma_N[\exp(-iK_Nl_N)-\exp(iK_Nl_N)(\gamma_N+\gamma_{вх}^{N-1})^{-1}(\gamma_N-\gamma_{вх}^{N-1})]\times \\ \times[\exp(-iK_Nl_N)+\exp(iK_Nl_N)(\gamma_N+\gamma_{вх}^{N-1})^{-1}(\gamma_N-\gamma_{вх}^{N-1})]^{-1}. \quad (18)$$

Тензор отражения многослойной среды (по аналогии с выражением (17) имеет вид

$$R_N=(\gamma_{N+1}+\gamma_{вх}^N)^{-1}(\gamma_{N+1}-\gamma_{вх}^N), \quad (19)$$

где γ_{N+1} импеданс волны (14) в $N+1$ среде, ограничивающей структуру сверху. Выражение для входного импеданса (18) существенно упрощается, если тензоры импеданса γ_i, $i=0, 1, \ldots, N+1$ всех слоев коммутируют между собой

$$\gamma_{вх}^N=[\gamma_{вх}^{N-1}-i\gamma_N\operatorname{tg}(K_Nl_N)][\gamma_N-i\gamma_{вх}^{N-1}\operatorname{tg}(K_Nl_N)]^{-1}\gamma_N.$$

Отметим, что метод пересчета импедансов можно использовать и при косом падении упругих волн на систему вязких слоев. В этом случае применимы сторонние импедансные условия Леонтовича и тензоры поверхностных импедансов, удовлетворяющие уравнению (8) заменяются на тензоры внутреннего импеданса вязких сред, рассмотренные в работе [8].

Важно иметь в виду, что тензоры R (17) и R_N (19) представляют некоторое дробно-линейное преобразование, точнее преобразование Кэли [22] тензора относительного импеданса. Скалярные относительные импедансы использовались, например, в [2]. Для плоской границы раздела двух анизотропных сред имеем

$$\Gamma=\gamma_2^{-1}\gamma_1, \quad (20)$$

где Γ — тензор относительного импеданса при падении волны из среды с тензором внутреннего импеданса γ_2 на границу со средой 1, в которой тензор импеданса волны равен γ_1.

Тензор отражения рассматриваемой структуры теперь с учетом (20) представляется в виде $R=(\gamma_2+\gamma_1)^{-1}(\gamma_2-\gamma_1)=(1+\Gamma)^{-1}(1-\Gamma)=\exp(iT)$. Легко проверить, что равенство $(1+\Gamma)^{-1}(1-\Gamma)=\exp(iT)$ удовлетворяется тождественно при тензоре $T=2\operatorname{arctg}(i\Gamma)$. Здесь $\operatorname{arctg}(i\Gamma)$ представляет операторозначную функцию [22]. Теперь, подставляя соотношение (20) в (18) и применяя еще раз преобразование Кэли, получаем

$$\gamma_{вх}^N=\gamma_N\exp(-iK_Nl_N)\exp(i\Phi_N)\exp(iK_Nl_N), \quad (21)$$

$$\exp(i\Phi_N)=[1-\exp(2iK_Nl_N)\exp(iT_{N-1})][1+\exp(2iK_Nl_N)\exp(iT_{N-1})]^{-1}. \quad (22)$$

Таким образом стратифицированная структура в результате отражения звука при нормальном падении производит преобразование Кэли тензоров относительного импеданса. Это в частности позволяет использовать в формуле (18) только экспоненциальные операторы, а также избежать неограниченного возрастания компонент тензора импедансов в определенных точках отрезка интегрирования (см. работу [19]).

Выражения (21), (22) заметно упрощаются в случае коммутации тензоров импеданса отдельных слоев:

$$\gamma_{\text{вх}}{}^{N}=\gamma_N \exp(i\Phi_N), \exp(i\Phi_N)=-i\,\mathrm{tg}\left(K_N l_N+\frac{T_{N-1}}{2}\right).$$

Рассмотрим отражение упругой волны от неоднородного анизотропного слоя с медленным изменением упругих свойств. В предположении, что в такой среде соотношение $\mathbf{f}(z)=i\omega\gamma(z)\mathbf{u}(z)$ выполняется локально, акустическое поле в слое в приближении геометрической акустики [23] запишем в следующем виде [12, 17]:

$$\mathbf{u}_2(z)=K^{-1/2}(z)\left[\exp\left(i\int_0^z K_2(\xi)\,d\xi\right)\mathbf{u}_2{}^{+}+\exp\left(-i\int_0^z K_2(\xi)\,d\xi\right)\mathbf{u}_2{}^{-}\right].$$

Экспоненциальный оператор $X=\exp\left(i\int_0^z K_2(\xi)\,d\xi\right)$ может быть представлен в виде мультипликативного интеграла: $X=\hat{\int}_0^z(1+iK_2(\xi)\,c/\xi)$. Повторяя рассуждения проведенные выше для однородного слоя, мы получаем следующее выражение для тензора входного импеданса слоя $\gamma_{\text{вх}}(-l_2)$ на верхней границе раздела

$$\gamma_{\text{вх}}(-l_2)=\gamma_2^{3/2}(-l_2)\left[\hat{\int}_0^{-l_2}(1+iK_2\,dz)-\hat{\int}_0^{-l_2}(1-iK_2\,dz)\,\gamma_2^{-1/2}(0)\,(\gamma_2(0)+\gamma_2)^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times(\gamma_2(0)-\gamma_1)\,\gamma_2^{1/2}(0)\right]\left[\hat{\int}_0^{-l_2}(1+iK_2\,dz)+\hat{\int}_0^{-l_2}(1-iK_2\,dz)\,\gamma_2^{-1/2}(0)\,(\gamma_2(0)+\gamma_1)^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times(\gamma_2(0)-\gamma_1)\,\gamma^{1/2}(0)\right]^{-1}\gamma_2^{-1/2}(-l_2).$$

Тензор отражения определяется по формуле (17). Тензорная функция $\gamma_2(z)$ удовлетворяет тензорному уравнению Риккати (8) которое в случае нормального падения ($\mathbf{b}=0$, $B=C=S=0$) принимает вид

$$\frac{1}{i\omega}\frac{d\gamma}{dz}+\frac{1}{\rho}\gamma\Lambda^{-1}\gamma-\rho=0, \tag{23}$$

где $\Lambda_{ij}=\Lambda_{ij}(z)=q_k\lambda_{iklj}(z)\,q_l$, $\lambda=\frac{1}{\rho}c$ — приведенный тензор модулей упругости 4-го ранга [9]. Для однородных сред уравнение (23) переходит в квадратичное тензорное уравнение $\gamma^2=\rho^2\Lambda$, приведенное в работе [12].

Внутренняя симметрия тензора модулей упругости, а также его зависимость от координат не конкретизировались и полученные выражения поэтому достаточно общие. Они могут быть использованы для решения обратных задач геофизики в приближении «полуторамерной» модели упругой среды [24], для нахождения и анализа дисперсионных уравнений различных акустических волноводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
3. *Мачевариани М. М., Тютекин В. В., Шкварников А. П.* Импедансный метод расчета характеристик упругих слоисто-неоднородных сред // Акуст. журн. 1971. Т. 17. № 1. С. 97–101.
4. *Ingebrigtsen K. A., Tonning A.* Elastic surface waves in crystals // Phys. Rev. 1969. V. 184. № 3. P. 942–951.
5. *Бирюков С. В.* Уравнение для поверхностного импеданса неоднородной упругой среды // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 5. С. 296–302.

6. *Тютекин В. В.* Нормальные волны твердых слоисто-неоднородных волноводов // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 3. С. 373–379.
7. *Барковский Л. М., Федоров Ф. И.* Импедансный тензор и прохождение упругих волн через плоскослоистые анизотропные среды // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 6. С. 1313–1316.
8. *Барковский Л. М., Федоров Ф. И.* Тензор импеданса в линейной акустике анизотропных вязких сред // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19. № 12. С. 1070–1078.
9. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
10. *Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979.
11. *Белый В. Н., Сердюков А. Н.* К феноменологической теории акустического эффекта Фарадея в кристаллах // ВесцI АН БССР, сер. фIз.-мат. навук. 1975. № 3. С. 102–106.
12. *Барковский Л. М., Федоров Ф. И.* Одномерное волновое уравнение кристаллоакустики и его операторное решение // ВесцI АН БССР, сер. фIз.-мат. навук. 1975. № 2. С. 34–39.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
14. *Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Лавриненко А. В.* Френелевские операторы отражения и пропускания для плоскослоистых гироанизотропных сред // ВесцI АН БССР, сер. фIз.-мат. навук. 1986. № 2. С. 79–85.
15. *Молотков Л. А.* Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984.
16. *Соляник Ф. И.* Прохождение плоских волн через слоистую среду из анизотропных материалов // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 6. С. 933–938.
17. *Richards P. G.* Elastic wave solutions in stratified media // Geophysics. 1971. V. 36. № 3. P. 798–809.
18. *Краснушкин П. Е.* Метод пересчета импеданса в задачах о волнах в упругих средах // Докл. АН СССР. 1980. Т. 269. № 2. С. 332–335.
19. *Приходько В. Ю., Тютекин В. В.* Расчеты коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 2. С. 212–218.
20. *Барковский Л. М.* Построение входных волновых импедансов слоистых анизотропных сред прямым тензорным методом // Кристаллография. 1978. Т. 23. № 6. С. 1145–1150.
21. *Барковский Л. М., Федоров Ф. И.* Принципы операторного синтеза негармонических ультразвуковых полей в кристаллах // ВесцI АН БССР, сер. фIз.-мат. навук. 1979. № 2. С. 43–48.
22. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
23. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
24. Анализ и выделение сейсмических сигналов/Под ред. Чжаня Ч. М.: Мир, 1986.

Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
13.XI.1986