АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 5

УДК 550.344.094.43

ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДИСПЕРСИОННО-ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЫ

Дунин С.З.

В работе получены выражения, позволяющие описать эволюцию сигнала в полубесконечной дисперсионно-диссипативной среде. Описан процесс формирования и распространения волнового поля, возбужденного линейным источником. Проанализирован характер искажения формы и амплитуды сигнала в процессе его распространения.

Среди многочисленных волновых мод, возбуждаемых в твердых средах, поверхностные волны (ПВ) представляют особый интерес: распространяясь вдоль поверхности, они имеют относительно слабое геометрическое расхождение. В акустоэлектронике ПВ, характеристиками которых можно управлять [1], широко исследуются в теоретических и экспериментальных аспектах. В геофизике ПВ составляют основную запись сейсмографов, и изучение этих волн дает много надежной информации как о природе источника, так и о структурных особенностях земной коры.

Представляет интерес получить точные (во временной области) решения, описывающие волновые поля, создаваемые поверхностным или заглубленным линейным или точечным источником. В случае идеально упругой линейной среды точное решение классической задачи Лэмба [2] для заглубленного линейного источника, излучающего в упругое полупространство, было получено методом Каньяра [3, 4]. В дальнейшем усовершенствованный в работе [5] метод имел широкое применение [6], однако его использование в случае дисперсионно-диссипативных сред невозможно в силу специфики метода [6] (во многих задачах учет неидеальности среды может вносить существенные коррекции в решения, меняя характер затухания и расплывания волнового пакета).

Актуальность решения задачи Лэмба для диссипативных сред очевидна: интерпретация данных об источнике излучения и структуре материала во многом определяется особенностями распространения сигнала по трассе. Неидеальность среды определяет искажения, которые возникают в структуре сигнала, воспринимаемого приемником.

В настоящей работе решена задача о распространении импульсного сигнала от заглубленного источника в полубесконечной дисперсионно-диссипативной среде. Определена структура волнового поля (ПВ) Рэлея на различных расстояниях от источника.

Пусть в однородном изотропном полупространстве $z\geqslant 0$ со свободными границами действует импульсный источник (вытянутый вдоль оси Y). Среда описывается реологическим уравнением в рамках наследственной теории упругости. Источник представляется в виде объемной силы f, которую, без потери общности, можно представить как $f=\nabla\Phi$. Смещения среды можно выразить через потенциалы

$$u\equiv(u_x, u_y, u_z)=\nabla\varphi+[\nabla\psi]=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\right), \qquad (1)$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\hat{L}\varphi_i\equiv\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}-c_i^2\int\limits_0^t M(t-u)\,\Delta\varphi_i(x,z,u)\,du=(1-\delta_{i,\psi})/\Phi/\rho_0, \quad i(\varphi,\psi)$$

$M(t)$ – ядро наследственности, $\varphi_\varphi=\varphi$, $\varphi_\psi=\psi$, удовлетворяющие начальным и граничным условиям

$$\varphi_i(x,\ z;\ 0)=\varphi_{it}'(x,\ z,\ 0)=\varphi_i(x,\ z;\ t\to\infty)=0, \tag{2}$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Построим решение для функции Грина задачи, удовлетворяющей уравнениям (2), (2) с источником типа P-волн:

$$\Phi(x,z;t)=A\delta(x)\delta(z-h)\delta(t). \tag{3}$$

Уравнения для функции Грина примут вид

$$\begin{gathered}\hat{L}G_i=[1-\delta_{i,\psi}]\frac{A}{\rho_0}\delta(t)\delta(x)\delta(z-h),\\ G_i(x,z;0)=G_{it}'(x,z;0)=0;\ G_i\equiv G_i(x,z;t).\end{gathered} \tag{4}$$

Знание функций Грина и функции источника позволяет получить соответствующие потенциалы φ и ψ, а следовательно, и смещение, вызванное действием источника.

На свободной поверхности функция Грина удовлетворяет условиям

$$2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}G_\varphi+\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_\psi-\frac{\partial^2}{\partial z^2}G_\psi=0, \tag{5}$$

$$2c_{tr}^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}G_\psi+(c_l^2-2c_{tr}^2)\Delta G_\varphi+2c_{tr}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}G_\varphi=0. \tag{6}$$

Покажем, что решения для функций Грина неидеальной среды можно выразить через функции Грина задачи для идеальной упругой среды и фактор, учитывающий диссипативно-дисперсионные свойства среды. Переходя в уравнении (2) к лапласовскому образу по p и фурье-компонентам по k_x, k_z, получим для $G^\nu\equiv G^\nu(k_x,k_z;p)$ уравнение

$$[p^2+c^2(k_x^2+k_z^2)M(p)]G^\nu=A/\rho_0. \tag{7}$$

$M(p)$ зависит от выбора конкретной модели среды (так, в случае вязкоупругой среды, волновые уравнения для которой имеют вид:

$$\left(\Box_i-c_i^2\tau\frac{\partial}{\partial t}\Delta\right)G_i^\nu=(1-\delta_{i,\psi})\frac{A}{\rho_0}\delta(t)\delta(x)\delta(z-h),$$

$M(p)=(1+p\tau)$. Выражение для G^ν нетрудно получить, взяв обратные преобразования Фурье по k_x и k_z и преобразование Меллина по p. Вычисляя интеграл по k_z, получим

$$G_\varphi^\nu=\mathrm{Re}\int\limits_\gamma\frac{dp}{2\pi i}\frac{1}{M(p)}\{k(p)\}\exp[pt];$$

$$k^2(p)=\frac{p^2}{c_l^2M(p)}, \tag{8}$$

где $\{k(p)\}=\dfrac{A}{\rho_0c_l^2}\displaystyle\int\frac{dk_x}{h_\varphi}\exp[ik_xx-|z-h|n_\varphi]$; $n_\varphi=[k_x^2+k^2(p)]^{1/2}$.

Определив функцию $I(\xi,t)$

$$M^{-1}(p)\exp[-\xi k(p)c]\doteqdot I(\xi,t)=\int\limits_\gamma\frac{dp}{2\pi i}\frac{\exp[-\xi ck(p)+pt]}{M(p)}$$

и используя теорему Эфроса, можем получить для G^ν выражение

$$G^\nu(x,z;t)=\int\limits_0^\infty du\,I(u,t)G^0(x,z;u), \tag{9}$$

где $\{p\} \doteqdot G^0(x, z; t)$ — функция, удовлетворяющая уравнениям и граничным условиям для функций G^ν при $M(t)=\delta(t)$.

В дальнейшем будем обозначать величины, относящиеся к падающей волне, $G^{\text{пад}}$, а к волне, отраженной от поверхности, $-G^{\text{отр}}$.

Следуя процедуре, изложенной в [2], для отраженных волн получим

$$\begin{pmatrix} G_\varphi^{\text{отр}} \\ G_\psi^{\text{отр}} \end{pmatrix} = \frac{A}{\rho_0 c_l^2} \operatorname{Re} \int\limits_\gamma \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{dk_x}{n_\varphi} \begin{Bmatrix} V_\varphi \exp[-n_\varphi(z+h)] \\ V_\psi \exp[-n_\psi z - n_\varphi h] \end{Bmatrix} \exp[pt + ik_x x]. \quad (10)$$

В формулах (8), (10) $n_i=(k_x^2+p^2c_i^{-2})^{1/2}$; $\operatorname{Re} n_\varphi>0$, что определяет физический лист римановой поверхности комплексной величины p (из точек $p=\pm ic_ik_x$ проведены разрезы параллельно отрицательной вещественной оси [2]). Коэффициенты V_φ и V_ψ описывают степень трансформации падающей P-волны соответственно в P-волну — V_φ, а V_ψ — в SV-волну и подбираются таким образом, чтобы суммарное поле падающей и генерируемых поверхностью волн удовлетворяло на свободной поверхности условиям $\sigma_{xz}=\sigma_{zz}=0$ при $z=0$. Тогда

$$V_\varphi=-R_+/R_-;\ V_\psi=4ik_xn_\varphi[2k_x^2+p^2c_{tr}^{-2}]/R_-,$$
$$R_\pm=[2k_x^2+p^2c_{tr}^{-2}]^2\pm 4k_x^2n_\varphi n_\psi. \quad (11)$$

Проводя замену переменной $p=c_lk_xu$ и учитывая однородность V_φ и V_ψ, получим выражение для составляющих смещения:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{A}{\rho_0 c_l^2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} \int\limits_{\gamma_u} \frac{du}{2\pi i\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} V_\varphi + iV_\psi d(u) \\ V_\psi + iV_\varphi d(u) \end{pmatrix} \int\limits_0^\infty dk_x \exp[k_x f],$$
$$f(u)=c_ltu+ix-h\sqrt{1+u^2};\quad d(u)=(1+(c_l^2c_{tr}^{-2}u^2)^{1/2}. \quad (12)$$

Взяв интеграл по k_x и учитывая, что особенности подынтегрального выражения (точки ветвления $u_\pm=\pm i$; $\pm i\gamma_\psi$; $|\gamma_\psi|<1$ и полюса, определяемые уравнением $R_-(u_k)=0$; $u_R=\pm i\dfrac{c_R}{c_l}$; $|u_R|\ll|\gamma|$) лежат на мнимой оси, деформируем контур γ_u таким образом, чтобы $\operatorname{Re} f\leqslant 0$ во всех точках нового контура (за исключением отдельных точек, где $\operatorname{Re} f=0$). Замыкая контур γ_u' в правой полуплоскости (это можно сделать, так как на бесконечности подынтегральное выражение убывает как $|u|^{-2}$) и учитывая, что справа от замкнутого в правой полуплоскости контура γ_u' встречаются особенности, связанные только с корнями $f(u_k)=0$, получим

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{A}{\rho_0 c_l} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} \begin{pmatrix} V_\varphi(u_k) + iV_\psi(u_k)d(u_k) \\ V_\psi(u_k) + iV_\varphi(u_k)d(u_k) \end{pmatrix} L^{-1}\theta(tc_l - \sqrt{x^2+h^2}), \quad (13)$$
$$L=[c_l^2t^2-x^2-h^2]^{1/2},$$

а u_k определяется уравнением

$$u_k=[Lh-ic_ltx][c_l^2t^2-h^2]^{-1}.$$

Выражение (13) описывает полное волновое поле, создаваемое заглубленным линейным источником. Выделение тех или иных мод волн связано с возможностью четко выделить экстремум волнового поля, скорость перемещения которого x/t можно определить. Первое, что стóит отметить анализируя выражение для u_x, u_z,— сильное затухание тех мод, которые, распространяясь вдоль поверхности, не определяются большими значениями V_φ, V_ψ (малыми значениями $R_-(u_k)$). На физическом листе корни $R_-(u_k)=0$ лежат на мнимой оси, а значения u_k имеют положительную вещественную часть. Такими модами являются поверхностная P-волна, определяемая условием $\operatorname{Im} u_k=-1$, и поверхностная SV-волна — $\operatorname{Im} u_k=-\gamma$ (соотношения между t и x, определяемые этими условиями, соот-

ветствуют максимальным амплитудам этих волн). С расстоянием P и SV поверхностные волны затухают по закону x^{-1} (это убывание не связано с поглощением: происходит перерассеяние этих волн в глубь полупространства). На больших эпицентральных расстояниях вклад в u_x и u_z будет вносить только поверхностная R-волна, определяемая малыми значениями $R_-(u_h)$.

Анализируя уравнение (13), нетрудно получить критерий появления волны Рэлея (экспериментальный факт отсутствия поверхностной волны на близких эпицентральных расстояниях был теоретически обоснован Накано, анализировавшим вклад в интеграл от полюса Рэлея при деформации исходного контура в путь наибыстрейшего спуска [3, 7]). Из выражения (13) следует, что R-мода как экстремум волнового поля впервые проявится, когда центр волны Рэлея, движущийся со скоростью $c_R=x/t$, окажется левее фронта первичной P-волны, движущейся вправо. Положение фронта P-волны определится соотношением $c_l^2t^2=x^2+h^2$ (до этого момента в точке с координатой x волновое поле отсутствовало). Итак, считая, что R-волна приходит в точку x позже P-волны $x/c_R>\sqrt{x^2+h^2}/c_l$, получим критерий Накано [7] $x>x_H=h\sqrt{1-c_R^2/c_l^2}$. Однако с экспериментальной точки зрения R-волна еще не определится четко, так как она будет теряться в волновом поле хвоста P-волны и следующей за ней SV-волны. Более точен критерий, учитывающий тот факт, что координата, при которой вклад от R-волны становится больше, чем то P- и SV-фаз, когда координата центра R-волны $x=c_Rt$ становится ближе к полюсу, чем к точке ветвления, определяющей вклад в волновое поле от SV-волны:

$$\operatorname{Im} u_h<\frac{c_{tr}+c_R}{2c_l}, \qquad t=\frac{x}{c_R}.$$

Подставляя $\operatorname{Im} u_h$ из (13) в эту формулу, получим

$$x>x_0=hc_Rc_l^{-1}(c_{tr}+c_R)^{1/2}(c_{tr}-c_R)^{-1/2},$$

что для диапазона $1{,}04<c_R/c_{tr}<1{,}14$, который характерен для большинства материалов, приводит к хорошему согласию как с экспериментальными данными, так и с результатами численного счета [8] (надо сказать, что единственная возможность надежно оценить координату появления R-волны — численный счет, в котором можно ввести количественные критерии наблюдаемости R-волны, скажем, по критерию Рэлея как хорошо определенной моды волнового поля).

Большой интерес представляет структура волнового поля в окрестности R-фазы, когда последняя является четко выделенным возмущением эволюционизирующего волнового поля (область ранее рассмотренных эпицентральных расстояний, на которых формируется R-фаза, как видно ниже, не требует учета диссипативно-дисперсионных свойств среды). По нашим оценкам это — расстояния $x>7h\dfrac{c_l}{c_{tr}}$ $(c_{tr}/c_R=1{,}04)$ и $x>4{,}5h\dfrac{c_l}{c_{tr}}$ $(c_{tr}/c_R=1{,}14)$. Раскладывая V_φ и V_ψ в окрестности $u_h=-i\dfrac{c_R}{c_l}$, получим для u_x и u_z следующие выражения:

$$\begin{pmatrix} u_x(x,t) \\ u_z(x,t) \end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} D\operatorname{Re} \\ B\operatorname{Im} \end{pmatrix}[x-c_Rt+i\tilde{h}]^{-1}\,\theta(tc_l-\sqrt{x^2+h^2}), \tag{14}$$

$$\tilde{h}=(1-c_R^2/c_l^2)^{1/2}.$$

Отметим, что характерная ширина продольного и поперечного смещений зависит только от глубины источника и можно сказать, что рэлеевская волна формируется границей полупространства и ее характерная длина — длина формирования $l_\Phi=h$. В отсутствие диссипации R-фаза сохраняет свою форму (амплитуда сигнала в этой геометрии остается постоянной). При учете диссипации закон затухания и форма сигнала меняются. Ха-

рактер этого влияния может быть учтен (см. (9)), тогда выражение для смещений можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} u_x^{\partial} \\ u_z^{\partial} \end{pmatrix} = \int_0^{\infty} dv\, I(t, v) \begin{pmatrix} u_x(x, v) \\ u_z(x, v) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Анализ выражения для I в случае вязко-упругой среды, релаксационноупругой среды и сред типа «среда Гуревича» был проведен в работе [9], где показано, что функция $I(t, v)$ при $v \gg \tau$ (τ — параметр, характеризующий временной масштаб релаксационных процессов) имеет универсальный вид $I(t, v) \cong \tilde{A} v^{-1/2} \exp[-(t-v)^2/2\tau v]$.

Если глубина источника и время релаксации удовлетворяют условию $2\tau c_R x \ll h^2$, то функции u_x, u_z в (15) оказываются плавными по сравнению с I, их можно вынести за знак интеграла при $v \cong t$ и в этом пределе получим $u_x^{\partial} \cong u_x$, $u_z^{\partial} \cong u_z$. В другом предельном случае $h^2 \ll 2\tau c_R x$, когда стоящие под интегралом функции u_x, u_z быстро меняются по сравнению с I, проводя разложение подынтегральных функций в окрестности $v \cong x/c_R$, получим выражение, описывающее форму волны и характер ее затухания:

$$\begin{pmatrix} u_x^{\partial} \\ u_z^{\partial} \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} D\,\mathrm{Im} \\ B\,\mathrm{Re} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + i \frac{x - c_R t}{\sqrt{x}} \right\} \exp\left[-\frac{(t - x/c_R)^2}{2\tau c_R^{-1} x} \right]. \tag{16}$$

Из (16) видно, что максимальная амплитуда горизонтальных и вертикальных смещений убывает по закону x^{-1} и на больших расстояниях структура профиля волны Рэлея не меняется (характерная ширина u_x^{∂}, u_z^{∂} растет как $\sqrt{x}$). Зависимость от глубины сказывается в следующих членах разложения $h/\sqrt{x}$.

Приведенные выше результаты относились к случаю δ-образного импульса (амплитуды, относящиеся к этому случаю, будем обозначать u^{δ}). В реальном эксперименте импульс сигнала в источнике имеет конечную длительность $T_{\text{изл}}$, и в этом случае для смещений можно записать

$$\begin{pmatrix} u_x^{T} \\ u_z^{T} \end{pmatrix} = \int dt'\, T(t - t') \begin{pmatrix} u_x^{\delta} \\ u_z^{\delta} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Из (17) видно, что если время формирования поверхностной волны l_{Φ}/c_R таково, что выполнено условие $T_{\text{изл}} \ll l_{\Phi}/c_R$, формулы, описывающие структуру волны, остаются такими же, как и в случае δ-образного источника, за исключением сомножителя, определяющего импульс интегрально. Когда время действия источника и расстояние, на котором определяется сигнал, удовлетворяют условию $T_{\text{изл}} \gg \sqrt{\tau x/c_R} > l_{\Phi}/c_R$, выражение для профиля волны имеет вид

$$u_{\substack{x\\z}}^{T} = \frac{\partial T}{\partial t}\bigg|_{x/c_R} \int_0^{\infty} t' G^{\delta}\, dt'.$$

На значительных расстояниях от источника, когда $\sqrt{\tau x/c_R} \gg T_{\text{ист}} \gg l_{\Phi}/c_R$, форма и профиль сигнала описываются выражением

$$u_{\substack{x\\z}}^{T} = u_{\substack{x\\z}}^{\delta} \int_0^{\infty} dt' T(t')\, t.$$

Проведенный анализ позволяет нарисовать картину детальной эволюции волнового поля, возбужденного линейным источником P-волн в дисперсионно-диссипативной среде. С экспериментальной точки зрения такая ситуация исследовалась в работе [10].

Развитая техника расчета позволяет расширить возможности описания волновых полей и на случай неидеальных сред (функционально-инвариантный метод Смирнова — Соболева [2] или метод Каньяра [6] ограничены рамками идеально-упругих сред) определить искажение формы R-волны и ее затухание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красильников В. А., Крылов В. В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 339 с.
2. *Петрашень Г. И., Молотков Л. А., Крауклис П. В.* Волны в слоисто-однородных упругих средах. М.: Наука, 1982. 288 с.
3. *Ewing M., Jardetzky W., Press F.* Elastic waves in layered media. N.-Y.: McGraw-Hill, 1957. P. 637.
4. *Miklowitz J.* The theory of elastic waves and waveguides. N.—Y.: North-Holland Publ. Co. 1978. P. 618.
5. *Hoop A. T.* A modification of Gagniard's method for solving seismic pulse problem // Appl. Science Research. 1960. B. 8. P. 349—356.
6. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983. 873 с.
7. *Nakano H.* On Rayleigh waves. Japan J. Astron. Geophys. 1925. V. 2. P. 223—326.
8. *Онисько Н. И., Шемякин Е. И.* Движение свободной поверхности однородного грунта при подземном взрыве // ПМТФ. 1961. № 4. С. 82—93.
9. *Дунин С. З., Максимов Г. А.* Акустические волны в диссипативных средах: Препринт № 39. М: МИФИ. 1985. С. 24.
10. *Голенищев-Кутузов А. В., Мачигаев С. Л., Яфаев Н. Р.* Генерация поверхностной акустической волны с помощью импульсов лазерного излучения // Акуст. журн. 1986. Т. 31. № 5. С. 671—672.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию 4.IX.1986