АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 5

УДК 534.539.3

ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЬ — ТВЕРДОЕ ТЕЛО, СОДЕРЖАЩЕЙ ГАЗОВЫЕ ПОЛОСТИ

Кобелев Ю. А.

Решается задача о поглощении звуковых волн плоской границей раздела жидкости с твердым телом, содержащей газовые полости. Показано, что оптимальный выбор функции распределения полостей по собственным частотам позволяет добиться эффективного поглощения звуковых волн в широком диапазоне их частот и углов падения на плоскость.

В работе [1] обсуждался принцип работы системы, эффективно поглощающей звуковые волны в широком диапазоне частот. Система устроена таким образом, что ее импеданс эквивалентен импедансу большого количества параллельно включенных механических осцилляторов с различными собственными частотами, что дает механизм поглощения звука, аналогичный линейному затуханию Ландау. Этот процесс не связан со скоростью диссипации энергии отдельными осцилляторами, а определяется их концентрацией, характеризующейся функцией распределения осцилляторов по собственным частотам. Оптимальным условием для определения этой функции является равенство действительной составляющей импеданса поглощающего устройства импедансу среды. При этом его мнимая часть в ряде случаев может оказаться достаточно малой, что и позволяет реализовать эффективное поглощение звука в широкой полосе частот. В цитируемой работе рассматривается простейший пример звукопоглощающего устройства, представляющего собой невесомую и недеформируемую стенку, расположенную на границе полупространства, заполненного с одной стороны жидкостью, а с другой стороны, связанную через пружины с сосредоточенными массами таким образом, что образуется система осцилляторов с различными собственными частотами. Согласно оценкам, при отношении максимальной собственной частоты осцилляторов ω_1 к минимальной ω_2, равном 10^3, возможно поглощение таким устройством 99% энергии звуковых волн, падающих из жидкости нормально на стенку поглощающего устройства, в частотном диапазоне от $3\omega_2$ до $300\omega_2$.

В настоящей работе рассматривается другая, более реальная, модель поглощающего устройства, где роль стенки играет плоская поверхность твердого тела, а ось осцилляторов — цилиндрические газовые полости. Решается вопрос об эффективности поглощения звуковых волн не только в зависимости от их частоты, но и от угла падения на поверхность поглощающего устройства.

Пусть на плоскую границу раздела жидкости $x>0$ с твердым телом $x<0$ падает из жидкости плоская, гармоническая звуковая волна давления частоты ω и единичной амплитуды

$$P_{\text{п}}=\exp\{i[\omega t+k(x\cos\theta-y\sin\theta)]\}, \tag{1}$$

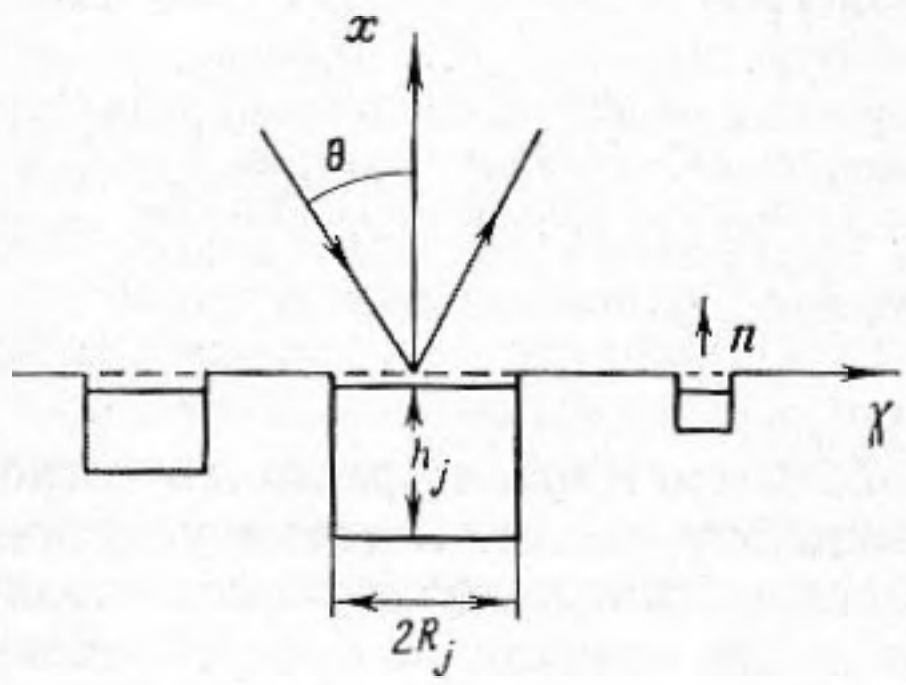
где θ — угол падения звуковой волны (см. фиг. 1), $k=\omega/c$ — волновой вектор, c — скорость звука в жидкости. Понятие твердого тела здесь используется в смысле абсолютно жесткой среды, поэтому отраженную волну можно записать в виде

$$P_{\text{от}}=\exp[-ik(x\cos\theta+y\sin\theta)]. \tag{2}$$

В выражении (2) опущен временной множитель, несущественный для дальнейшего изложения. А поле на самой поверхности ($x=0$)

$$P=2\exp(-iky\sin\theta). \tag{3}$$

Рассмотрим теперь влияние газовых полостей на волну, отраженную поверхностью. Относительно полостей пока предложим следующее: они имеют цилиндрическую форму, но различные радиусы R_j и высоты h_j столба газа в них (см. фиг. 1). Будем считать размеры R_j и h_j достаточно малыми, чтобы не учитывать волновых свойств газа в полостях, а колебания жидкой границы полости $x=0$ считать однородными, т. е. эквивалентными колебанию поршня. Предположим также, что полости распределены по поверхности случайным образом, но концентрация их N постоянна для различных точек поверхности и зависит только от R_j и h_j, т. е. $N=N(R_j, h_j)$.



Фиг. 1

Получим уравнение для поля P_a на поверхности $x=0$ с учетом полостей. Для этого найдем силу F_j, действующую на жидкую границу (пунктирная линия на фиг. 1) полости с номером j; выражение для нее можно записать в форме

$$F_j=-\int\limits_{S_j}(P_j+P_{pj})\,dS_j, \tag{4}$$

где S_j — площадь жидкой поверхности полости, P_j — давление (3) в области полости j, P_{pj} — рассеянное другими полостями поле, которое можно представить в виде суммы

$$P_{pj}=-i\omega\rho\sum_{l\neq j}^{\infty}\varphi_{jl}, \tag{5}$$

где ρ — плотность жидкости, суммирование в (5) проводится по всем полостям, исключая j, φ_{jl} — звуковой потенциал, создаваемый колебаниями полости l в точке $\mathbf{n}_j$ полости j; для него запишем известную формулу

$$\varphi_{jl}=-(2\pi)^{-1}\int\limits_{S_l}\frac{\partial\varphi_l}{\partial n}\left[\exp(-ik|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_l|)\right]/|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_l|\,dS_l, \tag{6}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, $\partial\varphi_l/\partial n=v_l$ — амплитуда скорости колебания жидкой поверхности полости l. Выразим v_l через силу F_l (4); для этого запишем очевидное равенство

$$F_l=Z_{0\,l}v_l+F_{\text{пр}\,l}, \tag{7}$$

где $Z_{0\,l}$ — импеданс воздушной полости l и части жидкости массы m_l, находящейся в ней. В приближении идеального газа нетрудно получить выражение для $Z_{0\,l}$:

$$Z_{0\,l}=m_l(\Omega_l^2-\omega^2)/i\omega, \tag{8}$$

где $\Omega_l^2=\pi R_l^2\gamma P_0/h_l m_l$, γ — показатель адиабаты газа, а P_0 — статическое давление. Сила $F_{\text{пр}\,l}$ в (7) обусловлена инерцией присоединенной массы M_l жидкости, связанной с колебаниями полости l. При условии $kR_l\ll 1$ выражение для этой силы записывается в виде [2]

$$F_{\text{пр}\,l}=\pi\rho\omega R_l^3(kR_l/2+8i/3\pi)\,v_l. \tag{9}$$

Подставив (9) в (7), получим

$$F_l=Z_l v_l;\qquad Z_l=(iM_l/\omega)(\omega_l^2-\omega^2+i\delta_l\omega^2), \tag{10}$$

где

$$M_l=8\rho R_l^3/3; \quad \delta_l=3\pi R_l k/16;$$
$$\omega_l^2=3\pi\gamma P_0/8\rho R_l h_l \tag{11}$$

— собственная частота полости. В (10) пренебрегли массой m_l, считая ее малой по сравнению с присоединенной массой M_l; величина δ_l определяет потери энергии на излучение звука колеблющейся полостью. Подставив (10) в (6), из (4) и (5) получаем уравнение для силы F:

$$F_j=-\pi R_j^2\left(P_j+\frac{i\omega\rho}{2}\sum_{l\neq j}^{\infty}\frac{R_l^2 q_{jl}F_l e^{-ik|\mathbf{r}_{j0}-\mathbf{r}_{l0}|}}{Z_l|\mathbf{r}_{j0}-\mathbf{r}_{l0}|}\right). \tag{12}$$

где $\mathbf{r}_{j0}$, $\mathbf{r}_{l0}$ — вектора, соединяющие начало координат с центрами жидких границ полостей j и e, коэффициент q_{jl} определяется выражением

$$q_{jl}=(\pi^2R_j^2R_l^2)^{-1}\iint\limits_{S_jS_l}\frac{|\mathbf{r}_{j0}-\mathbf{r}_{l0}|}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_l|}e^{-ik(|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_l|-|\mathbf{r}_{j0}-\mathbf{r}_{l0}|}dS_j\,dS_l. \tag{13}$$

Уравнение (12) связывает силу, действующую на полость j с силами, действующими на другие полости; его решение в принципе дает возможность найти силу F в зависимости от невозмущенного поля P. Это уравнение аналогично уравнению для макроскопического поля в жидкости с пузырьками газа с учетом многократного рассеяния звука пузырьками [3]. Для его решения сделаем одно существенное предположение, а именно: будем считать концентрацию полостей достаточно большой, т. е. среднее расстояние между полостями d мало по сравнению с масштабом изменения невозмущенного поля (3),

$$d\ll 2\pi/k_\perp, \tag{14}$$

где $k_\perp=k\sin\theta$ — проекция на плоскость $x=0$ волнового вектора $\mathbf{k}$. В этом случае в рассеянное полостями поле будет давать основной вклад когерентная составляющая $\langle P_\text{р}\rangle$, усредненная по области поверхности $x=0$, содержащей много полостей и изменяющаяся в пространстве с масштабом невозмущенного поля (3). Таким образом, полное поле $P_\text{а}$ на поверхности $x=0$ есть сумма невозмущенного поля P и $\langle P_\text{р}\rangle$, а силу F_j можно записать в виде

$$F_j=-\pi R_j^2P_{\text{а}j}. \tag{15}$$

Представим поле $P_\text{а}$ в форме

$$P_\text{а}=P_{\text{а}0}\exp(-ik_\perp v). \tag{16}$$

Подставив (15), (16) в (12), получим для амплитуды поля $P_{\text{а}0}$ выражение

$$P_{\text{а}0}=2/(1+iG), \tag{17}$$

$$G=-\frac{3\pi i}{16}\left\langle\sum_{l\neq j}^{\infty}\frac{R_lq_{jl}\exp\{-i[kr_{jl}+k_\perp(y_l-y_j)]\}}{(\omega_l^2/\omega^2-1+i\delta_l)r_{jl}}\right\rangle, \tag{18}$$

где $r_{jl}=|\mathbf{r}_{j0}-\mathbf{r}_{l0}|$, а угловые скобки означают усреднение по различным ансамблям полостей. Стандартная процедура для упрощения выражения (18) заключается в переходе от дискретного суммирования к интегрированию с помощью функции распределения N полостей по их собственным частотам ω_j. Величина ω_j определяется выражением (11) и зависит от двух переменных: R и h; в дальнейшем будем считать $h=h(R)$, поэтому полость можно характеризовать либо R, либо $\omega_j=\omega_0$, т. е. одной величиной. Коэффициент q_{jl} определяет влияние линейного взаимодействия полостей на звуковое поле; если предположить, что

$$\langle R^2\rangle\ll\langle r_{jl}^2\rangle, \tag{19}$$

т. е. удельная площадь, занятая полостями мала, то $q_{jl}\simeq 1$ (приближение точечных полостей). Условие (19) следует из разложения в ряд по ма-

лому параметру $R^2/r_{\text{д}}^2$ выражения для $q_{\text{д}}$ (13). Далее будем считать условие (19) выполненным, а в конкретных расчетах проверять его справедливость. После всего сказанного выражение (18) существенно упрощается:

$$G=-\frac{3\pi i}{16}\int\limits_{\omega_0}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{RN(\omega_0)\exp[-i(kr-k_\perp\xi)]\,d\omega_0\,dr\,d\varphi}{\omega_0^2/\omega^2-1+i\delta}, \tag{20}$$

где r и φ — полярные координаты на плоскости, $\xi=r\cos\varphi$. Интегрируя (19) по r и φ, получим для G:

$$G=\frac{3\pi^2}{8\sqrt{k^2-k_\perp^2}}\int\limits_{\omega_0}\frac{RN(\omega_0)\,d\omega_0}{\omega_0^2/\omega^2-1+i\delta}. \tag{21}$$

Интеграл в (21) можно представить в виде суммы от δ-функции и интеграла в смысле главного значения относительно значения $\omega_0=\omega$, в результате получаем

$$G=\frac{3\pi^2}{8\sqrt{k^2-k_\perp^2}}\left[-i\pi U(1)+\fint\limits_{s_2}^{s_1}\frac{U(s)\,ds}{s-1}\right], \tag{22}$$

где функция $U(s)$ связана с $N(\omega_0)$ условием

$$RN(\omega_0)\,d\omega_0=U(s)\,ds, \tag{23}$$

а $s=\omega_0^2/\omega^2$; $s_{1,2}=\omega_{1,2}^2/\omega^2$; ω_1, ω_2 — максимальная и минимальная собственные частоты полостей, s — главное значение интеграла. При записи (22) сделано предположение, что частота звуковой волны ω удовлетворяет условию

$$\omega_2<\omega<\omega_1. \tag{24}$$

Вычислим коэффициент отражения звука η от плоскости с учетом влияния полостей. Разность $P_{a0}-1$ равна амплитуде отраженной волны, поэтому для η имеем

$$\eta=P_{a0}-1=(1-iG)/(1+iG). \tag{25}$$

Выбирая ту или иную функцию распределения полостей $U(s)$ или $N(\omega_0)$, можно изменять коэффициент отражения в широких пределах; наиболее интересным же является случай полного или близкого к нему поглощения звука, что соответствует малым значениям коэффициента отражения, который и будем рассматривать. Воспользовавшись равенством $(k^2-k_\perp^2)^{1/2}=(\omega/c)\cos\theta$, а затем предположив, что величина $U(1)=8\omega/3\pi^3c$ (при этом действительная часть в выражении (25) для коэффициента отражения при нормальном падении волны на поверхность ($k_\perp=0$) равна нулю), получим для $U(s)$ выражение

$$U(s)=8\omega/3\pi^3c_0\sqrt{s}, \tag{26}$$

откуда для $RN(\omega_0)$ имеем

$$RN(\omega_0)=16/3\pi^3c. \tag{27}$$

Подставив (26) в (22), получим

$$G=\frac{1}{\cos\theta}\left[-i+\frac{1}{\pi}\fint\limits_{s_2}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{s}(s-1)}\right]. \tag{28}$$

И наконец, интегрируя (28), имеем для коэффициента отражения окончательное выражение:

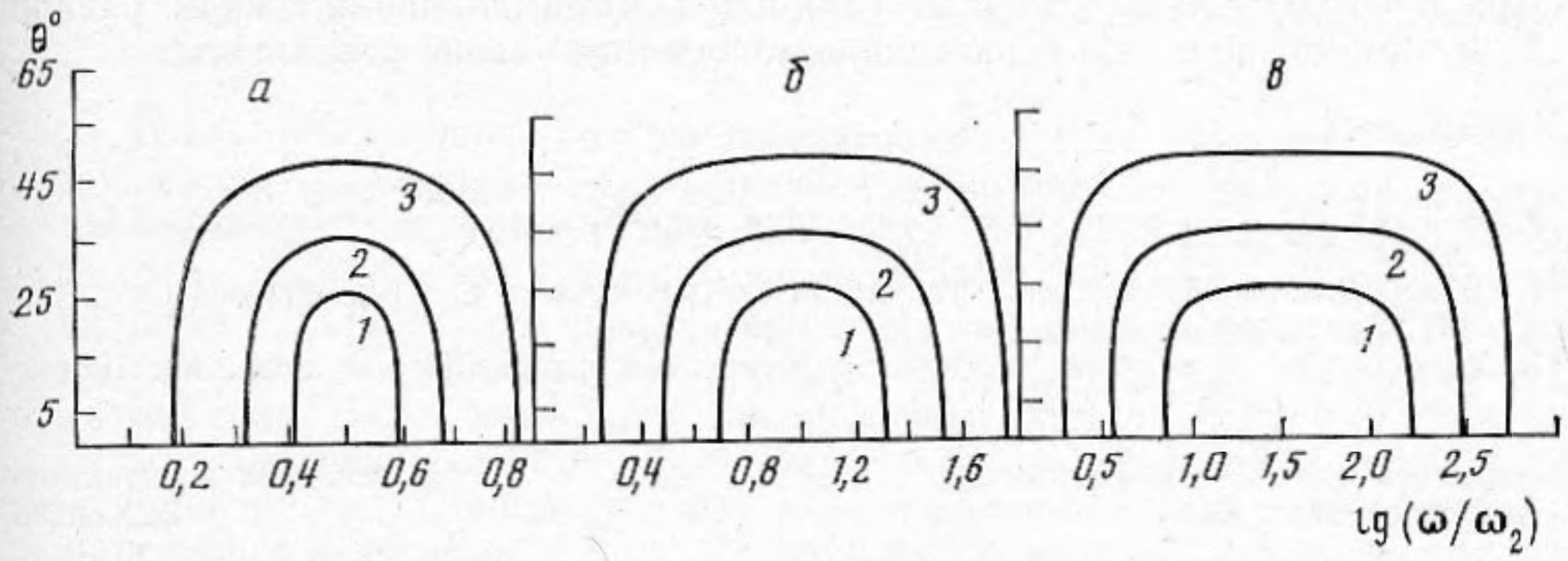
$$\eta=(\cos\theta-1-i\varkappa/\pi)/(\cos\theta+1+i\varkappa/\pi), \tag{29}$$

$$\varkappa=\ln[(\omega_1-\omega)(\omega_2+\omega)/(\omega-\omega_2)(\omega_1+\omega)]. \tag{30}$$

Из (29), (30) следует, что коэффициент отражения равен нулю при нормальном падении звуковой волны частоты $\omega^*=(\omega_1\omega_2)^{1/2}$, т. е. имеет место полное поглощение звуковой волны на поверхности. Слабая зависимость его от угла θ и частоты ω позволяет обеспечить высокий уровень поглощения в относительно широкой полосе частот и углов вблизи частоты ω^* и угла $\theta=0$.

На фиг. 2, *а—в* показаны границы этой области на плоскости $\lg(\omega/\omega_2)$, θ для различных значений максимального модуля коэффициента отражения $|\eta|_{max}$ и ω_1/ω_2. Для $|\eta|_{max}=0{,}1$ (ослабление отраженного сигнала на 20 дБ) максимальный угол для всех величин ω_1/ω_2 составляет величину $\simeq 35°$, а отношение граничных частот изменяется от 2,4 при $\omega_1/\omega_2=10$ до 10^2 при $\omega_1/\omega_2=10^3$.

Сделаем несколько оценок для случая $\omega_1/\omega_2=10^2$, выбрав $\omega_2=2\cdot 10^2$ с$^{-1}$ ($f_2\simeq 30$ Гц), $P_0=10^5$ Па. Тогда из выражения (11) имеем для максималь-



Фиг. 2. Границы областей с максимальным модулем коэффициента отражения $|\eta|_{max}=0{,}05$ – *1*, 0,1 – *2* и 0,2 – *3* для $\omega_1/\omega_2=10$ – *а*, 10^2 – *б*, 10^3 – *в*

ного и минимального значений величины hR соответственно 40 см^2 и 0,004 см^2. Выберем минимальное значение $R_{min}=5\cdot 10^{-2}$ см, тогда $h_{min}=0{,}08$ см. Пусть также глубина h изменяется по закону $h=h_{min}R/R_{min}$, тогда $h_{max}=8$ см, а $R_{max}=5$ см. Вычислим полное число полостей N_Σ на единице площади. По определению

$$N_\Sigma=\int_{\omega_2}^{\omega_1} N(\omega_0)\,d\omega_0, \tag{31}$$

откуда, воспользовавшись (27), получаем для N_Σ значение, равное $2{,}5\cdot 10^3$ м$^{-2}$. Для относительной площади σ, занимаемой полостями, имеем очевидное выражение

$$\sigma=\pi\int_{\omega_2}^{\omega_1} N(\omega_0)R^2\,d\omega_0, \tag{32}$$

которое дает для σ значение 10^{-2}. Таким образом, условие (19) выполняется. Представляет также интерес величина полной присоединенной массы жидкости M, связанной с колебаниями полостей. Для нее имеем

$$M_\Sigma=\frac{8\rho}{3}\int_{\omega_2}^{\omega_1} R^3N(\omega_0)\,d\omega_0\simeq 0{,}2\ \text{кг/м}^2,$$

что более чем на четыре порядка меньше, чем в устройстве, рассмотренном в работе [1]. Это связано, прежде всего, с высокой эффективностью рассеяния звука воздушными полостями. И наконец, диапазон частот эффективного поглощения звука $|\eta|\leqslant 0{,}1$ лежит в области от 80 до 800 Гц.

Несколько слов следует сказать об ограничениях, накладываемых на концентрацию полостей, обусловленных неоднородностью звукового поля падающей волны или неоднородностью поверхности, содержащей полости. Пусть характерный масштаб неоднородности на плоскости $x=0$

есть L, тогда переход от дискретного суммирования в (18) к интегрированию в (20) возможен, если на площади L^2 поверхности раздела сред содержится достаточно много резонансных полостей для любой частоты звука в интервале от ω_2 до ω_1, т. е.

$$H=N(\omega_0)\Delta\omega_0 L^2=(\omega_0/Q)N(\omega_0)L^2\gg 1, \tag{33}$$

где H — число резонансных полостей на площади L^2, $\Delta\omega_0$ — ширина резонансной кривой полости, Q — ее добротность. Из (11), (27) следует, что $N(\omega_0)$ линейно растет с частотой, поэтому условие (33) достаточно выполнить для наиболее низкой частоты $\omega=\omega_2$. В рассмотренном выше примере (33) можно записать в виде

$$H=(16\omega_2^2/3\pi^3 cR_{\min}\omega_1 Q)L_1^2\gg 1. \tag{34}$$

При $H=10$, $Q=10$ получаем из (34) для L минимальное значение, равное 15 м, при котором еще справедливы полученные выше результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кобелев Ю. А.* К вопросу о поглощении звуковых волн в тонком слое // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 3. С. 507–509.
2. *Стретт Дж. В.* (*Лорд Рэлей*) Теория звука/Пер. с англ. под ред. Рытова С. М. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 2. 475 с.
3. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики/Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. Т. 2. 886 с.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24.XI.1986