

УДК 534.231

**АКУСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ПОТОКА ВЯЗКОГО ГАЗА В ТРАКТАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ**

*Гликман Б. Ф., Гурьев В. А.*

Предложены линейные модели нестационарного неизотермического течения вязкого газа в канале переменного сечения, предназначенные для расчета на ЭВМ акустических характеристик тракта. Результаты расчетов даны в сравнении с экспериментальными результатами.

Линейные математические модели нестационарного потока в элементах установок различного назначения необходимы для расчета акустических характеристик тракта, используемых при анализе устойчивости процесса, для оценки возможных акустических и вибрационных нагрузок на элементы конструкции и т. д. В зависимости от цели расчетов определяют либо входной импеданс  $Z'$  (или обратную величину — проводимость) тракта, либо частотные передаточные функции тракта [1-3]:  $Z' = \delta p_0' / \rho c \delta u_0'$ ,  $\delta p'(x) / \delta p_0'$  или  $\delta p'(x) / \delta u_0'$ . Здесь  $\delta p_0'$ ,  $\delta u_0'$  — вариации (отклонения) давления и скорости потока в начале тракта ( $x=0$ );  $\delta p'(x)$  — вариация давления в сечении тракта с координатой  $x$ ;  $\rho$ ,  $c$  — плотность и скорость звука в газе.

Для анализа особенностей акустических характеристик тракта с протоком удобно использовать безразмерные (приведенные) акустические характеристики газового тракта, в частности безразмерные отношения вариаций давления к вариации расхода  $\delta \bar{p}_0 / \delta \bar{G}_0 = (\delta p_0' / \delta G_0') (G_0 / p_0)$  и  $\delta \bar{p}(x) / \delta \bar{G}_0 = [\delta p'(x) / \delta G_0'] (G_0 / p_0)$ , связанные с входным импедансом [4]. Здесь  $\delta G_0'$  — вариация расхода газа на входе в тракт;  $\delta \bar{G}_0$ ,  $\delta \bar{p}_0$ ,  $\delta \bar{p}(x)$  — безразмерные комплексные амплитуды вариаций соответствующих параметров;  $G_0$ ,  $p_0$  — среднее значение расхода и давления во входном сечении тракта.

В случае, если вязкостью, теплопроводностью газа и теплообменом со стенками можно пренебречь, а тракт достаточно длинный ( $D \ll L$ , где  $D$  — диаметр,  $L$  — длина), то линеаризованные уравнения, описывающие одномерное нестационарное неизотермическое течение газа в цилиндрическом канале, имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + u \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{p}{\rho u} \frac{\partial \delta p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} + u \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \frac{\rho u c^2}{p} \frac{\partial \delta u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \delta s}{\partial t} + u \frac{\partial \delta s}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$  — средние значения скорости, плотности и давления газа;  $c$  — скорость звука в газе;  $\delta u$ ,  $\delta p$ ,  $\delta s$  — относительные вариации (отклонения) продольной составляющей скорости давления и энтропии газа, отнесенные (кроме  $\delta s$ ) к средним значениям варьируемых параметров, а  $\delta s$  — к теплоемкости  $c_p$ .

Рассмотрим вынужденные продольные колебания газа, воспользовавшись частным периодическим решением системы уравнений (1), которое удобно представить в виде матриц, описывающих участок тракта как многополюсник.

В теории систем [5]  $n$ -полюсником называют элемент, описываемый  $n$  переменными, связанными  $n/2$  линейными уравнениями. Применитель-

но к неизотермическому течению газа в тракте его динамические характеристики в линейном приближении описываются уравнениями 6-полюсника [6], связывающими шесть переменных — отклонения давления, скорости (расхода) и температуры (энтропии) на входе и выходе элемента. В частности, для цилиндрического участка тракта частное периодическое решение уравнений (1) состоит из трех линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами, записываемых в матричной форме [6]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta \bar{u}_{i0} \\ \delta \bar{p}_{i0} \\ \delta \bar{s}_{i0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F + H & (F - H)/\kappa M & 0 \\ \kappa M (F - H) & F + H & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\omega L/u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \bar{u}_{i1} \\ \delta \bar{p}_{i1} \\ \delta \bar{s}_{i1} \end{pmatrix} = \\ &= \|A_i\| \|\delta \bar{u}_{i1} \delta \bar{p}_{i1} \delta \bar{s}_{i1}\|^T, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $F = 0,5 \exp[i\omega L/(c+u)]$ ;  $H = 0,5 \exp[-i\omega L/(c-u)]$ ;  $L$  — длина тракта,  $\delta \bar{u}_{i0}$ ,  $\delta \bar{p}_{i0}$ ,  $\delta \bar{s}_{i0}$  — амплитуды относительных вариаций скорости, давления и энтропии газа на входе в цилиндрический участок тракта;  $\delta \bar{u}_{i1}$ ,  $\delta \bar{p}_{i1}$ ,  $\delta \bar{s}_{i1}$  — то же самое на выходе участка тракта;  $T$  — знак транспонирования матрицы;  $\kappa$ ,  $M$  — показатель адиабаты и среднее число Маха в потоке газа;  $\|A_i\|$  — матрица для участка тракта как шестиполюсника. Относительные вариации  $\delta p_{i1} = \delta \bar{p}_{i1} \exp i\omega t$  и т. д., причем амплитуды вариаций — величины комплексные.

Уравнение (2) описывает распространение акустических и энтропийных волн в дозвуковом потоке без учета их рассеивания за счет вязкости, теплопроводности и диффузии.

Метод четырехполюсников или многополюсников используется в акустике [1, 2, 7] для анализа динамических характеристик труб. Рассматриваемая система отличается наличием протока газа и неизотермичностью течения, что усложняет ее математическую модель. При использовании метода многополюсников газовый тракт разбивается на отдельные участки, для которых известны соотношения между параметрами газа на входе и выходе: цилиндрический участок тракта, местное сопротивление, развилка и т. д. В виде отдельных шестиполюсников удобно выделить все местные сопротивления, имеющиеся в конструкции (диафрагмы, решетки, дросселирующие устройства и т. д.). Так как при выводе уравнений (1) было сделано предположение, что газ невязкий, то в виде местных сопротивлений моделируются и потери давления из-за вязкого трения о стенку.

Таким образом, газовый тракт без развилки моделируется набором простейших элементов — цилиндрических участков и местных сопротивлений. Разбиение на элементы проводится так, что отклонения параметров потока на выходе  $i$ -го элемента равняется отклонениям тех же величин на входе в следующий,  $(i+1)$ -й элемент. Используя это условие и запись уравнений элементов в форме уравнения шестиполюсника (2), можно определить матрицу шестиполюсника для ряда последовательных элементов, входящих в тракт

$$\|A\| = \prod_{i=1}^n \|A_i\|, \quad (3)$$

где  $\|A\|$  — передаточная матрица всего тракта;  $n$  — число участков, на которые разбивается тракт.

Матричное уравнение (2) с учетом соотношения (3) и граничных условий образуют замкнутую систему алгебраических уравнений, описывающих динамические характеристики газового тракта. В случае тракта переменного сечения с достаточно плавным изменением сечения проточной части (без отрывов потока, нарушающих принятое условие одномерности течения) газовый тракт разбивается на ряд участков длины  $\Delta x_i$ , при этом каждый участок с переменным сечением заменяется на цилиндрический канал с диаметром, равным среднему диаметру сечения для данного участка.

Стационарные значения параметров газа вдоль проточной части определяются с помощью газодинамических функций с учетом потерь на трение. Для каждого  $i$ -го участка принимается, что все потери давления сосредоточены в сечениях перехода с одного участка на другой и характеризуются коэффициентом потерь  $\xi_i$ . Потери измеряются в долях скоростного напора набегающего потока в том сечении тракта, где оно начинает изменяться. Такая нормировка потерь применяется обычно для местных сопротивлений и ею пользовались при продувках канала, для которого экспериментально определялись динамические характеристики [4].

Установим связь между амплитудами безразмерных вариаций скорости, давления и энтропии для сечения, расположенного между цилиндрическими участками (в общем случае — разного сечения). Запишем уравнения баланса для  $j$ -го стыка:

уравнение неразрывности

$$\rho_{j0} u_{j0} F_{j0} = \rho_{j1} u_{j1} F_{j1}, \quad (4)$$

уравнение импульсов

$$p_{j0}^* = p_{j1}^* + \xi_j \rho_n u_n^2 / 2, \quad (5)$$

уравнение энергии (пренебрегая дроссельным эффектом)

$$T_{j0}^* = T_{j1}^*, \quad (6)$$

где индексы 0 и 1 относятся к входу и выходу участка;  $\rho_j$ ,  $u_j$ ,  $F_j$ ,  $p_j^*$ ,  $T_j^*$  — плотность, скорость, площадь сечения, давление и температура торможения газа в  $j$ -м участке;  $\rho_n$ ,  $u_n$  — плотность и скорость газа на входе в часть тракта с переменным сечением;  $\xi_j$  — коэффициент потерь полного давления.

Линеаризовав уравнение (4), учтя при этом линеаризованную зависимость, связывающую плотность с давлением и энтропией (в безразмерных амплитудах вариаций)  $\delta \bar{\rho} = (1/\kappa) \delta \bar{p} - \delta \bar{s}$ , находим

$$\delta u_{j0} + (1/\kappa) \delta \bar{p}_{j0} - \delta \bar{s}_{j0} = \delta u_{j1} + (1/\kappa) \delta \bar{p}_{j1} - \delta \bar{s}_{j1}, \quad (7)$$

где  $\kappa$  — показатель адиабаты;  $\delta \bar{u}$ ,  $\delta \bar{p}$ ,  $\delta \bar{s}$ ,  $\delta \bar{\rho}$  — амплитуды безразмерных вариаций параметров. В уравнении (5) необходимо учесть зависимость коэффициента  $\xi_j$  от числа Маха потока на входе  $M_n$ , которая в линейном виде запишется

$$\delta \bar{\xi}_j = \chi_j \delta \bar{M}_n, \quad (8)$$

где  $\chi_j = (M_n / \xi_j) (\partial \xi_j / \partial M_n)$ ,  $\delta \bar{\xi}_j$ ,  $\delta \bar{M}_n$  — амплитуды вариаций параметров и связь вариации числа Маха с другими параметрами:

$$\delta \bar{M} = \delta \bar{u} - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \delta \bar{p} - \frac{1}{2} \delta \bar{s}, \quad (9)$$

полученные путем линеаризации соотношений  $M = u/c$ ,  $c = \sqrt{\kappa R T}$ , где  $c$  — скорость звука.

В уравнение (5) входит полное давление  $p^*$ , которое можно выразить через статическое давление и текущее значение числа Маха —  $M$ :

$$p^* = p \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$

Последняя зависимость в линеаризованном виде с учетом соотношения (9) в безразмерных вариациях запишется

$$\delta p^* = \kappa \gamma \delta \bar{u} + \left( 1 - \gamma \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) \delta \bar{p} - \frac{1}{2} \kappa \gamma \delta \bar{s}, \quad (10)$$

где  $\delta \bar{p}^*$  — амплитуда вариации полного давления;

$$\gamma = M^2 / \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)$$

Линеаризовав (5) с учетом зависимостей (7)–(10), найдем:

$$\begin{aligned} & \kappa \gamma_{j0} \delta \bar{u}_{j0} + \left(1 - \gamma_{j0} \frac{\kappa - 1}{\kappa}\right) \delta \bar{p}_{j0} - \frac{1}{2} \kappa \gamma_{j0} \delta \bar{s}_{j0} = \\ & = \frac{p_{j1}^*}{p_{j0}^*} \left[ \kappa \gamma_{j1} \delta \bar{u}_{j1} + \left(1 - \gamma_{j1} \frac{\kappa - 1}{\kappa}\right) \delta \bar{p}_{j1} - \frac{1}{2} \kappa \gamma_{j1} \delta \bar{s}_{j1} \right] + \\ & + \frac{p_{j0}^* - p_{j1}^*}{p_{j0}^*} \left\{ (2 + \chi_{j0}) \delta \bar{u}_n + \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} (2 + \chi_{j0})\right] \delta \bar{p}_n - \frac{1}{2} (2 + \chi_{j0}) \delta \bar{s}_n \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\gamma_{j0} = M_{j0}^2 / \left(1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa} M_{j0}^2\right); \quad \gamma_{j1} = M_{j1}^2 / \left(1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa} M_{j1}^2\right);$$

$\delta \bar{p}_n, \delta \bar{s}_n, \delta \bar{u}_n$  — амплитуды безразмерных вариаций параметров в начале участка тракта с переменным проходным сечением.

Линеаризовав уравнение энергии (6)  $\delta \bar{T}_{j0}^* = \delta \bar{T}_{j1}^*$ , переходим в нем к безразмерным вариациям статической температуры, используя соотношение  $\delta T^* = \delta T + (\kappa - 1) \gamma \delta M$ , полученное из формулы газовой динамики

$$T^* = T \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right).$$

После преобразований, используя зависимость (9) и термодинамические соотношения, находим линеаризованное уравнение энергии:

$$\begin{aligned} & (\kappa - 1) \gamma_{j0} \delta \bar{u}_{j0} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \gamma_{j0}\right) \delta \bar{p}_{j0} + \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \gamma_{j0}\right) \delta \bar{s}_{j0} = \\ & = (\kappa - 1) \gamma_{j1} \delta \bar{u}_{j1} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \gamma_{j1}\right) \delta \bar{p}_{j1} + \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \gamma_{j1}\right) \delta \bar{s}_{j1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение неразрывности (7), импульсов (11) и энергии (12) трудно разрешить аналитически относительно параметров на входе  $\delta \bar{u}_{j0}, \delta \bar{p}_{j0}, \delta \bar{s}_{j0}$ . Поэтому эту операцию целесообразно выполнять численно. При этом следует обратить внимание, что в уравнение (11) входят вариации параметров потока в сечении входа в участок с переменным сечением, так как потери полного давления выражались в долях скоростного напора газа в этом сечении.

Решив численно систему уравнений (7), (11) и (12), получим уравнения, которые запишем в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \delta \bar{u}_{j0} \\ \delta \bar{p}_{j0} \\ \delta \bar{s}_{j0} \end{Bmatrix} = \|A_j\| \begin{Bmatrix} \delta \bar{u}_{j1} \\ \delta \bar{p}_{j1} \\ \delta \bar{s}_{j1} \end{Bmatrix} + \|D_j\| \begin{Bmatrix} \delta \bar{u}_n \\ \delta \bar{p}_n \\ \delta \bar{s}_n \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Уравнение (13) характеризует каждое сопротивление между двумя соседними цилиндрическими участками как активный шестиполюсник. Можно непосредственно использовать уравнение (13) или, введя формальные дополнительные уравнения  $\delta \bar{u}_n = \delta \bar{u}_n, \delta \bar{p}_n = \delta \bar{p}_n, \delta \bar{s}_n = \delta \bar{s}_n$ , преобразовать уравнение (13) в уравнение пассивного двенадцатиполюсника

$$\begin{Bmatrix} \delta \bar{u}_{j0} \\ \delta \bar{p}_{j0} \\ \delta \bar{s}_{j0} \\ \delta \bar{u}_n \\ \delta \bar{p}_n \\ \delta \bar{s}_n \end{Bmatrix} = \|A_j^c\| \begin{Bmatrix} \delta \bar{u}_{j1} \\ \delta \bar{p}_{j1} \\ \delta \bar{s}_{j1} \\ \delta \bar{u}_n \\ \delta \bar{p}_n \\ \delta \bar{s}_n \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

В матрице  $\|A_j^c\|$  в первых трех строках три первых элемента совпадают с элементами матрицы  $\|A_j\|$ , а остальные три — с элементами матрицы  $\|D_j\|$ , в четвертой, пятой и шестой строках по диагонали стоят 1, а остальные

элементы — нули. К такому же виду сводится и матрица  $\|A_j\|$  для цилиндрического участка (2), только при преобразовании к уравнению двенадцати полюсника (14) в матрицу  $\|A_j^c\|$  вместо матрицы  $\|D_j\|$  подставляется единичная матрица. Перемножив последовательно матрицы  $\|A_j^c\|$  для всех цилиндрических участков, на которые разбили тракт, и для сопротивлений, моделирующих потери на трение в участках и на местных сопротивлениях, найдем передаточную функцию столба газа в тракте, связывающую амплитуды скоростей, давления и энтропии в начале и конце тракта.

Рассмотрим тракт переменного проходного сечения с дозвуковым потоком без развилки. Для замыкания системы уравнений такого тракта достаточно описать граничные условия на его входе и выходе. Предполагая, что на входе в тракт неизотермичность потока определяется химическими реакциями, горением или смешением газов с разной температурой и т. д., примем, что поступающий в тракт газ образуется как минимум из двух потоков с массовыми расходами  $G_0$  и  $G_T$ . Температура газа в начале тракта зависит от отношения этих расходов  $T_{01} = f(G_0/G_T)$ . Временем химической реакции (горения, смешения и т. д.) и объемом зоны реакции пренебрегаем. В линеаризованном виде соотношение баланса масс на входе с учетом уравнения состояния идеального газа запишется

$$\delta \bar{G}_{10} = \bar{G}_0 \delta \bar{G}_0 + \bar{G}_T \delta \bar{G}_T = \delta \bar{u}_{10} + \delta \bar{p}_{10} - \delta \bar{T}_{10}, \quad (15)$$

где  $\delta \bar{G}_{10}$ ,  $\delta \bar{u}_{10}$ ,  $\delta \bar{p}_{10}$ ,  $\delta \bar{T}_{10}$  — амплитуды вариации параметров газа на входе в тракт (1-й его участок);  $\bar{G}_0 = G_0 / (G_0 + G_T)$ ;  $\bar{G}_T = G_T / (G_0 + G_T)$ ;  $\delta \bar{G}_0$ ,  $\delta \bar{G}_T$  — амплитуды вариации расходов среды, из которых образуется газ на входе в тракт.

Связь отклонения температуры газа с амплитудами вариаций расходов описывается линеаризованной зависимостью

$$\delta \bar{T}_{10} = \Psi (\delta \bar{G}_0 - \delta \bar{G}_T) = \delta \bar{s}_{10} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \delta \bar{p}_{10}, \quad (16)$$

где  $\Psi = [(G_0/G_T)/T] [\partial T / \partial (G_0/G_T)]$  — коэффициент наклона кривой зависимости температуры газа от отношения расходов;  $\delta \bar{s}_{10}$  — амплитуда вариации энтропии на входе в тракт. Зависимость (16) является первым граничным условием на входе. Подставив соотношение (16) в (15), найдем второе граничное условие для входа:

$$\delta \bar{p}_{10} + \delta \bar{u}_{10} = (G_0 + \Psi) \delta \bar{G}_0 + (G_T - \Psi) \delta \bar{G}_T. \quad (17)$$

Примем, что на выходе тракта имеется сопротивление с плавным входом (сопло, дроссельная шайба и т. д.), для которого протяженность мала по сравнению с длинами акустических и энтропийных волн. Расход через сопротивление  $G_{n1}$  определяется уравнением (при докритическом перепаде давления)

$$G_{n1} = \mu F \left[ \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_{n1}^2}{RT_{n1}} \left[ \left( \frac{p_c}{p_{n1}} \right)^{2\kappa} - \left( \frac{p_c}{p_{n1}} \right)^{(\kappa+1)/\kappa} \right] \right]^{1/2}, \quad (18)$$

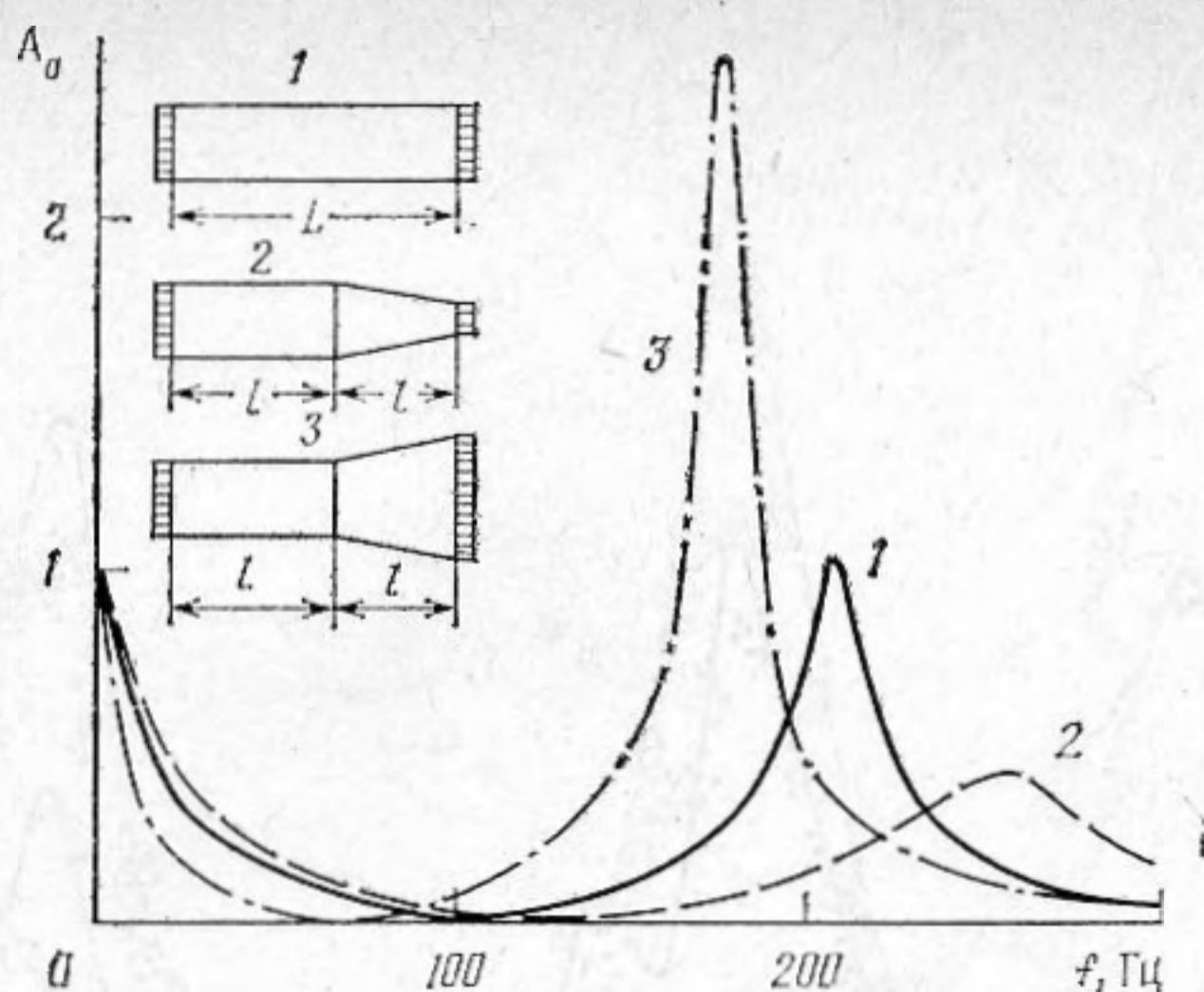
где  $p_{n1}$ ,  $T_{n1}$  — давление и температура на выходе из последнего  $n$ -го участка тракта (перед местным сопротивлением);  $p_c$  — давление за местным сопротивлением.

Линеаризовав соотношение (18), находим

$$\delta \bar{G}_{n1} = (1 + \varepsilon) \delta \bar{p}_{n1} - \varepsilon \delta \bar{p}_c - \frac{1}{2} \delta \bar{T}_{n1}, \quad (19)$$

где  $\delta \bar{G}_{n1}$ ,  $\delta \bar{p}_{n1}$ ,  $\delta \bar{p}_c$ ,  $\delta \bar{T}_{n1}$  — амплитуды безразмерных вариаций соответствующих параметров;  $\varepsilon = [G / (p_c/p_{n1})] [\partial G / \partial (p_c/p_{n1})]$  — коэффициент наклона зависимости расхода от отношения давлений. Используя линеаризованное уравнение неразрывности  $\delta G = \delta \bar{p} + \delta \bar{u} - \delta \bar{T}$  и соотношение типа зависимости (16), получаем из формулы (19) граничное условие для выхода из тракта:

$$\delta \bar{u}_{n1} = \varepsilon \delta \bar{p}_{n1} - \varepsilon \delta \bar{p}_c + \frac{1}{2} \delta \bar{s}_{n1} + \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \delta \bar{p}_{n1}. \quad (20)$$



Фиг. 1. Схемы газовых трактов и кривые модуля входной передаточной функции  $A_0 = |\delta \bar{p}_0 / \delta \bar{G}_0|$ :  $h = 1000$  мм,  $l = 500$  мм; I —  $\delta \bar{C}_0$ , II —  $\delta \bar{p}_0$

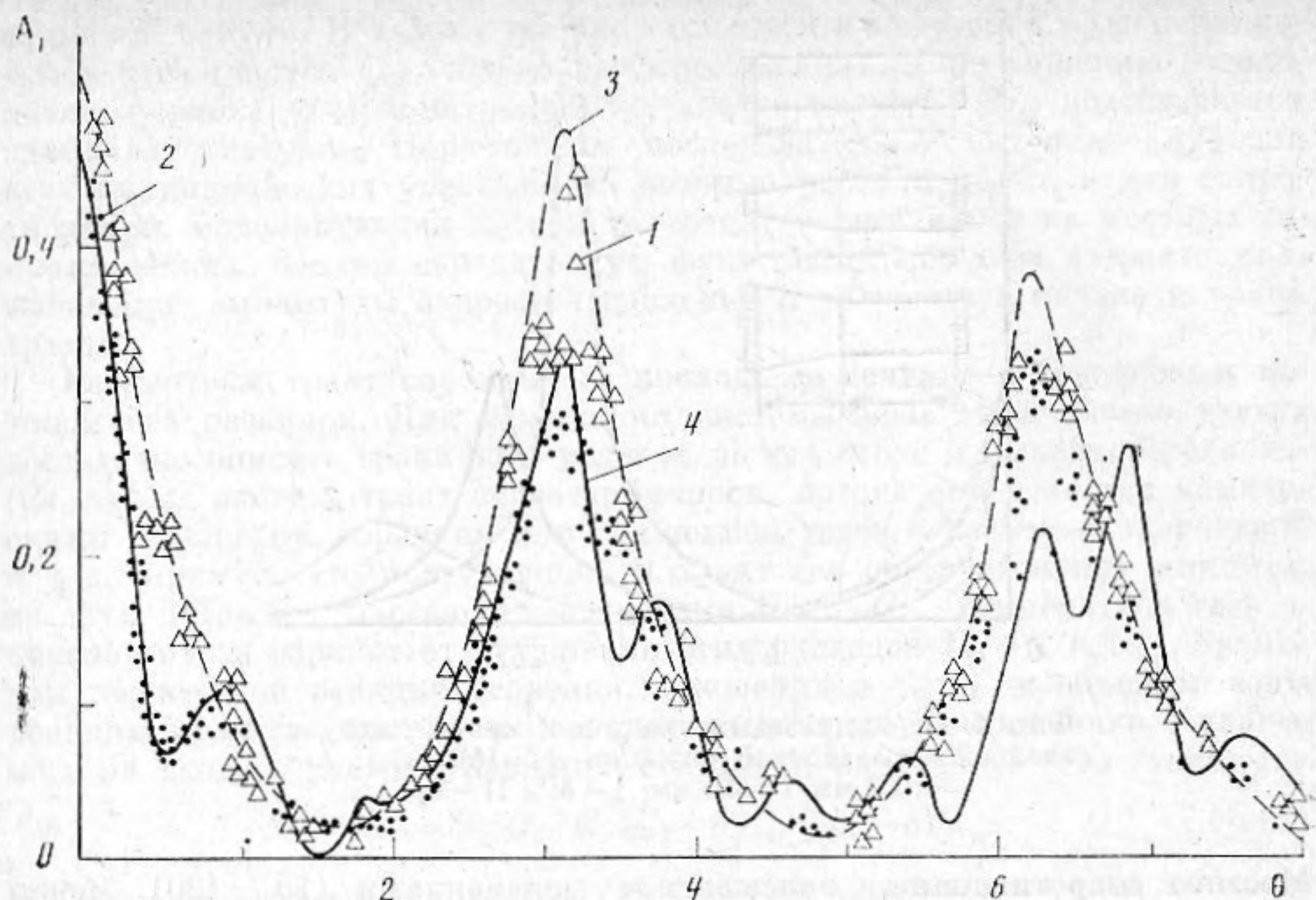
Местное сопротивление, описываемое уравнениями (18)–(20), может быть расположено внутри газового тракта. В этом случае необходимо соотношение (20) преобразовать в уравнение шестиполюсника, пренебрегая дроссельным эффектом и принимая  $T_0 = T_1$ . Введя новые обозначения, считая местное сопротивление  $i$ -м элементом тракта, а индексами 0 и 1 обозначая параметры на его входе и выходе, используя линеаризованные уравнения состояния и соотношение термодинамики (16), найдем

$$\begin{aligned} \delta \bar{u}_{i0} &= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{u_0}{u_1} \delta \bar{u}_{i1} + \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{1}{1+\varepsilon} \delta \bar{p}_{i1} + \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \delta \bar{s}_{i1}; \\ \delta \bar{p}_{i0} &= \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{u_0}{u_1} \delta \bar{u}_{i1} + \left(1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{1}{1+\varepsilon}\right) \delta \bar{p}_{i1} - \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \delta \bar{s}_{i1}; \\ \delta \bar{s}_{i0} &= -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{u_0}{u_1} \delta \bar{u}_{i1} + \frac{(\kappa-1)^2}{2\kappa^2} \frac{1}{1+\varepsilon} \delta \bar{p}_{i1} + \left[1 + \frac{\kappa-1}{2\kappa(1+\varepsilon)}\right] \delta \bar{s}_{i1}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $u_0, u_1$  — средние расходы в тракте до и после сопротивления.

В качестве примера использования предложенной методики рассмотрим результаты расчетов частотной характеристики  $\delta \bar{p}_0 / \delta \bar{G}_0$  газовых трактов одной длины, но разной формы (фиг. 1). Во всех случаях расчеты проводились без учета энтропийных волн ( $\Psi = 0$ ), принимая, что в цилиндрической части  $M = 0,1$ , скорость звука  $c = 410$  м/с, на выходе из тракта — решетка с критическим перепадом давления ( $\varepsilon = 0$ ), на входе задана амплитуда колебаний расхода  $\delta \bar{G}_0$ . Для тракта цилиндрической формы 1 имеется резонансный максимум на частоте  $f_p \approx 205$  Гц, являющейся частотой собственных колебаний  $f_c$  столба газа в трубе с двумя концами, закрытыми в акустическом смысле [3, 6],  $f_c = (c/2L)(1-M^2)$ , высота максимума совпадает со значением амплитудно-частотной характеристики при нулевой частоте  $f = 0$ . Для тракта, состоящего из двух участков разной формы (фиг. 1), частотные характеристики изменяются, хотя длина тракта сохраняется. При конфузорном втором участке тракта резонансная частота смещается в область более высоких частот ( $f_p \sim 260$  Гц), а резонансный максимум снижается более чем в 2 раза по сравнению с цилиндром, при диффузорном втором участке — резонансная частота понижается ( $f_p \sim 180$  Гц), а резонансный максимум повышается более чем в 2 раза.

Результаты расчетов показали, что путем изменения геометрии тракта можно добиться достаточно существенной трансформации его акустиче-



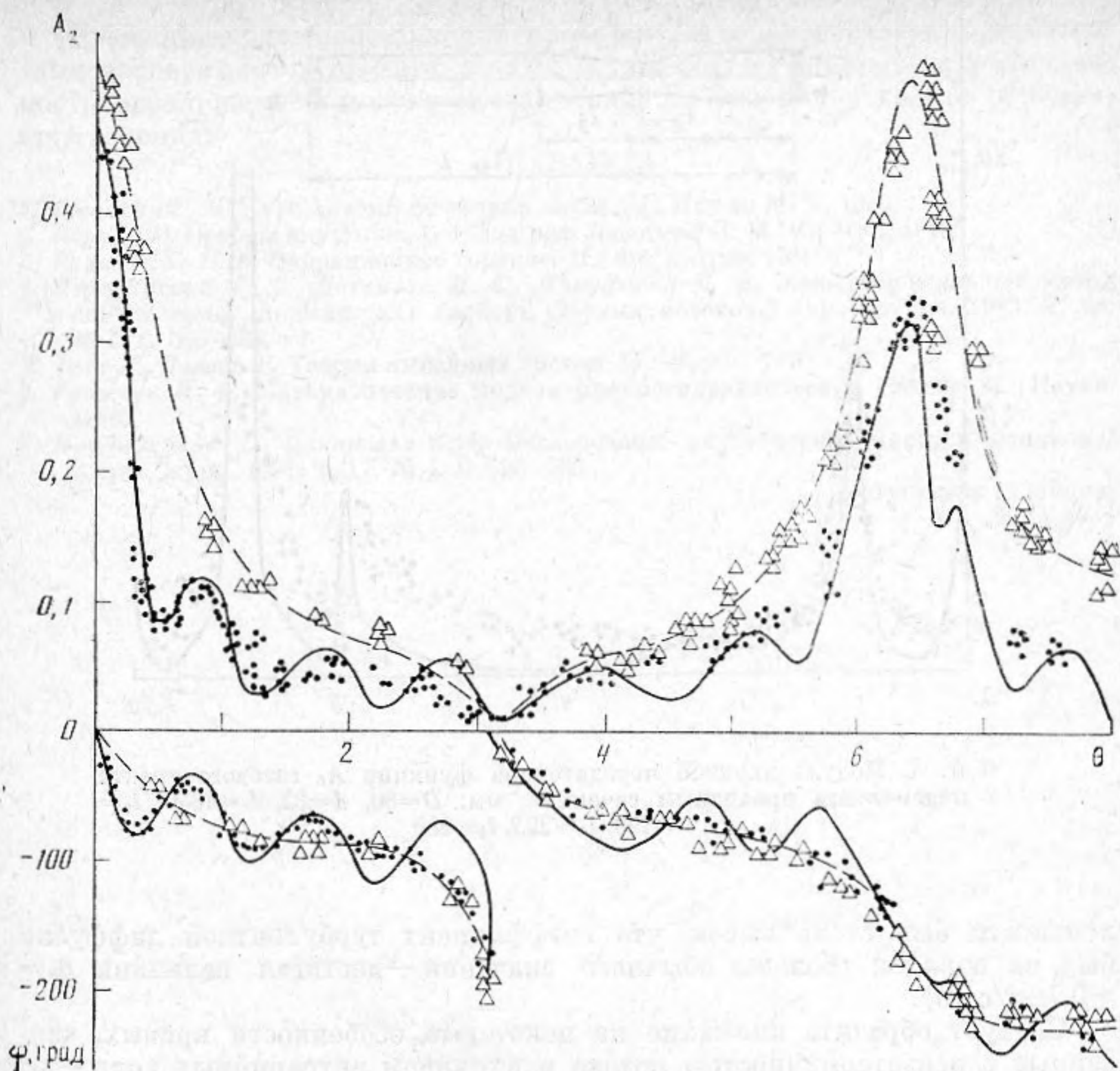
Фиг. 2. Модуль входной передаточной функции цилиндрического газового тракта.  $A_1$ : 1 — эксперимент для изотермического течения; 2 — эксперимент для неизо- термического течения; 3 — расчет для изотермического течения; 4 — расчет для неизо- термического течения;  $\theta = \omega L/a$

ских характеристик, что важно для задач устойчивости и динамики систем.

Разработанная линейная математическая модель была проверена путем сопоставления результатов расчетов с данными, полученными на экспериментальной установке, в которой одновременно возбуждались акустические и энтропийные волны. В тракте цилиндрической формы ( $L \sim 1,5$  м,  $D = 0,12$  м) с коротким соплом на выходе через входную решетку с большим числом отверстий ( $\sim 200$ ) подавались независимо два потока воздуха — холодного и подогретого. На отверстиях решетки как для холодного, так и для горячего воздуха обеспечивался сверхкритический перепад давления, так что колебания давления в тракте не влияли на расходы воздуха через решетку. Перед решеткой холодного воздуха с помощью пульсатора создавались гармонические колебания давления, приводящие к колебаниям расхода холодного воздуха. Колебания расхода холодного воздуха при сохранении неизменным расхода горячего воздуха обеспечивали создание на входе в газовый тракт как колебаний расхода, так и температуры газа.

Большое количество отверстий, расположенных попеременно друг с другом, высокая скорость истечения обеспечивали интенсивное перемешивание струй холодного и горячего воздуха вблизи у решетки. Благодаря этому временем перемешивания и объемом зоны, в которой происходит смешение, можно было пренебречь. Это подтверждено сравнением данных экспериментов с результатами расчетов, приведенных ниже.

В процессе экспериментов с помощью малоинерционных индуктивных датчиков давления ДДИ-21 измерялись колебания давления перед решеткой холодного воздуха и в нескольких сечениях по длине газового тракта. Показания датчиков давления и датчика оборотов пульсатора записывались на магнитный регистратор, обработка информации осуществлялась с помощью специального вычислительного комплекса, включающего следящий фильтр и ЭВМ М-6000. В процессе экспериментов определялись как динамические характеристики тракта с неизо- термическим течением (т. е. с энтропийными волнами), так и чисто акустические его



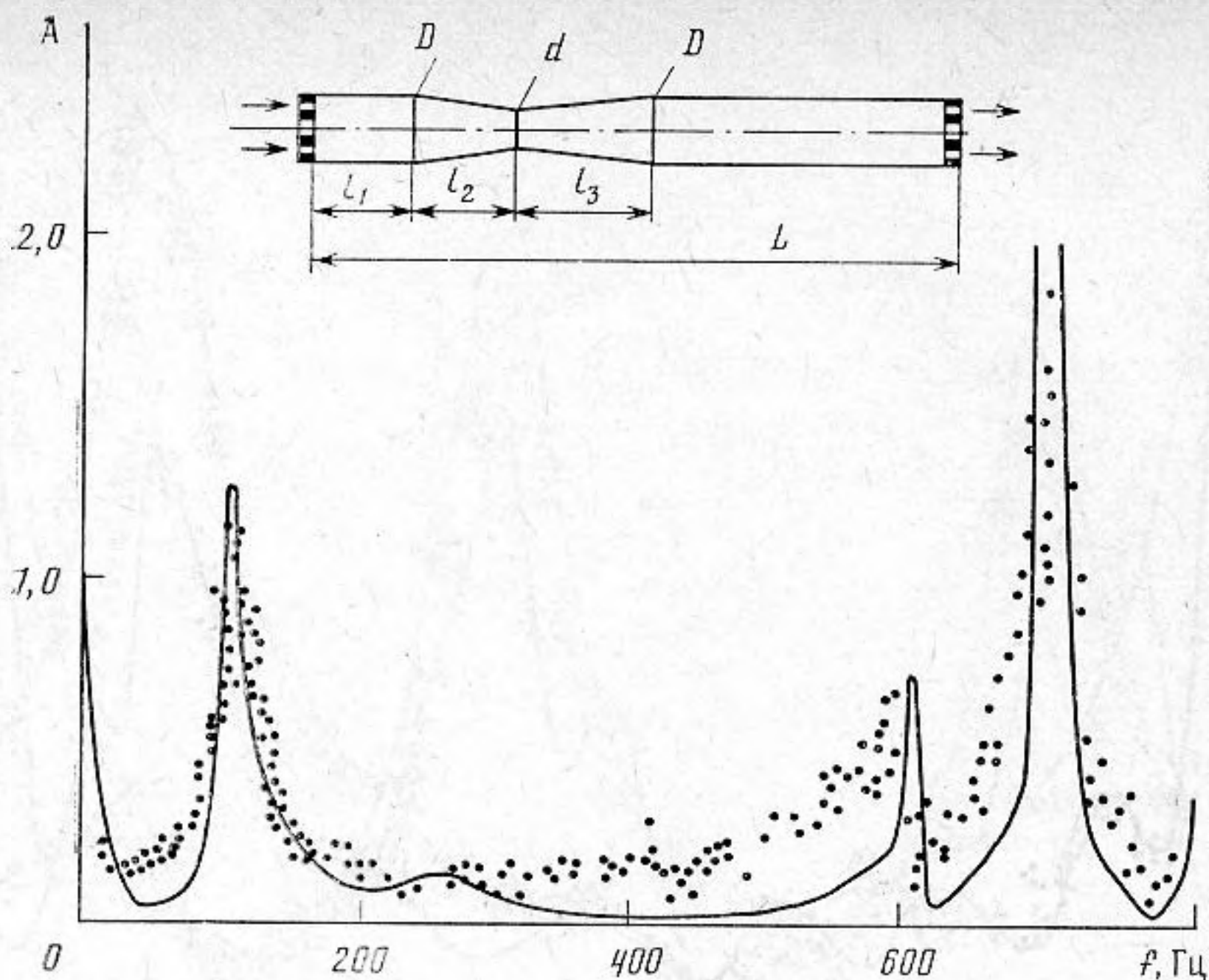
Фиг. 3. Амплитудные и фазовые частотные характеристики цилиндрического газового тракта  $A_2$  (обозначения аналогичны на фиг. 2)

характеристики, когда через обе решетки подавался холодный воздух.

Данные экспериментов в форме передаточных частотных характеристик тракта представлены на фиг. 2 и 3. На фиг. 2 приведены кривые модуля входной передаточной функции тракта  $A_1 = |\delta \bar{p}(x_1) / \delta \bar{G}_0|$  для сечения тракта  $x_1 = 0,06$  м (ближе из-за конструктивных трудностей датчик установить не удалось). Здесь  $\delta \bar{G}_0 = \delta \bar{p}_x$  — безразмерная амплитуда колебаний расхода холодного воздуха через отверстия, равная безразмерной амплитуде колебаний давления холодного воздуха перед решеткой. За счет удаления датчика на расстояние  $x = 0,06$  м (4% длины тракта) от входного сечения кривые  $\delta \bar{p}(x_1) / \delta \bar{G}_0$  несколько трансформировались (см. фиг. 1): первый акустический резонанс (пунктир) ниже, чем амплитудно-частотная характеристика при  $f=0$ , второй резонанс — еще ниже.

Совпадение результатов расчетов для изотермического течения с данными экспериментов в диапазоне до 350 Гц ( $\theta = \omega L / c \sim 8$ ) вполне удовлетворительное. Для неизотермического течения данные экспериментов согласуются с результатами расчетов вплоть до первого акустического резонанса ( $\theta = 3,14$ ), дальше наблюдается расхождение, объясняемое частичным рассеиванием энтропийных волн [6] — здесь экспериментальные амплитудно-частотные характеристики за счет этого эффекта приближаются к характеристикам изотермического потока. При этом следует отметить, что в установке были созданы условия, способствующие рассеиванию энтропийных волн за счет малой проницаемости (отношения площади проходного сечения для газа в решетке к площади сечения тракта) и высокой скорости истечения газа из решетки. В итоге уровень турбу-





Фиг. 4. Модуль входной передаточной функции  $A_0$  газового тракта с переменным проходным сечением, мм:  $D=80$ ,  $d=32$ ,  $L=1640$ ,  $l_1=190$ ,  $l_2=225$ ,  $l_3=280$

лентности был столь высок, что коэффициент турбулентной диффузии был на порядок больше обычного значения — достигал величины  $a_t = 0,7 \text{ м}^2/\text{с}$  [6].

Следует обратить внимание на некоторые особенности кривых, связанные с неизотермичностью потока и влиянием энтропийных волн, — на амплитудной характеристике появляются «волны», связанные с взаимодействием акустических и энтропийных волн на выходном сопротивлении. Эти «волны» до первого резонанса хорошо отслеживаются и по данным экспериментов. Еще нагляднее эти эффекты фиксируются на передаточной функции для другого сечения тракта ( $A_2 = |\delta \bar{p}(x_2) / \delta \bar{G}_0|$ ,  $x_2 = 0,69 \text{ м}$  на фиг. 3).

Здесь приведена как амплитудная, так и фазочастотная характеристики, причем на последней «волны» выражены еще более ярко. Сопоставление данных расчетов с результатами экспериментов показывают хорошее совпадение во всем исследованном диапазоне частот для изотермического потока (чисто акустические колебания) и совпадение до  $\theta = 2-3$  для неизотермического потока с энтропийными волнами. Разный характер кривых частотных характеристик на фиг. 2 и 3 объясняется тем, что  $x = 0,69 \text{ м}$  (фиг. 3) соответствует практически середине тракта (по длине), в котором на частоте  $\theta = 3,14$  образуется узел давления, т. е. амплитуда оказывается близкой к нулю и резонанс при  $\theta = 3,14$ , наблюдаемый на фиг. 2, здесь отсутствует.

Для подтверждения эффективности предложенной математической модели тракта с переменным сечением воспользуемся экспериментальными данными, приведенными в статье [4]. Эксперименты проводились с трактом (фиг. 4), имеющим как цилиндрические участки, так и плавное пережатие сечения, в узком сечении которого реализовалось число Маха  $\sim 0,47$ . В зоне пережатия потери полного давления по измерениям составляли 0,45%. На фиг. 4 приведены расчетные кривые модуля входной передаточной функции  $A_0$  с учетом потерь на трение в зоне пережатия, рассчитанные с использованием описанной математической модели. Сопоставление результатов расчетов с экспериментами показывает их вполне удовлетворительное согласование.

Итак, примеры сопоставления проведенной серии расчетов с результатами экспериментов на двух разных установках указывают на эффективность предложенной модели нестационарного течения в тракте переменного сечения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ, 1960.
2. Скучик Е. Основы акустики. Т. 1/Под ред. Лямшева Л. М. М.: Мир, 1976.
3. Раушенбах Б. В. Вибрационное горение. М.: Физматгиз, 1961.
4. Лебединский Е. В., Натанзон М. С., Никифоров М. В. Экспериментальный метод определения динамических свойств газовых потоков // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 5. С. 660-664.
5. Заде Л., Дезоер Р. Теория линейных систем. М.: Наука, 1970.
6. Гликман Б. Ф. Математические модели пневмогидравлических систем. М.: Наука, 1986.
7. Прудников А. С., Чернышев К. В. Исследование акустических многополюсников // Акуст. журн. 1971. Т. 17. № 4. С. 593-595.

Поступила в редакцию  
10.IV.1986