АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 6

УДК 534.539.3

К ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА НЕОДНОРОДНОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Коваленко Г. П.

В работе получена приближенная система связанных обобщенных волновых уравнений, удобная для описания высокочастотных колебаний упругих твердых сред, параметры которых зависят от одной координаты. Плоская задача о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений.

Векторное уравнение движения упругой среды в случае зависимости плотности ρ и параметров Ламе λ, μ от декартовой координаты z имеет вид

$$\nabla(\xi\nabla\cdot\mathbf{u})-\nabla\times(\mu\nabla\times\mathbf{u})+2\mu'(\mathbf{u}'-\mathbf{i}_z\nabla\cdot\mathbf{u}+i_z\times\nabla\times\mathbf{u})=\rho\ddot{\mathbf{u}}, \tag{1}$$

где $\xi=\lambda+2\mu$, $\mathbf{i}_z$ — единичный вектор, штрих обозначает производную по z, остальные обозначения общеприняты. Представим вектор смещения u в виде

$$\mathbf{u}=f_1^{-1}\nabla(f_1\Phi_1)+f_2^{-1}\nabla\times\nabla\times(f_2\Phi_2\mathbf{i}_z)+\nabla\times(\Phi_3\mathbf{i}_z), \tag{2}$$

где f_n — гладкие функции координаты z, которые находятся ниже. Подставим (2) в (1) и к результату подстановки прибавим четыре тождества, содержащие функции h_n, которые также определяются ниже:

$$\nabla(h_1\Phi_1)-\nabla_t(h_1\Phi_1)-\mathbf{i}_z\frac{\partial}{\partial z}(h_1\Phi_1)\equiv 0,$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{i}_z h_2\Phi_2+\mathbf{i}_z h_2\nabla_t^2\Phi_2-\nabla_t(h_2\Phi_2)'\equiv 0,$$

$$\nabla(h_3\Phi_1')-\mathbf{i}_z(h_3\nabla^2\Phi_1+h_3'\Phi_1')-\nabla\times\nabla\times\mathbf{i}_z h_3\Phi_1+h_3'\nabla_t\Phi_1\equiv 0,$$

$$\nabla(h_4\nabla_t^2\Phi_2)-\mathbf{i}_z h_4'\nabla_t^2\Phi_2+\nabla\times\nabla\times\mathbf{i}_z h_4\Phi_2'-$$

$$-\nabla_t[h_4\nabla^2\Phi_2+h_4'\Phi_2']\equiv 0;\qquad \nabla_t=\mathbf{i}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{i}_y\frac{\partial}{\partial y}.$$

В результате получим такое векторное уравнение

$$\nabla\Lambda_1+\nabla\times\nabla\times\mathbf{i}_z\Lambda_2+\nabla\times\mathbf{i}_z\Lambda_3-\nabla_t\Lambda_4-\mathbf{i}_z\Lambda_5=0, \tag{3}$$

где

$$\Lambda_n=\left[\theta_n\nabla^2+(2\mu'+g_n\theta_n+h_{2+n})\frac{\partial}{\partial z}+\theta_n g_n'+h_n-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Phi_n+$$

$$+(\theta_n g_{3+n}+h_{5-n})[1-n+(2-n)\nabla_t^2]\Phi_{3-n},\quad n=1,2;\quad \theta_1=\xi,\quad \theta_2=\mu,$$

$$\Lambda_3=\mu\nabla^2\Phi_3+\mu'\Phi_3'-\rho\ddot{\Phi}_3,\quad g_n=f_n'f_n^{-1},$$

$$\Lambda_{4,5}=\Big[(2\mu'+h_{4,3})\nabla^2+(2\mu''+h_{2,1}+h_{4,3}')\frac{\partial}{\partial z}+h_{1,2}'+$$

$$+\rho(g_{1,2}-p_\rho)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big]\Phi_{2,1}\pm(h_{1,2}-2\mu'g_{1,2}-h_{3,4}')(\Phi_1,\nabla_t^2\Phi_2),$$

$$\nabla_t^2=\nabla_t\cdot\nabla_t;\quad p_\rho=\rho'\rho^{-1}.$$

В последнем выражении следует брать только первый или только второй индексы, верхний или нижний знаки, первую или вторую функцию в скобках в последнем слагаемом. Далее положим, что между функционалами Λ_n существует такая связь:

$$\Lambda_5=(p_\rho-g_1)\Lambda_1,\quad \Lambda_4=(p_\rho-g_2)\Lambda_2. \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) сведется к следующему $\rho f_1^{-1}\nabla(f_1\rho^{-1}\Lambda_1)+\rho f_2^{-1}\nabla\times\nabla\times\times(f_2\rho^{-1}\Lambda_2\mathbf{i}_z)+\nabla\times\mathbf{\Lambda}_3\mathbf{i}_z=0$. Последнее будет удовлетворено, если $\Lambda_1=\Lambda_2==\Lambda_3=0$.

Условия (4) приводят к восьми уравнениям, четыре из которых используются для определения h_n $h_n=\theta_n p_\rho q_n-(\theta_n q_n)'$, $q_n=p_\rho-g_n$, $h_{2+n}==\theta_n q_n-2\mu'$, $n=1, 2$. Два из оставшихся четырех имеют вид

$$2\mu' g_n-h_n+h_{2+n}=(\theta_{3-n}g_n+h_{2+n})q_n,\ n=1,\ 2. \tag{5}$$

Если далее предположить, что выполняются неравенства $h_n'\ll\rho\omega^2 q_n$, $\theta_n g_n'+h_n\ll\rho\omega^2$, $n=1, 2$, где ω — частота колебаний среды, то последние два уравнения $h_n'+\rho q_n\omega^2=(\theta_n g_n'+h_n+\rho\omega^2)q_n$ можно считать асимптотическими тождествами и не учитывать в дальнейшем анализе.

Сумма уравнений (5) имеет первый интеграл $2\mu'=\xi q_1+\mu q_2$, а разность приводится к уравнению Риккати $2\tau'+\tau^2(\mu^{-1}-\xi^{-1})-4\mu'\mu^{-1}\tau+4\mu'^2\mu^{-1}-2\mu''=0$, $\tau=\mu q_2$. Интегрируя его методом Ньютона-Канторовича и ограничиваясь вторым приближением, получим

$$\tau=\mu'-2\mu J(z);\qquad J(z)=e^{\psi}\int_0^z p_\mu^2(t)e^{-\psi(t)}\,dt,$$

$$\psi(z)=\int_0^z \mu'\xi^{-1}\,dz,\qquad p_\mu=\mu'\mu^{-1}.$$

Отсюда находим весовые функции

$$g_1=p_\rho-p_\mu\cdot\gamma^{-2}+2\gamma^{-2}J(z),\quad \gamma^2=\xi\mu^{-1},$$
$$g_2=p_\rho-p_\mu+2J(z). \tag{6}$$

Для тела конечных размеров и монотонно меняющейся функции μ с тангенсом угла наклона касательной, не превышающим 1, можно показать, что интегральные слагаемые в (6) могут составлять не более чем 10^{-4} от внеинтегральных слагаемых. В этих случаях интегральными слагаемыми можно пренебречь и считать, что $g_1=p_\rho-\mu'\xi^{-1}$, $g_2=p_\rho-p_\mu$. Тогда получим такие уравнения движения:

$$\left(\nabla^2+p_\rho\frac{\partial}{\partial z}+H_n(z)-v_n^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi_n+(-1)^{n-1}F\frac{\partial\Psi_{3-n}}{\partial x}=0,$$
$$\left(\nabla^2+p_\mu\,\partial/\partial z-v_2^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_3=0;\qquad F=p_\rho-p_\mu(\gamma^2+1)\gamma^{-2}, \tag{7}$$
$$H_n=(p_\rho-2\mu'\theta_n^{-1})'+\mu'\theta_n^{-1}\left(p_\rho-\frac{\theta_n'}{\mu}\gamma^{2(n-2)}\right),\quad n=1,2,$$

где принято $\Psi_1=\Phi_1$, $\Psi_2=\partial\Phi_2/\partial x$. Если $F=0$, т. е. для сред со свойством

$$\rho=\rho(0)\exp\left(\int_0^z \mu'\xi^{-1}\,dz\right),$$

система уравнений (7) становится разделенной по искомым функциям. Следует отметить, что разделенная система уравнений движения неоднородной среды без предположения о высокочастотных колебаниях была получена в работе [1]. При этом на три параметра среды λ, μ, ρ были наложены два условия в виде нелинейных дифференциальных уравнений, что существенно снизило практическую ценность полученного результата.

Полученные уравнения можно использовать для приведения задач акустоупругости неоднородных сред к системе интегральных уравнений. Рассмотрим задачу о дифракции акустической волны на неоднородном упругом цилиндре произвольного поперечного сечения. Пусть в жидкости распространяется падающая волна, заданная потенциалом $\varphi_i=A\exp(xk_x+$

$+zk_z-\omega t)$, в котором A — постоянная, k_x, k_z — компоненты нормального вектора плоской волны, не зависящей от координаты y. Потенциал поля в жидкости, рассеянного упругим цилиндром, ось которого направлена вдоль оси Y, обозначим через φ_s. Множитель $\exp(i\omega t)$ ниже везде опущен. Суммарное поле $\varphi=\varphi_s+\varphi_i$ удовлетворяет таким уравнениям на контуре цилиндра

$$\sigma_n=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad \sigma_l=0,\quad \frac{\partial u_n}{\partial t}=-\frac{\partial\varphi}{\partial n},\tag{8}$$

где σ_n, σ_l — нормальное и касательное напряжения в твердой среде, u_n — нормальное смещение, $\partial\varphi/\partial n$ — производная по нормали к контуру. Поскольку задача плоская, то для описания движения твердой среды достаточно двух первых уравнений системы (7), записанных в предположении гармонической зависимости движения среды от времени. Получим интегральное представление функций Ψ_1, Ψ_2, описывающих поле внутри цилиндра. Для этого используем функцию Ханкеля $H_0(k_nr)$, $r=[(x-x_1)^2+(z-z_1)^2]^{1/2}$, $k_n=\omega v_n^{-1}(0)$ как функцию Грина уравнения Гельмгольца однородной среды при отсутствии граничных условий. Каждое из двух первых уравнений рассматриваем совместно с уравнением Гельмгольца однородной среды с правой частью в виде функции Дирака. Далее умножаем уравнение движения на функцию Ханкеля, а уравнение Гельмгольца — на Ψ_1 или Ψ_2, образуем разность уравнений и интегрируем по области, занятой телом. Выполняя известные преобразования и интегрируя, где необходимо, по частям, получим

$$\Psi_n(x,z)=\oint\left[\Psi(x_1,z_1)\frac{\partial H_0(k_nr)}{\partial n}-\Omega_nH_0(k_nr)\right]dl-\tag{9}$$

$$-\iint[M_n(x_1,z_1)k_nH_1(k_nr)+N_n(x_1,z_1)H_0(k_nr)]dS,$$

$$\Omega_n=\frac{\partial\Psi}{\partial n}-[(-1)^nF(z)\Psi_{3-n}\cos\alpha+p_\rho\Psi_n\sin\alpha],$$

$$M_n=\Psi_n(x_1,z_1)p_\rho\sin\nu+\Psi_{3-n}(x_1,z_1)F(z_1)\cos\nu,$$

$$N_n=\Psi_n(p_\rho'-H_n(z_1)+\Delta k_n^2(z_1)),\qquad \nu=\operatorname{arctg}\frac{(z-z_1)}{(x-x_1)}.$$

Здесь α — угол между нормалью к контуру и осью X, двойной интеграл берется по области, занятой поперечным сечением цилиндра, Δk_n^2 — приращение волнового числа по сравнению с его значением в начале координат. Точка наблюдения в (9) находится внутри тела. Устремим теперь точку наблюдения на контур. Тогда оба аргумента функции Ханкеля в контурном интеграле и один из аргументов этой же функции в двойном интеграле, а также аргумент внеинтегрального члена будут находиться на контуре. Учитывая предельное значение производной функции Ханкеля, когда обе точки находятся на контуре, получим

$$\left(1-\frac{\gamma_1}{2\pi}\right)\Psi_n(x_1,z_1)=\oint\left[\Psi_n(x_1,z_1)\frac{\partial H_0(k_nr_1)}{\partial n}-\Omega_nH_0(k_nr_1)\right]dl-$$

$$-\iint[M_n(x_1,z_1)k_nH_1(k_nr_2)+N_nH_0(k_nr_2)]dS,\tag{10}$$

$$r_1=[(x-x_1)^2+(l(x)-l(x_1))^2]^{1/2},\quad r_2=[(x-x_1)^2+(l(x)-z_1)^2]^{1/2},$$

где $z=l(x)$ — уравнение контура, γ_1 — угол излома в точке на границе, для гладкой кривой $\gamma_1=\pi$. Далее преобразуем граничные условия. Из (2) находим смещения

$$u_x=\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}+g_2\Psi_2,$$

$$u_z=\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}+g_1\Psi_1$$

и нормальную составляющую смещения

$$u_n=\frac{\partial\Psi_1}{\partial n}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial l}+g_2\Psi_2\sin\alpha-g_1\Psi_1\cos\alpha, \tag{11}$$

где $\partial/\partial n$, $\partial/\partial l$ — операторы дифференцирования по нормали и касательной к контуру. По закону Гука получим напряжения

$$\sigma_z=\mu[\gamma^2\nabla^2\Psi_1-2\Psi_{1,xx}-2\Psi_{2,xz}+\gamma^2(g_1\Psi_1)_{,z}+(\gamma^2-2)g_2\Psi_{2,x}],$$

$$\gamma^2=\xi\mu^{-1},$$

$$\sigma_x=\mu[\gamma^2\nabla^2\Psi_1-2\Psi_{1,zz}+2\Psi_{2,xz}+\gamma^2g_2\Psi_{2,x}+(\gamma^2-2)(g_1\Psi_1)_{,z}],$$

$$\sigma_{xz}=\mu[2\Psi_{1,xz}+\Psi_{2,zz}-\Psi_{2,xx}(g_2\Psi_2)_{,z}+g_1\Psi_{1,x}].$$

Аргумент после запятой указывает на операцию дифференцирования. Далее в зависимости $\sigma_n=\sigma_x\sin^2\alpha+\sigma_z\cos^2\alpha-\sigma_{xz}\sin 2\alpha$, $\sigma_l=(\sigma_x-\sigma_z)\sin\alpha\cos\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sigma_{xz}$ подставим найденные выше значения σ_z, σ_x, σ_{xz}, что дает $\sigma_n=\mu\{\gamma^2(\Psi_{1,nn}+\Psi_{1,ll})-2\Psi_{2,ll}+2\Psi_{2,ln}+B_1\cos 2\alpha-A\sin 2\alpha+B_2(\gamma^2-1)\}$, $\sigma_l=\mu\{2\Psi_{1,ln}+\Psi_{2,ll}-\Psi_{2,nn}-B_1\sin 2\alpha-A\cos 2\alpha\}$, $A=g_1\Psi_{1,x}+(g_2\Psi_2)_{,z}$; $B_{1,2}=(g_1\Psi_1)_{,z}\mp g_2\Psi_{2,x}$ (12). Здесь производные по x и z следует заменить операторами

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial l}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial n},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\sin\alpha\frac{\partial}{\partial l}-\cos\alpha\frac{\partial}{\partial n}.$$

Уравнения движения в координатах n, l можно записать в виде $\Psi_{k,ll}+\Psi_{k,nn}+p_\rho\Psi_k'+(H_k(z)-k_n^2(z))\Psi_k+(-1)^{k-1}F\Psi_{3-k,x}=0$, $k=1, 2$.

Выразим отсюда $\Psi_{1,nn}$, $\Psi_{2,nn}$ и подставим в выражения (12) с учетом граничных условий (8):

$$\mu\{\gamma^2(-k_1^2\Psi_1-F\Psi_{2,x}-p_\rho\Psi_{1,z})-2\Psi_{1,ll}+2\Psi_{2,ln}+B_1\cos 2\alpha+$$
$$+A\sin 2\alpha+B_2(\gamma^2-1)\}=i\omega\varphi, \tag{13}$$
$$2\Psi_{1,ln}+2\Psi_{2,ll}+p_\rho\Psi_{2,z}+k_2^2\Psi_2-F\Psi_{1,x}-B_1\sin 2\alpha-A\cos 2\alpha=0.$$

Для потенциала рассеянного поля в жидкости используем известное интегральное представление $\varphi_S=\varphi_l+\oint(\varphi_S H_0(k_3r)_{,n}-H_0(k_3r)\varphi_{S,n})dl$, где $H_0(k_3r)$ — функция Ханкеля, $k_3=\omega c^{-1}$, c — скорость звука в жидкости. Нормальную производную $\varphi_{S,n}$ исключим с помощью третьего краевого условия $\varphi_{S,n}=i\omega(\Psi_{1,n}+\Psi_{2,s}+g_2\Psi_2\sin\alpha-g_1\Psi_1\cos\alpha)$. После подстановки устремим точку наблюдения на контур и получим такое интегральное уравнение для φ_S:

$$\varphi_s=\varphi_l+\oint[H_0(k_3r)i\omega(\Psi_{1,n}+\Psi_{2,l}+g_2\Psi_2\sin\alpha-g_1\Psi_1\cos\alpha)-\varphi_S H_0(k_3r)_{,n}]dl. \tag{14}$$

Итак, имеем семь интегро-дифференциальных уравнений (9), (10), (13), (14). Они содержат пять неизвестных, заданных на контуре: Ψ_1, Ψ_2, их нормальные производные $\Psi_{1,n}$, $\Psi_{2,n}$, а также φ и две неизвестные, Ψ_1 и Ψ_2, заданные в области.

Численную реализацию полученных уравнений можно выполнить методом коллокаций. Для этого контур, ограничивающий тело, разбивается на n_1 дуг, а область — на n_2 подобластей и в соответствии с этим все искомые величины считаются кусочно-постоянными. Граничные условия (13) записываются на каждой дуге, а производные искомых величин заменяются разделенными разностями. В результате получаются $5n_1+2n_2$ алгебраических уравнений с таким же числом неизвестных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alverson R. C., Goor F. C., Hook J. F.* Ancoupled equations of motion nonhomogeneous elastic media // Bulletin Seismol. Soc. Amer. 1963. V. 53. № 5. P. 1023–1030.

Харьковский политехнический институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 28.I.1987