АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 1

УДК 534.222.2

ОБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ РАССЕЯНИИ ЗВУКА НА ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ СФЕРЕ

Лямшев Л. М., Саков П. В.

Теоретически рассмотрено обращение волнового фронта при нелинейном рассеянии плоской звуковой волны на пульсирующей сфере в безграничной жидкой среде.

При нелинейном рассеянии гармонической звуковой волны на колеблющейся с удвоенной частотой плоской поверхности происходит обращение волнового фронта (ОВФ) параметрического типа (см., например, [1—3]). Ниже будут рассмотрены особенности ОВФ при нелинейном рассеянии плоской гармонической звуковой волны пульсирующей акустически жесткой сферой в безграничной жидкой среде. Эти особенности обусловлены, во-первых, кривизной фронтов опорных волн (излучаемых пульсирующей сферой), и, во-вторых, характерными чертами нелинейного рассеяния звуковых волн [4, 5].

Нелинейное рассеяние звука на совершающей небольшие колебания поверхности характеризуется двумя основными параметрами: числом Маха M_1 звукового поля внешних источников и числом Маха M_2 движения поверхности. Давление полного звукового поля p можно представить в виде формального ряда по степеням M_1 и M_2:

$$p(\mathbf{r}, t)=\sum_{m,n=1}^{\infty} M_1{}^m M_2{}^n p_{mn}(\mathbf{r}, t).$$

Предметом анализа является комбинационный член низшего порядка p_{11}.

Пусть на сферу радиуса R падает плоская звуковая волна p_i:

$$p_i(\mathbf{r}, t)=M_1\rho c^2 \exp(-i\omega_i t-ik_i r\cos\theta), \tag{1}$$

где (r, θ, φ) — система сферических координат, центр которой совмещен с центром сферы, а c и ρ — соответственно скорость звука и плотность в невозмущенной жидкости. Поверхность сферы совершает небольшие пульсации g относительно невозмущенного положения с частотой $2\omega_i$:

$$g(t)=\frac{M_2}{k_i}\sin(2\omega_i t). \tag{2}$$

Сфера находится в безграничной жидкой слабо поглощающей среде, так что для звуковых волн выполняется дисперсионное уравнение $k(\omega)=\omega/c+i\alpha(\omega)$, $|\alpha/k|\ll 1$, $\alpha(\omega_i)R\ll 1$.

В соответствии с присутствующими в задаче типами нелинейных взаимодействий [4, 5], комбинационный член p_{11} можно представить в виде суммы поверхностной и объемной компонент: $p_{11}(\mathbf{r}, t)=p_S(\mathbf{r}, t)+p_V(\mathbf{r}, t)$. Каждая из них имеет составляющие на разностной (в данном случае $-\omega_i$) и суммарной ($3\omega_i$) частотах. Поскольку целью анализа является ОВФ, ограничимся рассмотрением звуковых полей на разностной частоте, символически отражая этот факт индексом «—» в соответствующих обозначениях.

Поверхностная компонента p_S возникает в результате нелинейного взаимодействия линейной составляющей звукового поля внешних источников p_{10} с границей [6—8]; для p_{10} на основании известного решения задачи рассеяния плоской звуковой волны на неподвижной акустически жесткой

сфере (см., например, [9, с. 380]) имеем

$$p_{10}(\mathbf{r})=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,e^{-in\frac{\pi}{2}}P_n(\cos\theta)[j_n(k_ir)-A_n(k_iR)\,h_n(k_ir)],$$

$$A_n(x)=Dj_n(x)/Dh_n(x), \tag{3}$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра n-й степени, $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя n-го порядка, $h_n(x)$ — сферическая функция Ханкеля n-го порядка первого рода, D означает дифференцирование по аргументу. Для нахождения p_S используется граничное условие для p_{11} на невозмущенной поверхности S_0, полученное из условия неразрывности на границе:

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial n_0}=-\frac{1}{c^2}p_{10}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}-g\frac{\partial^2 p_{10}}{\partial n_0^2}+2\left(\int\nabla p_{10}\,dt,\frac{\partial}{\partial t}\nabla g\right)+(\nabla p_{10},\nabla g)\ \text{на}\ S_0, \tag{4}$$

где n_0 — внешняя нормаль к S_0. В рассматриваемом случае сферически-симметричных колебаний поверхности граничное условие (4) несколько упрощается:

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial n_0}=-\frac{1}{c^2}p_{10}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}-g\frac{\partial^2 p_{10}}{\partial n_0^2}\ \text{на}\ S_0. \tag{5}$$

Подставив в (5) выражения (2) и (3), для p_S^- получаем

$$p_S^-(r)=\frac{1}{2(k_iR)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,e^{-in\frac{\pi}{2}}P_n(\cos\theta)\,\frac{5-(n^2+n)/(k_iR)^2}{Dh_n(k_iR)\,Dh_n^*(k_iR)}\,h_n^*(k_ir), \tag{6}$$

где звездочка (*) означает комплексное сопряжение (здесь и далее в выражениях для p_S и p_V будет опущен множитель ρc^2).

Поскольку для ОВФ характерны высокие частоты, $k_iR\gg1$, найдем главный (геометрический) член высокочастотной асимптотики ряда (6). Для этого преобразуем его к интегралу

$$p_S^-(\mathbf{r})=$$

$$=-\frac{i}{\pi(k_iR)^2}\int\limits_{-\infty+i\delta}^{\infty}d\nu\,(\nu+1/2)\,e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}Q_\nu(\cos\theta)\,\frac{5-(\nu^2+\nu)/(k_iR)^2}{Dh_\nu(k_iR)\,Dh_\nu^*(k_iR)}\,h_\nu^*(k_ir), \tag{7}$$

где

$$Q_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}[e^{i\nu\pi}P_\nu(x)-P_\nu(-x)].$$

Функция $Q\nu(x)$ имеет особенности в виде полюсов первого порядка в отрицательных целочисленных точках комплексной плоскости ν, что и делает возможным переход от суммы (6) к интегралу (7). Используя [10, с. 147, (4) и 11, с. 370, (55)], получаем асимптотическое выражение

$$Q_{\nu-1/2}(\cos\theta)\sim(\pi i/2)\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2}H_0(\nu\theta)\frac{\nu^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)},\quad|\nu|\to\infty,\ 0<\theta\leqslant\pi-\varepsilon, \tag{8}$$

где $H_0(x)$ — функция Ханкеля первого рода, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Так как $\Gamma(\nu+\alpha)\sim\sqrt{2\pi/\nu}\,(\nu/e)^\nu\nu^\alpha$, $|\gamma|\to\infty$, $|\arg\nu|<\pi$, то

$$\nu^{1/2}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)}\to1,\qquad|\nu|\to\infty,\quad|\arg\nu|<\pi.$$

Для выяснения характера поведения множителя $\nu^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)/\Gamma(\nu+1)$ при $|\nu|\to\infty$ вблизи оси $\arg\nu=\pi$ произведем замену $\nu=-\mu$. С учетом соотноше-

ния $\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin(\pi x)=\pi$ получим

$$\nu^{1/2}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)}=(-\mu)^{1/2}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+1/2)}\operatorname{tg}(\mu\pi)\sim i\operatorname{tg}(\mu\pi)=-i\operatorname{tg}(\nu\pi),$$

$$|\nu|\to\infty,\quad 0<\arg\nu<2\pi.$$

Полагая $\operatorname{Im}\nu>0$, представим $\operatorname{tg}(\nu\pi)$ в виде

$$\operatorname{tg}(\nu\pi)=i\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n e^{2in\pi(\nu-1/2)},\qquad \varepsilon_n=\begin{cases}1, & n=0\\ 2, & n=1,2,\ldots\end{cases}. \tag{9}$$

Поскольку возможна деформация контура интегрирования в (7) в виде сдвига вдоль мнимой оси до первого нуля функции $Dh_\nu(k_iR)$ или $Dh_\nu^*(k_iR)$, то асимптотически можно ограничиться первым членом разложения (9) ($n=0$); в результате имеем

$$p_S^-(\mathbf{r})\sim\frac{1}{2(k_iR)^2}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2}e^{i\frac{\pi}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\nu\nu e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\times$$

$$\times H_0(\nu\theta)\frac{5-(\nu^2-1/4)/(k_iR)^2}{Dh_{\nu-1/2}(k_iR)\,Dh^*_{\nu-1/2}(k_iR)}h^*_{\nu-1/2}(k_ir). \tag{10}$$

В ближней зоне при $k_ir\ll(k_iR)^2$ возможно приближенное вычисление (10) методом стационарной фазы. При этом для функций, входящих в подынтегральное выражение, используются асимптотические формулы

$$H_0(x)\sim\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\exp\left(ix-i\frac{\pi}{4}\right), \tag{11}$$

$$h_{\nu-1/2}(x)\sim x^{-1/2}(x^2-\nu^2)^{-1/4}\exp\left[i\left(\sqrt{x^2-\nu^2}-\nu\arccos\frac{\nu}{x}-\frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{12}$$

$$Dh_{\nu-1/2}(x)\sim(i\sqrt{x^2-\nu^2}/x)h_{\nu-1/2}(x). \tag{13}$$

В результате для поля в «освещенной» области получаем

$$p_S^-(\mathbf{r})\sim\left(\cos\theta_0+\frac{4}{\cos\theta_0}\right)\exp(-ik_i^*r\cos\theta),\qquad \theta_0\neq 0, \tag{14}$$

где θ_0 определяется из соотношения $R\sin\theta_0=r\sin\theta$, а границы «освещенной» области определяются из условия принадлежности стационарной точки области действия асимптотической формулы Дебая (12): $k_iR-k_ir\sin\theta\gg(k_iR)^{1/3}$.

В дальней зоне при $k_ir\gg(k_iR)^2$ стационарная точка отсутствует. В этом случае для $h^*_{\nu-1/2}(k_ir)$ вместо (12) можно воспользоваться выражением

$$h^*_{\nu-1/2}(x)\sim\frac{1}{x}\exp\left[i\left(-x+\nu\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{15}$$

после чего интеграл в (10) приводится к табличному виду. В результате получаем

$$p_S^-(\mathbf{r})\sim(k_iR)^2\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2}\left[4\frac{\sin(k_iR\theta)}{k_iR\theta}+\frac{\sin(k_iR\theta)/k_iR\theta-\cos(k_iR\theta)}{(k_iR\theta)^2}\right]\times$$

$$\times\frac{\exp\left(-ik_i^*r+i\frac{\pi}{2}\right)}{k_ir}. \tag{16}$$

Как видно из (14), в ближней зоне рассеивателя в лучевом приближении p_S^- представляет собой квазиплоскую волну с переменной вдоль фронта амплитудой, распространяющуюся навстречу падающей волне p_i, т. е.

происходит ОВФ. В дальней зоне, как видно из (16), у p_S^- формируется максимум в направлении назад ($\theta=0$), подобно тому как это происходит при рассеянии на плоских экранах. Амплитуда p_S^- при $\theta=0$ оказывается пропорциональной безразмерной площади рассеивателя.

Перейдем теперь к анализу объемного нелинейного взаимодействия. Объемная компонента p_V комбинационного члена p_{11} возникает в результате нелинейного взаимодействия звукового поля внешних источников p_{10} с излучением движущейся поверхности p_{01}. В рассматриваемом случае пульсации (2) поверхности сферы дают поле излучения

$$p_{01}(r)=\rho c^2 k_i R \exp(2ik_iR)\frac{2ik_iR}{1+2ik_iR}\frac{\exp[-ik^*(2\omega_i)r]}{k_ir}. \tag{17}$$

Взаимодействие между p_{01} и p_{10} описывается неоднородным волновым уравнением (уравнением Вестервельта) [12]. Для p_V^- имеем

$$(\Delta+k_i^2)p_V^-(\mathbf{r})=-Q_V^-(\mathbf{r}), \tag{18}$$

$$Q_V^-(\mathbf{r})=-\frac{2\beta k_i^2}{\rho c^2}(p_{01}p_{10})^-, \tag{19}$$

где β — коэффициент нелинейности жидкости. Используя метод функции Грина, для решения p_V^- уравнения (17) имеем

$$p_V^-(\mathbf{r})=-\iiint\limits_V d\mathbf{r}'\,Q_V^-(\mathbf{r}')G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{20}$$

где интегрирование проводится по всему объему жидкости V, а $G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ — функция Грина (см., например, [11, с. 326]):

$$G^-(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-(ik_i/4\pi)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\varepsilon_m\frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}\cos[m(\varphi-\varphi')]P_n^m(\cos\theta)\times$$
$$\times P_n^m(\cos\theta')[j_n^*(k_ir_<)-A_n^*(k_iR)h_n^*(k_ir_<)]h_n^*(k_ir_>), \tag{21}$$

где $r_<\equiv\min\{r,r'\}$, $r_>\equiv\max\{r,r'\}$. Подставив (19) и (21) в (20), после интегрирования по угловым координатам получаем

$$p_V^-(\mathbf{r})\sim-2i\beta k_iR\exp(2ik_iR)k_i^2\int\limits_R^{\infty}dr'r'\exp[-ik^*(2\omega_i)r']\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)e^{-in\frac{\pi}{2}}[j_n(k_ir')-A_n(k_iR)h_n(k_ir')]\times$$
$$\times[j_n^*(k_ir_<)-A_n^*(k_ir)h_n^*(k_ir_<)]h_n^*(k_ir_>).$$

Здесь в подынтегральное выражение входят быстропеременные функции от r'. Для вычисления p_V^- на расстояниях, значительно превышающих длину волны, $k_ir-k_iR\gg1$, достаточно учесть составляющие, складывающиеся в фазе при интегрировании, что эквивалентно выполнению условий синхронизма. Это позволяет ограничиться интегрированием внутри сферы радиуса r [5]:

$$p_V^-(\mathbf{r})\sim-2i\beta k_iR\exp(2ik_iR)k_i^2\int\limits_R^{r}dx\,x\exp[-ik^*(2\omega_i)x]\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\theta)e^{-in\frac{\pi}{2}}F_n(k_iR,k_ix)h_n^*(k_ir),$$

где

$$F_n(k_iR,k_ix)\equiv j_n(k_ix)j_n^*(k_ix)-j_n(k_ix)A_n^*(k_iR)h_n^*(k_ix)-A_n(k_iR)\times$$
$$\times h_n(k_ix)j_n^*(k_ix)+A_n(k_iR)h_n(k_ix)A_n^*(k_iR)h_n^*(k_ix). \tag{22}$$

В выражении (22) функция F_n представлена в виде свободно распространяющихся и рассеянных волн. Далее удобно перейти к представлению F_n в виде приходящих и уходящих волн:

$$F_n(k_iR, k_ix) = \frac{1}{4} h_n(k_ix) h_n^*(k_ix) + \frac{1}{4} h_n(k_i^*x) h_n^*(k_i^*x) - \frac{1}{4} B_n(k_iR) \times$$

$$\times h_n(k_ix) h_n(k_i^*x) - \frac{1}{4} B_n^*(k_iR) h_n^*(k_ix) h_n^*(k_i^*x), \qquad (23)$$

где $B_n(x) = Dh_n^*(x)/Dh_n(x)$. В формуле (23) только третье слагаемое, соответствующее уходящим волнам, образовавшимся при взаимодействии излучения и уходящих волн поля внешних источников звука, может удовлетворить условию синхронизма. С учетом этого для p_V^- получаем

$$p_V^-(\mathbf{r}) \sim (i\beta/2) k_iR \exp(2ik_iR) k_i^2 \int_R^r dx\, x \exp[-ik^*(2\omega i)x] S(\mathbf{r}, x), \qquad (24)$$

где

$$S(\mathbf{r}, x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta)\, e^{-in\frac{\pi}{2}} B_n(k_iR) h_n(k_ix) h_n(k_i^*x) h_n^*(k_ir). \qquad (25)$$

Аналогично преобразованию ряда (6) в интеграл (10) преобразуем асимптотически выражение (25) для $S(r, \mathbf{x})$:

$$S(r, \mathbf{x}) \sim \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \nu e^{-i\nu\frac{\pi}{2}} H_0(\nu\theta) B_{\nu-1/2}(k_iR) h_{\nu-1/2}(k_ix) h_{\nu-1/2} \times$$

$$\times (k_i^*x) h_{\nu-1/2}(k_ir).$$

Положим

$$S(\mathbf{r}, x) = S_1(\mathbf{r}, x) + S_2(\mathbf{r}, x), \qquad (26)$$

$$S_1(\mathbf{r}, x) \sim \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-k_iR}^{k_iR} d\nu \cdot \nu e^{-i\nu\frac{\pi}{2}} H_0(\nu\theta) B_{\nu-1/2}(k_iR)\, h_{\nu-1/2}(k_ix) h_{\nu-1/2} \times$$

$$\times (k_i^*x) h^*_{\nu-1/2}(k_ir). \qquad (27$$

Теперь предположим для простоты, что точка наблюдения находится в дальней зоне рассеивателя: $k_ir \gg (k_iR)^2$, так что для $h^*_{\nu-1/2}(k_ir)$ в (27) можно использовать выражение (15). Пусть также соотношение между параметрами k_ix, k_iR и θ таково, что, воспользовавшись асимптотическими формулами (11), (12) и (13), можно приближенно вычислить интеграл в (27) методом стационарной фазы. В этом случае получим

$$S_1(\mathbf{r}, x) \sim -\frac{1}{\sqrt{\cos(\theta/2)}} \left[\frac{x\cos(\theta/2) - R}{x - R\cos(\theta/2)}\right]^{1/2} \frac{R}{x} \frac{\exp(2i\Delta)}{\Delta} \frac{\exp(-ik_i^*r)}{k_ir}, \qquad (28)$$

где $\Delta \equiv \mathrm{Re}\, k_i \cdot \sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx\cos(\theta/2)}$. Выражение (28) для $S_1(\mathbf{r}, x)$ соответствует геометрооптическому приближению, в рамках которого объемному взаимодействию звуковых волн можно дать лучевую интерпретацию. Оказывается, что луч частоты $-\omega_i$, образовавшийся в точке пересечения лучей частоты ω_i и $-2\omega_i$ в результате их взаимодействия, является как бы зеркальным отражением первого от второго (фиг. 1). Отсюда следует интересный вывод: чем ближе к поверхности рассеивателя лежит точка взаимодействия, тем точнее появляющийся в этой точке луч будет направлен назад по отношению к падающей волне p_i (фиг. 2). Формально это приводит к неприменимости метода стационарной фазы к вычислению $S_1(\mathbf{r}, x)$ при $k_ix - k_iR \leqslant 1$ в случае, если точка наблюдения находится в даль-

ней зоне. Поэтому область $k_i x - k_i R \leqslant 1$ нуждается в отдельном рассмотрении.

Для оценки вклада этой области в p_V^- вычислим $S_1(r, R)$ в ближней и дальней зонах. В первом случае, используя представления (11)—(13) для входящих в подынтегральное выражение в формуле (27) функций, при помощи метода стационарной фазы в «освещенной» области получим

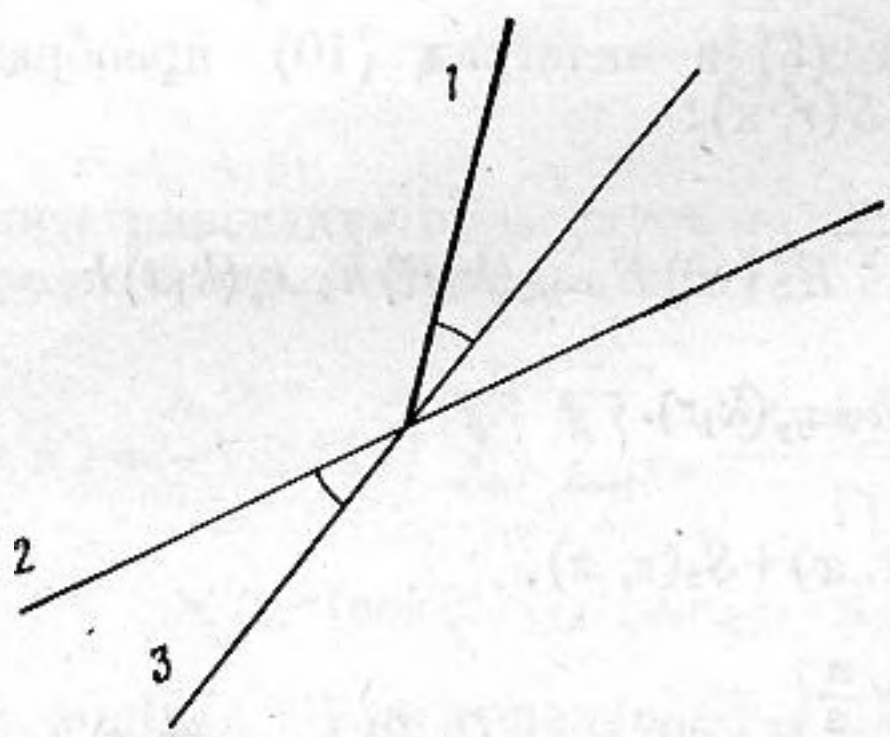
$$S_1(r, R) \sim -\frac{2}{(k_i R)^2} \frac{\exp(-ik_i r \cos\theta)}{\cos\theta_0}. \tag{29}$$

В дальней зоне интеграл в (27) приводится к табличному виду, после чего получаем

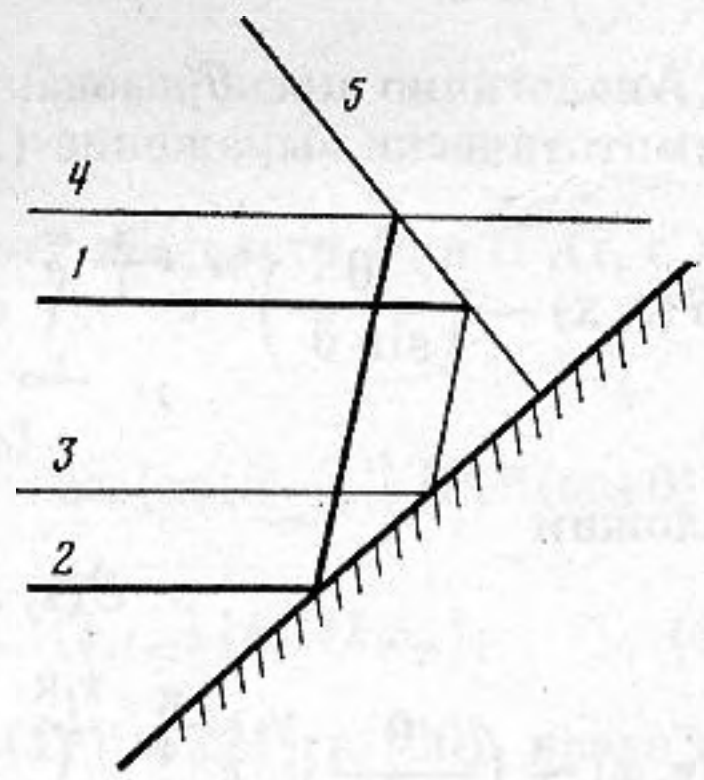
$$S_1(\mathbf{r}, R) \sim -2\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2} \frac{\sin(k_i R\theta)}{k_i R\theta} \frac{\exp\left(-ik_i r + i\frac{\pi}{2}\right)}{k_i r}. \tag{30}$$

Из формулы (29) следует, что при объемном взаимодействии вблизи поверхности рассеивателя происходит ОВФ. Возникающая в рассматриваемом случае квазиплоская волна, как видно из (30), приводит к формированию максимума в дальней зоне в направлении назад.

Для оценки аплитуды обращенной волны следует конкретизировать требования к ее параметрам (ширине и допустимой степени искажения



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Взаимодействие звуковых волн: луч *1* частоты $-\omega_i$ возникает при взаимодействии луча *2* частоты ω_i с лучом *3* частоты $-2\omega_i$

Фиг. 2. Взаимодействие звуковых волн вблизи поверхности рассеивателя: лучи *1* и *2* частоты $-\omega_i$ возникают при взаимодействии соответственно отраженного луча *3* и падающего луча *4* частоты ω_i с излучением *5* частоты $-2\omega_i$

фронта на заданном расстоянии от рассеивателя), что даст возможность оценить толщину слоя, взаимодействие в котором приводит к ОВФ. Один из способов оценки толщины слоя δr заключается в требовании синфазного сложения возникающих в нем лучей в дальней зоне; в этом случае $\delta r \approx 1/k_i$. Поскольку синхронизм в данном случае не важен, необходимо учесть вклад не только третьего, но и четвертого слагаемого в выражении (23) для F_n, что приводит к увеличению оценки амплитуды обращенной волны δp_V^- в 2 раза по сравнению с (24). Окончательно получим

$$\delta p_V^-(\mathbf{r}) \approx i\beta (k_i R)^2 \exp(2ik_i R) S_1(\mathbf{r}, R). \tag{31}$$

Насколько существенен вклад обращенной волны δp_V^- в p_V^-? В ближней зоне из-за отсутствия синхронизма при $\theta \not\approx 0$, p_V^-, δp_V^- и p_S^- сравнимы по амплитуде; в дальней зоне рассеивателя при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ наступает синхронизм между рассеянным при падении p_i и излученным полями. Подставив (28) в (24), при $k_i r \gg (k_i R)^2$ получаем

$$p_V^-(\mathbf{r}) \sim -\frac{i\beta}{2}(k_i R)^2 \exp\left[2ik_i R\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)\right] [E_1(\alpha R) - E_1(\alpha r)], \tag{32}$$

где $\alpha \equiv \alpha(2\omega_i)$, а $E_1(x)$ — интегральная показательная функция. Отсюда следует, что в дальней зоне при $\theta=0$

$$|p_V^-/\delta p_V^-| \approx \begin{cases} \frac{1}{4}\ln(r/R), & \alpha r \ll 1 \\ -\frac{1}{4}\ln(\alpha R), & \alpha r \gg 1 \end{cases}.$$

Из этой оценки видно, что несмотря на пространственное накопление p_V^- при $r \to \infty$, вклад обращенных волн p_s^- и δp_V^- в нелинейном поле p_{11}^- при больших r может оставаться существенным. Увеличения роли эффекта ОВФ в нелинейном взаимодействии можно достичь путем увеличения интенсивности взаимодействия (параметра β) в прилегающем к поверхности рассеивателя слое жидкости.

Интересно также исследовать p_V^- в ближней зоне в окрестности луча $\theta=0$, поскольку здесь всегда существует синхронизм между рассеянной и излученной волнами. Лучи, возникшие в этой области, направлены назад по отношению к падающей волне, и потому могут трактоваться как обращенная волна. С использованием асимптотик (12) и (13) при $k_i r \ll (k_i R)^2$, $(k_i r\theta/2)^4 \ll (k_i R)^3$ (это условие — достаточное) из (27) получаем

$$S_1(\mathbf{r}, x) \sim -2i \frac{\exp(-2ik_iR + 2iRek_ix - ik_i^* r)}{k_i r (k_i x)^2} \int_0^\infty d\nu\, \nu J_0(\nu\theta) \exp[-i\nu^2 a(x)], \tag{33}$$

где $a(x) \equiv 1/k_iR - 1/k_ix + 1/2k_ir$. Используя табличное значение для интеграла в (33), из (24) имеем

$$p_V^-(\mathbf{r}) \sim -\frac{i\beta}{2} k_i R \frac{\exp(-ik_i^* r)}{k_i r} \int_R^r \frac{dx}{x} \exp[-\alpha x + i\theta^2/4a(x)], \tag{34}$$

откуда в случае $\alpha r \ll 1$

$$p_V^-(\mathbf{r}) \sim -\frac{i\beta}{2}(k_iR)^2 \frac{2r}{R+2r}[E_1(-i\theta^2 x_1/4) - E_1(-i\theta^2 x_2/4)] \times$$
$$\times \exp\left(i\frac{\theta^2}{2} k_i \frac{Rr}{R+2r}\right) \frac{\exp(-ik_i^* r)}{k_i r}. \tag{35}$$

где $x_1 \equiv 2Rr/(2r-R) - 2Rr/(2r+R)$, $x_2 \equiv 2r - 2Rr/(2r+R)$. В частности, при $\theta=0$

$$p_V^-(\mathbf{r}) \sim -\frac{i\beta}{2}(k_iR)^2 \frac{2r}{R+2r} \ln[(2r-R)r/R^2] \frac{\exp(-ik_i^* r)}{k_i r}.$$

Как и следовало ожидать, в ближней зоне в окрестности луча $\theta=0$ p_V^- значительно превосходит по амплитуде δp_V^- и p_s^-.

Мы не останавливались на роли второго слагаемого в правой части (26), $S_2(\mathbf{r}, x)$, соответствующего взаимодействию падающей волны и излучения, так как это взаимодействие существенно лишь в узкой области в направлении вперед, $\theta \approx \pi$, и никак не связано с ОВФ.

Таким образом, при нелинейном рассеянии гармонической звуковой волны пульсирующей с удвоенной частотой сферой происходит ОВФ. Оно происходит как в результате взаимодействия этой волны с движущейся поверхностью, так и в результате ее взаимодействия с излучением в тонком, порядка длины волны, слое жидкости, прилегающем к поверхности сферы. Структура обращенных волн четко выражена в ближней зоне рассеивателя. Здесь они представляют собой квазиплоские волны с переменной вдоль фронта амплитудой, с шириной фронта, приблизительно равной размерам рассеивателя, распространяющиеся навстречу падающей на рассеиватель плоской волне p_i. Вследствие локального характера взаимо-

действий, приводящих к возникновению ОВФ, амплитуды этих волн невелики [13]. Однако и они могут приводить к заметным эффектам в дальней зоне в направлении назад из-за формирования максимума. Так, отношение амплитуд $M_1M_2p_S^-$ и $M_1M_2\delta p_V^-$ к амплитуде рассеянного поля $(M_1p_{10}-p_i)$ оказывается здесь равным соответственно $(26/3)M_2k_iR$ и $4\beta M_2k_iR$. Как отмечалось, можно добиться увеличения амплитуды обращенной волны δp_V^- за счет увеличения коэффициента нелинейности β в приповерхностном слое жидкости.

Поле, возникающее в ближней зоне рассеивателя в окрестности луча $\theta=0$ в результате объемного взаимодействия звуковых полей, также может быть интерпретировано как обращенная волна, хотя структура ее качественно отличается от структуры волн p_S^- и δp_V^-. За счет пространственного накопления амплитуда этой волны может значительно превышать амплитуды волн p_S^- и δp_V^-.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пилипецкий Н. Ф., Сударкин А. И., Шкунов В. В.* Обращение волнового фронта мерцающей поверхностью // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 4. С. 835–836.
2. *Лямшев Л. М.* Некоторые особенности рассеяния и излучения звука периодически движущимися пластинами и оболочками // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 3. С. 400–402.
3. *Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В.* Обращение волнового фронта. М.: Наука, 1985. 240 С.
4. *Rogers P. H.* Comments on Scattering by time varying obstacle // J. Sound Vibr. 1972. V. 28. № 4. P. 764–768.
5. *Piquette Jean C., Van Buren A. L.* Nonlinear scattering of acoustic waves by vibrating surfaces // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 76. № 3. P. 880–889.
6. *Censor D.* The generalized Doppler effect and applications // J. Franklin Inst. 1973. V. 295. № 2. P. 103–116.
7. *Censor D.* Harmonic and transient scattering from time varying obstacles // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 76. № 5. P. 1527–1534.
8. *Piguette Jean C., Van Buren A. L.* Comments on Harmonic and transient scattering from time varying obstracles // J. Acoust. Soc. Amer. 1985. V. 79. № 1. P. 179–180.
9. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.
11. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 557 с.
12. *Westervelt P. J.* Scattering of sound by sound // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. V. 29. № 1. P. 199–203.
13. *Piquette Jean C., Van Buren A. L.* Some further remarks regarding scattering of an acoustic wave by a vibrating surface // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 80. № 5. P. 1533–1536.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26.VI.1987